

# La lógica triádica de Charles S. Peirce\*

Arnold Oostra<sup>†</sup>

## Resumen

En este trabajo se presenta el aporte de Charles S. Peirce a la lógica proposicional trivalente y el estudio, iniciado a partir de sus manuscritos, de la simetría en esa lógica.

Entre muchas otras contribuciones y anticipos, en los manuscritos de C. S. Peirce se encuentran los primeros conectivos proposicionales trivalentes conocidos. Los apuntes de Peirce además sugieren interesantes simetrías, descubiertas por los primeros investigadores y cuya generalización puede conducir en un futuro al análisis exhaustivo de la simetría en la lógica proposicional trivalente.

En la primera sección de este trabajo se exponen con exactitud los aportes de Peirce a la lógica proposicional trivalente y se establece una comparación con los trabajos posteriores de Łukasiewicz y Post, reconocidos usualmente como los pioneros en esta lógica. En la segunda sección se revisa la simetría existente en el sistema de los conectivos proposicionales bivalentes, simetría sugerida por una notación propuesta por el mismo Peirce. En la tercera y última sección se discuten los estudios adelantados posteriormente sobre la simetría en los conectivos trivalentes anotados por Peirce, estudios que en principio podrían extrapolarse al sistema completo de estos conectivos.

---

\*Publicado en las Memorias del XVIII Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones, Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, junio 2007.

<sup>†</sup>Departamento de Matemáticas y Estadística, Universidad del Tolima.

# 1 Lógicas trivalentes

La lógica matemática clásica o tradicional es *bivalente* en tanto sus proposiciones pueden tomar solo dos valores de verdad, verdadero o falso. Una generalización sencilla y natural, realizada desde comienzos del siglo XX, da lugar a la lógica *trivalente* que admite tres valores de verdad. Por supuesto, esto abre una ventana al mundo fascinante de las lógicas multivalentes, lo cual en el vocabulario matemático significa “lógicas con más de dos valores de verdad”.

## 1.1 Las propuestas de Łukasiewicz y Post

La lógica proposicional clásica conoce diversas presentaciones. Una versión *sintáctica* consiste en una formalización de las llamadas reglas de inferencia y se construye de manera recurrente a partir de axiomas y una regla —*modus ponens*—. Esta presentación corresponde propiamente a la lógica formal, también existe una versión más algebraica o *semántica*. La presentación semántica consiste en asignar valores de verdad a las proposiciones y extender esta asignación a las fórmulas, buscando luego aquellas que son verdaderas para cualquier asignación. Lo que podría considerarse como el teorema fundamental de la lógica proposicional establece la equivalencia de estas dos presentaciones: los teoremas formales sintácticos son precisamente las tautologías semánticas, más aún, una fórmula se deduce formalmente de ciertas premisas si y solo si es consecuencia tautológica de las mismas. Una exposición detallada de estas dos construcciones y de su equivalencia puede encontrarse en [Caicedo 1990]. Vale la pena mencionar que existen muchas otras presentaciones de la lógica proposicional, como los gráficos existenciales alfa de C. S. Peirce que constituyen una auténtica versión *gráfica* de esta lógica [Roberts 1973, Zeman 1964, Zalamea 1997].

En la presentación semántica de la lógica proposicional clásica se consideran solo dos valores de verdad, designados mediante las letras  $V$  y  $F$  o

mediante los números 1 y 0. En esta versión los conectivos fundamentales, a partir de los cuales se construyen todas las fórmulas, están definidos por las siguientes matrices o tablas.

	$\neg$	$\wedge$	$V$	$F$	$\vee$	$V$	$F$	$\rightarrow$	$V$	$F$	$\leftrightarrow$	$V$	$F$
$V$	$F$	$V$	$V$	$F$	$V$	$V$	$V$	$V$	$V$	$F$	$V$	$V$	$F$
$F$	$V$	$F$	$F$	$F$	$F$	$V$	$F$	$F$	$V$	$V$	$F$	$F$	$V$

Ya en 1902 Charles Peirce observó que la lógica bivalente constituye apenas “la hipótesis más simple” [Peirce 1931, §4.250]. Para muchas situaciones, tanto cotidianas como técnicas, es preciso considerar más valores de verdad e incluso infinitos de tales valores. Por supuesto, el primer paso en esa dirección consiste en estudiar lógicas con *tres* valores de verdad. Es apenas obvio que estas lógicas, para ser consideradas como tales, deben conocer también una presentación sintáctica formal. Sin embargo en este trabajo la exposición se limita a la presentación puramente semántica de algunas de tales lógicas.

### Lukasiewicz

Los historiadores de la matemática consideran que la primera lógica trivalente fue publicada en 1920 por Jan Łukasiewicz (1878–1956), distinguido integrante de la Escuela Polaca de entreguerra [Łukasiewicz 1920]. En su versión semántica, los siguientes son los conectivos fundamentales escogidos por Łukasiewicz.

	$\neg$	$\wedge$	1	$\frac{1}{2}$	0	$\vee$	1	$\frac{1}{2}$	0	$\rightarrow$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	0	1	1	$\frac{1}{2}$	0	1	1	1	1	1	1	$\frac{1}{2}$	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	1	$\frac{1}{2}$
0	1	0	0	0	0	0	1	$\frac{1}{2}$	0	0	1	1	1

En primer lugar se observa que estos conectivos generalizan los de la lógica bivalente, en el sentido de que si en sus tablas se eliminan las filas y columnas centrales entonces resultan precisamente las tablas de la lógica proposicional clásica. Por otro lado, se nota que los conectivos  $\wedge$  (conjunción) y  $\vee$  (disyunción) corresponden al mínimo y máximo respectivamente, considerando los valores de verdad ordenados de manera natural como  $0 < \frac{1}{2} < 1$ .

El cálculo siguiente muestra con claridad que, como podría esperarse, en esta lógica no es válido el llamado “principio del tercio excluso”.

$x$	$\neg x$	$x \vee \neg x$
1	0	1
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
0	1	1

Igual que en la clásica, en la lógica trivalente de Łukasiