Peirce y los modelos matemáticos del *continuo*

Alejandro Martín Maldonado- 1999[1]

Comienzo con una rápida descripción de la construcción de los reales y de la teoría de los cardinales para luego mostrar el lugar que toma Peirce con respecto a estos desarrollos dentro de una discusión mucho más antigua que es la que tiene que ver con la naturaleza del **continuo**. Tales desarrollos tuvieron su culminación en la teoría de conjuntos, en cuyos principios las ideas de Peirce señalan dificultades esenciales para desarrollar una teoría del *verdadero continuo*. Voy a tratar de mostrar estas dificultades, y también cómo utilizando algunas de las nuevas herramientas lógicas, la teoría de conjuntos puede intentar responder algunos de los cuestionamientos hechos por Peirce.

relaciones y clases de equivalencia

Antes de exponer la construcción clásica de los números reales y de la noción de cardinal tengo que explicar una de las formas canónicas de construir (definir) objetos matemáticos: la partición de un conjunto usando relaciones de equivalencia. Una relación de equivalencia es una relación binaria que pretende expresar la noción de *ser iguales en un mismo aspecto* (equi-valentes). Una relación de equivalencia nos permite separar el conjunto del que partimos en clases disyuntas, los elementos de cada clase tienen algo en común que los hace equivalentes desde cierto punto de vista. El conjunto de los elementos que tienen un mismo aspecto es lo que llamamos una clase de equivalencia. Por ejemplo la edad nos permite separar la sociedad en clases, los que tienen la misma edad pertenecen a una misma clase, por la edad son indistinguibles. Leibniz hablaba del principio de los indiscernibles, dos sujetos son el mismo si no hay forma de distinguirlos[2]. Las clases de equivalencia surgen de relativizar este principio a una cierta mirada, dos individuos son el mismo (pertenecen a la misma clase) si no los puede distinguir esa mirada. ¿Qué propiedades tiene y debe tener una relación para que al dividir el conjunto original en las clases de elementos que se relacionan entre sí tengamos una partición (de manera que cada elemento pertenezca a una sola clase)? Es fácil notar que basta con que la relación cumpla las siguientes propiedades: ser reflexiva (aRa), simétrica (aRb $\rightarrow$ bRa) y transitiva (aRb y bRC $\rightarrow$ aRc), por lo tanto llamaremos *relación de equivalencia* a cada relación binaria que las cumpla.

---

[1] Profesor de la Universidad de los Andes, Bogotá, Colombia. Correo electrónico: martinmaldonado@yahoo.com Este trabajo fue hecho bajo la tutoría de Fernando Zalamea y aparece publicado en: *Actas del II congreso de la sociedad de Lógica, Metodología y Filosofía de la Ciencia en España*, Abril 2000, San Sebastián, pgs. 51-60.

[2] La conexión entre la definición de objetos a partir de relaciones de equivalencia y el principio de los indiscernibles se encuentra desarrollada en [Zalamea, p.17]

el modelo clásico del continuo

Voy a comenzar por describir lo que he llamado el modelo clásico del **continuo**, el conjunto de los números *reales* ($\Re$), desarrollado en el siglo pasado. Partamos con los números *racionales*, los números que son de la forma p/q donde p y q son *enteros*. Ya desde la antigüedad (por lo pronto desde los griegos) se conocía que no todas las medidas que se pueden tomar de líneas geométricas pertenecen a los racionales. El ejemplo más común es la medida de la diagonal de un cuadrado con lados de medida uno, otra casi tan famosa es la medida del perímetro de un círculo con radio unitario. Sin embargo desde entonces se conocía que todos estos números (que siguiendo a Bolzano yo llamaré medibles[3]) eran aproximables con números *racionales*, es decir, todo numero medible es un límite de números *racionales*. La estrategia que se desarrolló en el siglo pasado (y que se atribuye a Weierstrass) para construir los números reales a partir de los racionales consiste en definir un número *real* como la clase de todas las series de racionales que tienden a un mismo lugar. El problema consiste entonces en encontrar la manera de identificar todas las series que convergen a un mismo punto, sin tener el punto, ya que él es lo que queremos definir; esto se puede hacer dado que el hecho de que dos series converjan a un mismo punto es reconocible por propiedades intrínsecas de las series (criterio de convergencia de Cauchy) y constituye una relación de equivalencia.

Fuera de los números medibles dentro del cálculo se utilizaban otras cantidades, las llamadas infinitesimales (menores que todo número real, pero mayores que cero). Una nueva empresa consistió en re-escribir el cálculo en términos de estos nuevos números *reales* y a partir de la noción formal de límite, que permitía expresar muchas nociones, como la derivada, sin necesidad de infinitesimales, los cuales aún no habían logrado ser formalizados.

la teoría de los cardinales

Uno de los dogmas que había impedido el desarrollo de una teoría del infinito era la sentencia aristotélica: "el todo es mayor que las partes". Ya los medievales se habían dado cuenta que se podían identificar los números enteros con los números pares (a cada uno asignándole su doble). Por lo tanto se obtenía que una parte tendría tantos elementos como el todo, lo que llevaba a lo que parecía una contradicción insalvable. Pero no hay tal contradicción, ya que la sentencia aristotélica es tautológica, porque siempre hay un sentido en el que el todo es mayor que la parte, y es precisamente en la relación que se da entre ambos, ser todo y parte, es decir que la parte no es todo el todo, o que el todo tiene la parte y algo más, por lo tanto es mayor. Pero si se

[3] Utilizaré cursivas para nombrar el conjunto construido matemáticamente.

trata de hacer una definición extrínseca de mayor (que vaya más allá de la relación entre todo y parte), como por ejemplo "que tenga más cantidad de elementos", "cuya medida sea mayor" es posible que encontrarse con problemas. La teoría de los cardinales consiste en definir formalmente la noción de cantidad: dos conjuntos tienen la misma *cantidad* de elementos si hay una forma de hacer parejas (uno de cada conjunto) sin que ningún elemento se quede solo. Se llama *cardinal* a la clase de conjuntos que tienen la misma cantidad de elementos (que realiza la noción intuitiva de tamaño de un conjunto). El primer cardinal infinito es el del conjunto de los números naturales, al cual llamamos $\aleph_0$ (que es también el cardinal de los pares, los primos y los racionales). El teorema más famoso de Cantor consistió en mostrar que existen conjuntos infinitos más grandes que otros; la clave estuvo en mostrar que dado un conjunto A, el conjunto *partes de* A ($\wp(\mathbf{A})$), e.d. el conjunto de todos los subconjuntos de A, es un conjunto estrictamente más grande que A. Al cardinal de $\wp(\mathbf{N})$ lo llamamos $\mathbf{2^{\aleph_0}}$. Cantor relacionó lo que estaba desarrollando con la construcción de los reales que describimos arriba, y un resultado clave consistió en probar que el cardinal de los *reales* era el mismo que el de $\wp(\mathbf{N})$ (Cantor identifica los *reales* con el continuo y por eso llama a $\mathbf{2^{\aleph_0}}$, *el cardinal del continuo*). Una pregunta que se hizo Cantor fue la siguiente: ¿Existen cardinales entre $\aleph_0$ y $\mathbf{2^{\aleph_0}}$? *La hipótesis del continuo* consiste en suponer que no. Tal pregunta ha inquietado a los matemáticos desde entonces, y un resultado fundamental consistió en mostrar que tal hipótesis es independiente de los demás axiomas de la teoría de conjuntos.

el lugar de Peirce en esta historia

Peirce está preocupado por el problema del **continuo** (ese concepto vago que aún no hemos logrado atrapar) y ve en los desarrollos de Cantor y Weierstrass unas primeras aproximaciones que nos permiten de alguna manera amarrarlo y trabajar con él. Por lo pronto en la práctica matemática la formalización de los reales estaba siendo muy útil para resolver controversias y para expresar claramente viejos y nuevos problemas (todos los viejos problemas se podían traducir al nuevo lenguaje). Sin embargo a Peirce le parece que esa construcción matemática no expresa completamente el **continuo**, él lo llama *pseudo-continuo*, y emprende un ataque para mostrar sus debilidades. Voy a identificar en principio tres flancos del ataque de Peirce a la pretención de que los *reales* constituyan el **continuo**: los *reales* tienen partes no divisibles, los infinitesimales no tienen lugar en los *reales* y los *reales* tienen un cardinal determinado.

*el **continuo** no está compuesto de puntos*

> "(La construcción del análisis matemático) es llamada *continuo*. Pero esto no parece ser el sentido común de continuidad. Es sólo una colección de puntos independientes. Rompiendo granos de arena más y más sólo hará la arena más despedazada. No llevará a los granos, a continuidad sin rotos." **CP 6.168**

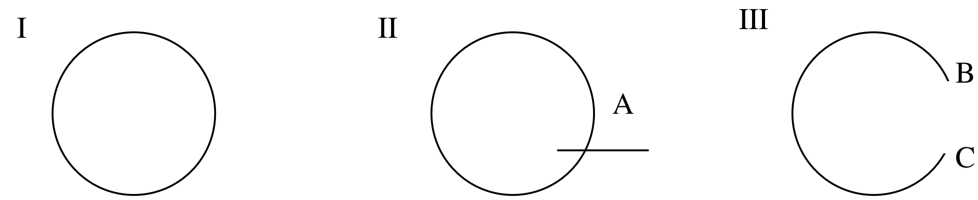
Peirce reconoce como una buena aproximación de la noción de **continuidad** la idea kantiana de que el continuo es aquello tal que toda parte es divisible[4], que expresa así: *"como aquello en que cada parte tiene ella misma partes"* **CP 6.168.** Pero de todas maneas para Peirce, Kant confunde la continuidad con la infinita divisibilidad, ya que su definición permitiría decir que el conjunto de pedazos de medidas racionales es un continuo. De todas maneras, Peirce nota que *"la definición real de Kant implica que una línea continua no contiene puntos"* **CP 6.168.** Es más, esta definición de continuidad excluye la posibilidad de encontrar una definición del **continuo** como un conjunto**.** Ya que toda pretensión de definirlo como una colección de individuos, presupondría tomar estos individuos como indivisibles y se estaría contradiciendo la definición (cada punto sería una parte del continuo que ella misma no tendría partes). Por lo tanto, en principio, le estaría negado a la teoría de conjuntos "atrapar el **continuo**".

Queda entonces pensar cómo se puede relacionar el conjunto de los *reales* con el **continuo**. Y en últimas, la pregunta de fondo es: ¿Si los puntos no constituyen el continuo, entonces qué son? La respuesta ya estaba en Aristóteles, que había defendido que "*una línea no está hecha de puntos* (Física IV 8. 215b19)", y según se dice en [Ketner, Putnam p.40]: "*para él los puntos no pertenecen a las líneas, aunque tienen su lugar en ellas; esto es, los puntos son divisiones de las líneas.*" A mi suele gustarme más la expresión dada por Kant "*puntos e instantes no son más que límites, esto es, posiciones que limitan el espacio y el tiempo*". Los *reales* no son más que límites. Los problemas surgen al considerarlos constituyentes del continuo, partes del continuo. "Peirce mantenía que tomar el continuo analítico como un modelo de la realidad nos lleva a paradojas análogas y tan perniciosas como las de Zenón, aunque de un nivel de sofisticación matemática diferente." [Parker, p.86] Uno de los lugares donde más dificultades ha tenido que enfrentar el modelo analítico del continuo es precisamente en la teoría de la medida. Ahí se encuentra con que toca definir unas partes "medibles" (sigma-álgebra) y que las que tienen medida distinta de cero son a la vez una unión de partes de medida cero (los puntos). Uno de los resultados indeseables que se obtienen es que existen subconjuntos no medibles de los reales (¿qué puede ser una parte de algo material que no sea medible?). La paradoja más enigmática es la de Hausdorff / Banach-Tarski que dice que se puede partir una esfera en finitos pedazos para reorganizarlos y obtener dos esferas del mismo tamaño que la original. Hasta ahora siempre se le ha echado la culpa de este "indeseable" resultado al axioma de elección, ¿no tendrá parte de culpa tomar el conjunto de los *reales* como modelo del continuo?

---

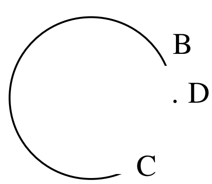
[4] "La propiedad de las magnitudes en virtud de la cual ninguna parte suya es la más pequeña posible (o parte simple) se llama continuidad de estas magnitudes" [Kant, B211].

Para ver como reflexionaba Peirce acerca de los puntos miremos un ejemplo que da en [RLT, p.159][5]



En el primer círculo aún no se define ningún punto. Al hacer una marca tenemos un punto, que llamamos A. Si rompemos el círculo, tenemos dos puntos en el lugar que había un punto. Si consideramos que el punto es parte del circulo, estaríamos tentados a pensar que el punto se parte en dos. Peirce dice: *se convierte en dos puntos*. Yo creo que esta forma de hablar tiende a confundirnos. Simplemente en el dibujo II hay un solo límite, hay un punto. En el otro dibujo tenemos dos límites, dos puntos. Pero no son el mismo que se divide, porque él no era parte del circulo. Es más, en el dibujo II podemos identificar dos caminos para llegar a A, por arriba y por abajo, el punto es el límite de los caminos. En el dibujo III los caminos tienen límites distintos, esos límites son puntos distintos y no nos confundimos. Si por el contrario, pensamos que el punto es parte del circulo tenemos sólo dos salidas: la de Peirce, que consiste en pensar que el punto se parte en dos puntos, o la del análisis, que obligaría al punto a quedar o bien arriba o bien abajo (es decir o bien A=B o A=C y no ambas). Esto fuerza una asimetría profundamente desagradable, ya que intuitivamente la parte de arriba sería igual a la de abajo, pero la construcción analítica forzaría que sean distintas, tan distintas que incluso tendríamos que decir que en una parte si hay punto en el límite y en la otra no.

Pero no siendo suficientemente extraña la idea de Peirce de que el punto se divide en dos (el indivisible se divide), nos presenta un ejemplo más intrigante:



En este caso tenemos que B se explota y sacamos D, un punto aislado. Y este punto podemos explotarlo tanto como queramos (sacar de él todos los puntos que queramos). Así sin más, creo que la posición de Peirce es contradictoria. Tendríamos que es posible tener dos puntos en el mismo lugar (que contradice la idea aristotélica de que el punto no es distinto del lugar que ocupa) o que un punto **es** dos puntos. Sin embargo se puede encontrar la forma de rescatarla, o

[5] Para la presentación de las ideas de Peirce dentro del contexto general de la discusión acerca del continuo tengo mis deudas con el estudio que hacen de él Putnam y Ketner, si bien en varios puntos tomo independencia de su interpretación.

por lo menos de sacarle mucho provecho, y el camino propuesto es reconsiderar los infinitesimales, que sin duda Peirce tenía en mente cuando daba estos ejemplos.

los infinitesimales

Una longitud infinitesimal es aquella que es menor que toda longitud real pero mayor que cero. Una extensión inextensa. ¿Qué sentido puede tener esto? preguntaba a Berkeley a los científicos de su época. Pero fue precisamente a partir de los infinitesimales que se desarrolló el cálculo diferencial que resolvía una cantidad de antiguos problemas y soportaba la nueva teoría del movimiento que empezaba a dar frutos. Leibniz mantuvo en muchos momentos una posición pragmática, es decir, que los infinitesimales eran ficciones útiles para calcular (la corrección de los resultados obtenidos abogaban por ellos) [Edwards, p.264]. Hoy en día, con el desarrollo del análisis no-estándar y la formalización de los infinitesimales, los matemáticos sienten que han refutado a Berkeley y han demostrado que la noción de infinitesimal si tenía sentido. Por lo pronto han demostrado que era consistente (una teoría inconsistente no puede tener modelos). Sin embargo no dejan de ser intrigantes esas extensiones inextensas, ¿en donde se extienden si no es en el espacio donde lo hacen?

Para intentar dar una respuesta a esta pregunta voy a exponer algunas de las ideas de la propuesta metafísica de Leibniz, la monadología. Después voy a presentar la construcción moderna de los infinitesimales, y espero que se pueda ver como esta (a pesar del aparataje lógico que suele esconderlo) realiza muchas de sus intuiciones.

> La mónada es una substancia simple (...), es decir, sin partes.
> Las mónadas no tienen ventanas por donde algo pueda entrar o salir.
> Es incluso necesario que cada mónada sea diferente de cualquiera otra.
> ... sea un espejo vivo y perpetuo del universo.
> ... que hace que toda substancia exprese exactamente todas las demás por medio de las relaciones que tiene con ellas.
> **Monadología**
>
> Pues la simplicidad de la substancia no impide la multiplicidad de las modificaciones que deben encontrarse juntas en la misma substancia simple, modificaciones que deben consistir en la variedad de relaciones con las cosas externas. Es como un centro o punto que por muy simple que sea, se encuentra una infinidad de ángulos formados por las líneas que concurren en él.
> ... cada mónada es un espejo viviente o dotado de acción interna, que representa al universo, según su punto de vista, y tan regulado como el universo mismo.
> **Principios de la naturaleza y de la gracia fundados en la razón**

Los puntos son todos iguales. Las mónadas son todas diferentes. Al pensar en el punto como constituyente nos olvidamos de que es una situación, un límite, y lo pensamos como si fuera un grano que podemos mover de aquí para allá, y sigue siendo el mismo. Las mónadas son puntos de vista del universo, si nos movemos, cambiamos el punto de vista. Los puntos al ser constitutivos, son primarios, son primeros. Las mónadas son a partir de su relación con el todo, no son ni antes ni después del todo. La mónada es el punto, pero no pensado como grano del que está hecho el universo, sino como reflejo del mismo. La mónada no tiene partes materiales, vista desde fuera es simple. Pero desde dentro es tan rica como el universo mismo, se extiende en miradas del universo (rayos que todos juntos componen el reflejo). Las mónadas no tienen ventanas (una mirada de una mónada no es accesible a ninguna otra). La mónada es el punto recordándonos que es límite. La extensión de la mónada no es material (no se da en el espacio de las cosas), su extensión es en miradas (es en el espacio de lo que ve, lo que refleja).

Ahora vamos a describir una construcción de los *reales no-estándar*. Primero expliquemos el concepto de no-estándar y como surge la idea dentro de la teoría de modelos. El sistema lógico que se ha adoptado como el “privilegiado” es la lógica clásica de primer orden. La teoría de modelos clásica se encarga de la relación entre las teorías expresables en primer orden y sus modelos (construcciones conjuntísticas que satisfacen los axiomas). Uno de los primeros resultados sorprendentes es que la teoría de números expresable en primer orden tiene muchos modelos, uno de ellos es el de toda la vida y es el que llamamos estándar, a todos los demás los llamamos no-estándar. Dentro de la teoría de modelos se desarrollan herramientas para que a partir de un modelo de una teoría, se construyan modelos distintos de la misma teoría. Lo que llamamos *la teoría de los reales* son todas las propiedades expresables en primer orden de los reales (como los construyó Weierstrass). Resulta que esta teoría tiene muchos modelos distintos del clásico (el modelo estándar) y el análisis no-estándar se encarga de estudiarlos. Vamos a ver la construcción que mejor realiza las ideas de Leibniz.

Antes de empezar recordemos que los *reales* los construimos identificando todas las series de racionales que convergían a un mismo lugar y desechando las que no convergían a ninguna parte. Ahora vamos a considerar las series de números reales y vamos a identificar las series que son iguales en *la mayoría* de posiciones. Para esto tenemos que escoger una medida que nos permita decidir cuantas posiciones de una serie enumerable son muchas posiciones. Esto es problemático, ya que dada una cantidad de posiciones si son la mayoría, las restantes deben ser la minoría. Pero si miramos las posiciones pares y las impares (son tantas las unas como las otras) tenemos que decidirnos por uno de los dos. Nuestra medida en este caso es una función que dado un conjunto de posiciones diga si es grande o no (si son o no la mayoría). Si se acepta el axioma de elección (que es el que aparece siempre que hay elecciones arbitrarias de por medio) tenemos que existen montones de medidas y por lo tanto montones de modelos no-estándar que se construyen de este modo.

Ahora sí, construyámoslos: primero tenemos que definir la relación de equivalencia: dos sucesiones de *reales* son equivalentes si la medida del conjunto de posiciones en que son iguales es grande. Un *real no-estándar* es una clase de equivalencia bajo esta relación. A cada *real* le corresponde un *real no-estándar* (su representante en el mundo no-estándar) y es la clase de equivalencia de la serie que tiene en todas las posiciones el *real* original (por ejemplo al 0 le corresponde la clase del (0, 0, 0, 0, ...)). Que sea su representante quiere decir que cumple las mismas propiedades con respecto a los demás *reales estándar*. El conjunto de los *infinitesimales* es el de los *reales no-estándar* que son menores que todo representante de un real. La *mónada* de un número a, es el conjunto de los x que están a una distancia *infinitesimal*. Hay una forma de construir los *reales no-estándar* (es decir existe una medida) tal que todo infinitesimal sea la clase de una sucesión que tiende a cero (y los demás elementos de la clase serían sucesiones casi-iguales a esa).

Por lo tanto la *mónada* del cero sería el conjunto de las formas de llegar al cero (de las sucesiones que llegan a cero, donde se están identificando las que son muy parecidas). Podemos considerar el continuo como el conjunto de las mónadas de reales no-estándar y nos aproximamos a realizar la intuición leibniciana. Sin embargo tiene aún un pequeño problema, y es que la *mónada* estaría compuesta de indivisibles, y no sería un reflejo perfecto del continuo, ese sí compuesto de mónadas. Y el continuo no-estándar estaría en últimas compuesto de estos indivisibles y por lo tanto tendría el mismo problema que hemos encontrado en todos los modelos analíticos del continuo. Ahora quisiera exponer una intuición con la que se guían algunos los que trabajan con análisis no-estándar que a mi gusto es muy esclarecedora y rica en desarrollos. Los infinitesimales aparecen al mirar el continuo con una lupa más fina que la que nos dio los reales. La vieja lupa identificó ciertas formas de aproximarse al punto (no vio ciertas diferencias). Esta nueva lupa distingue formas distintas de aproximarse al punto (sin embargo sigue identificando algunas). Esta idea invita a pensar que el proceso se puede seguir repitiendo, se pueden hallar nuevas lupas que dan origen a nuevas estructuras. Una mónada consiste en la clase de los que son indiscernibles para una cierta lupa, para una cierta mirada[6]. Lo que es un punto para una mirada, son una cantidad de puntos para otra. Lo que confunde es llamarlos a todos puntos, porque son cosas distintas, deberíamos llamar puntos_1 a los que lo son bajo la primera lupa, puntos_2 a los de la segunda, etc. Entonces no diríamos con Peirce que el punto se explota en infinitos puntos, más bien que el punto se explota en infinitesimales, o que el punto_1 se explota en infinitos puntos_2 y estos a su vez explotan... lo que siempre nos lleva a confusiones es pensar que existen unos puntos últimos, que en últimas componen todos los demás.

[6] Aquí conecto la idea de la lupa con la idea de la mónada como conjunto de indiscernibles para un cierto contexto que presentaba al comienzo del texto.

Yo tengo problemas con respecto a la posición de Peirce frente a los infinitesimales. La mayoría de los intérpretes lo tienen como un defensor de estas cantidades que son menores que cualquier número positivo, pero mayores que cero. Es interesante notar que uno de los matemáticos más importantes del siglo pasado en Estados Unidos y defensor de estas cantidades era Benjamin Peirce, el padre de Charles [Parker, p.23]. Una de las críticas que se le hacen a trabajar sin infinitesimales es que hacen el cálculo más enredado, menos intuitivo. Peirce parece mantener una posición similar: "Como matemático, prefiero el método de los infinitesimales al de los límites, como mucho más sencillo y menos infestado de molestias"[LM]. Sin embargo mi experiencia con el análisis no estándar me dejó ver que era tan enredado como el otro. La dificultad no me pareció que fuera esencial a ninguna de las dos aproximaciones al cálculo. Los alumnos no parecen tener problemas con las intuiciones de límite o de infinitesimal sino con sus formalizaciones y con las demostraciones rigurosas. Pero Peirce no hace sólo una defensa sobre la utilidad práctica de los infinitesimales, sino que también hace una defensa metafísica.

El texto en el que nos encontramos la referencia más extensa y más citada acerca de los infinitesimales es La Ley de la Mente, donde plantea que las ideas tienen una duración infinitesimal, ya que no pueden extenderse en el tiempo, pero tampoco pueden ser instatáneas… sin embargo en un texto posterior afirma lo siguiente:

> "Creo que debo hacer correcciones para mi pifiado tratamiento de continuo en el texto titulado La Ley de la Mente, redefiniéndolo aquí después de un largo y atento estudio de la cuestión. Lo que es continuo tiene *partes materiales*." **CP 6.174**

el cardinal del continuo

Peirce mantiene una posición que es complicada y aparentemente contradictoria: el continuo es una multitud, pero es distinto que cualquier colección de individuos, no importa cuan grande [Parker, p.80]. Por lo tanto el cardinal del **continuo** debe ser mayor que el cardinal de cualquier colección de individuos distintos. La pregunta que se hace Peirce por el cardinal del **continuo** nos hace recordar la que hemos llamado *la hipótesis del continuo*, pero las preguntas son muy distintas (y en algunos lados las asimilan) y yo quiero establecer claramente las distinciones. Tanto Cantor como Peirce están de acuerdo que el cardinal de los *reales* es $2^{\aleph_0}$. Cantor lo que se está preguntando es si existen cardinales entre $\aleph_0$ y $2^{\aleph_0}$, Peirce parece estar convencido de que la *hipótesis del continuo* (HC) es verdadera, incluso parece abogar por la *hipótesis generalizada del continuo* (HGC), es decir, que para todo cardinal α el siguiente (α^+) es 2^α,

> "Hay una serie sin fin de multitudes ab-numerables, cada una relacionada con la siguiente como M está relacionado con 2^M, donde podemos poner cualquier otra cantidad en lugar de 2 (HGC). La menor de esas multitudes ab-numerables es 2^N donde N es la potencia de los números enteros (HC). Es imposible que pueda haber una colección de individuos distintos de mayor multitud que todas estas multitudes abnumerables (*)." [RLT, p.247]

Esta tercera hipótesis (*) y el aparente desconocimiento de la polémica acerca de la *hipótesis del continuo* parecen señalar un cierto desconocimiento del desarrollo de la teoría de conjuntos a partir de los primeros planteamientos de Cantor. Peirce parece pensar que todos los cardinales se pueden lograr iterando la operación partes. El afirma que el límite de esas multitudes no puede a su vez ser una multitud de individuos distinguibles. Desde el punto de vista de la teoría de conjuntos tal opinión parece estar errada ya que la unión de todos esos conjuntos es a su vez un conjunto y tiene un cardinal que no es 2^M, para ningún M, se trata precisamente un cardinal límite, en los que Peirce no parece haber pensado. Se podría creer que Peirce estaría proponiendo que el cardinal del verdadero **continuo** es tal cardinal límite, pero decir que Peirce admitiría esto lo contradice de base, admitir que el **continuo** tiene un cardinal implica admitir que el **continuo** es un conjunto, es decir, una multitud de individuos distinguibles. Y más encima, si es un conjunto le podríamos aplicar la operación partes y tendríamos un conjunto con un cardinal mayor.

Yo voy a proponer otra lectura de la hipótesis (*) que no sólo lo deja mucho mejor parado, sino que es rica en interpretaciones que darían lugar a nuevas construcciones. Peirce está pensando que esas multitudes ab-numerables que él construye son TODAS las multitudes, y el límite sería la multitud mayor que todas las multitudes de individuos distinguibles, que no podría ser como todas ellas; aquí parece estar avizorando la paradoja de Russel en la que caeríamos si consideráramos que la colección de todos los conjuntos es ella misma un conjunto.

> "Cuando digo que la serie de multitudes ab-numerables no tiene límite, quiero decir que no tiene límite entre las multitudes de individuos distintos, es más, que toda multitud de individuos distintos. Pero, preguntan, ¿puede esto tener sentido? Yo respondo que si puede, en la siguiente manera: lo que es posible es hasta ahora *general*, y como general deja de ser individual. Por lo tanto, recordando que la palabra "potencial" quiere decir indeterminado, aunque posiblemente capaz de determinación en cualquier caso especial. " [RLT, p.247]

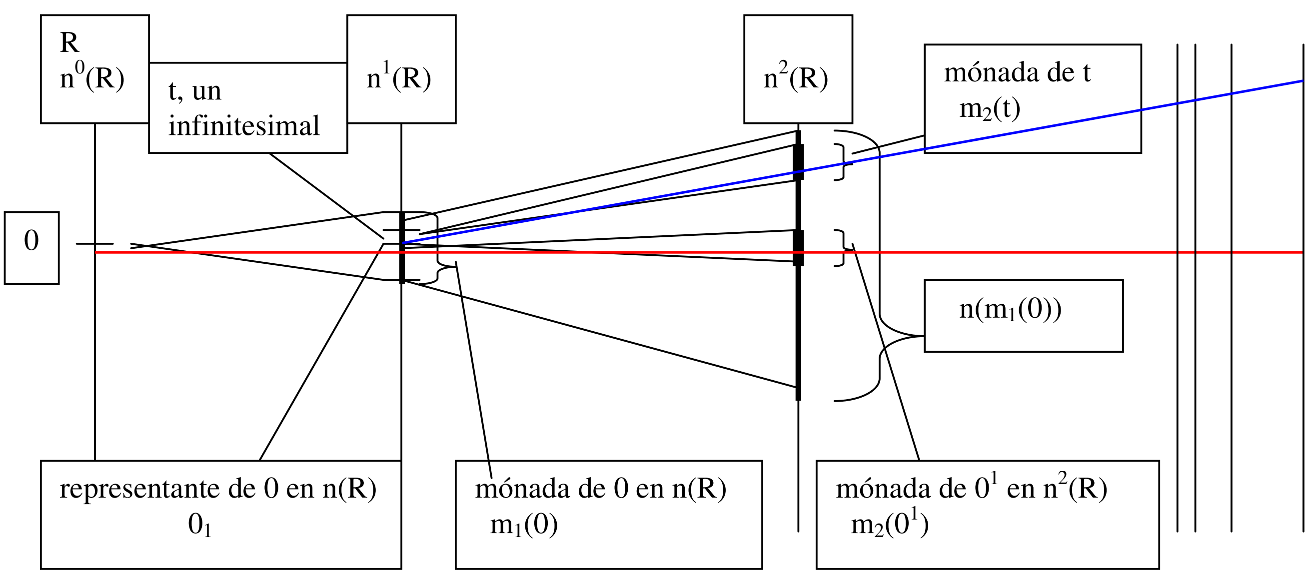
Veamos como intenta explicar lo que entiende por *potencial* en [RLT, p.248]. Comienza usando como ejemplo los números enteros. El concepto de la colección de todos los números enteros es general, vago, potencial, habla de lo que puede ser un número entero. Cada número entero es accesible, se puede llegar hasta él contando, es particular, determinado. Todos los números enteros no pueden ser contados. Es posible llegar hasta cada uno de ellos, pero no se puede abarcar la totalidad, que como tal es un conjunto de posibilidades. Uno tiende a confundirse y preguntar ¿Se trata entonces de un continuo? Peirce resuelve el problema distinguiendo potencialidades, en este caso cada número es distinguible individualmente (hay una cualidad para cada uno), mientras en el continuo:

> “no puede haber una cualidad distinta para cada individuo; porque estas cualidades formarían una colección demasiado multitudinaria para que cada una se mantenga distinta. Debe ser por lo tanto por medio de relaciones que los individuos son distinguibles unos de otros” [RLT, p.148]

Hasta ahora hemos venido hablando del continuo lineal, Peirce al hablar del continuo como la multitud mayor que todas las multitudes, parece estar pensando en algo mucho más general, algo como la clase de todos los conjuntos, el TODO, el SER. Parece estar abogando por una teoría del continuo que ya no parta del punto, del indivisible, de lo mínimo para construir lo demás como colecciones de estos individuos, sino por una teoría que parta de lo máximo y que las determinaciones se constituyan dentro de ese TODO a partir de sus relaciones. El continuo lineal (y los distintos continuos) serían determinaciones de ese todo que reflejarían esa “riqueza infinita”. Si bien se han desarrollado teorías matemáticas que brindan herramientas para realizar estas ideas, lo que yo pretendo ahora es mostrar como muchas de ellas pueden también ser realizadas dentro del marco que brinda la teoría de conjuntos y la teoría de modelos clásica.

*un “**verdadero continuo**” dentro de la teoría de conjuntos*

Ya vimos una forma de construir un modelo no-estándar a partir del modelo clásico de los *reales* $\Re$, llamemos a este modelo n($\Re$). Dada una estructura E, llamemos al resultado de aplicarle la misma construcción n(E), la nueva estructura sería el resultado de mirar E con una lupa más potente. Un detalle clave es que cada elemento de la estructura original E, tiene un representante en la nueva estructura que se comporta de la misma manera. Podemos por lo tanto iterar la construcción (así como Peirce itera la operación de partes) a partir de $\Re$, obteniendo n($\Re$), n(n($\Re$)), que sería ($n^2(\Re)$), y generalizando $n^m(\Re)$, que sería el resultado de iterar m veces la operación, obtendríamos algo como lo siguiente:



Ahora consideremos el *Continuo* como la estructura total resultante, donde todo punto en una estructura sería suceptible de ser 'explotado' por la lupa siguiente. Cada una de las estructuras sería una representación del continuo (una mirada cada vez más incisiva). Vemos como la mónada de 0 en la segunda estructura es también suceptible de ser 'explotada infinitamente' y, por lo tanto, estrucuturalmente se comporta de la misma manera que el conjunto original $\mathfrak{R}$. Si consideramos la *Mónada* de 0 como le conjunto de todas las sucesivas explosiones (el conjunto de iterar la operación n infinitas veces), entonces vemos como la *Mónada* resulta un reflejo del *Continuo*.

Pero, así como el límite de la serie de cardinales que resultaba de iterar la operación partes era actualizable en una conjunto (la unión), existe la manera de actualizar la serie enumerable de estructuras no estándar que acabamos de proponer. La estrategia es de *pegamiento*[7] y consiste en considerar como individuos de la *estructura total* a los rayos que parten de algún objeto de una estructura y tocan todas las estructuras siguientes, de manera que si pasan por x que pertenece a una estructura E, el elemento de la estructura siguiente que toque tiene que pertenecer a la mónada de x. Ahora podríamos reconstruir todas las estructuras de nuestro *Continuo* como uniones de estos rayos, por ejemplo, el O de la primera estructura ($\mathfrak{R}$), sería la unión de todos los rayos que arrancan de él. De manera que nuestro *Continuo* podría ser visto como un conjunto de individuos distinguibles, que era lo que no queríamos. Pero hay una salida a este problema, que consistiría en seguir iterando *sin fin* estas dos operaciones. Cada estructura la explotamos con la operación n y en los límites actualizamos con un pegamiento. De esta manera los *individuos totales* no podrían ser nunca actualizados.

[7] un individuo total sería una función f que tiene como dominio una cola de N (el conjunto de los números mayores que un número fijo) y a cada natural a le asigna un elemento de $n^a(R)$, de manera que f(a+1) pertenece a la mónada de f(a). Este tipo de estructuras variables y la estrategia de pegamiento son una aplicación la teoría de haces desarrollada por Xavier Caicedo Ferrer.

Bibliografía.

Charles Sanders Peirce,

[RLT] *Reasoning an the Logic of Things*, Harvard UP, London, 1992

[CP] *Collected Papers*, Harvard U.P. 1931-1958, Ed. Electrónica, Intelex Corp. 1992

[EP] *The Essential Peirce*, V1, Indiana UP, USA, 1992

[LM] "The Law of Mind (1892)" en [EP].

Edwards, C. H. *The Historical Development of Calculus*, Springer-Verlag, New York, 1982.

Ketner, K.L. & Putnam, Hillary "The Consecuences of Mathematics" introducción a [RLT].

Leibniz, G.W. *Tres Textos Metafísicos*, tr. R. Sierra, Norma, Bogotá, 1996.

Kant, I. *Crítica de la Razón Pura*, tr. P. Ribas, Alfaguara, México, 1994

Parker, K. *The Continuity of Peirce's Thought*, Vanderbilt UP, USA, 1998.

Zalamea, F. "El Cálculo Infinitesimal y los Cálculos Lógicos, en Leibniz, como Especificaciones de la Característica Universal", Universidad Nacional, Bogotá, 1998.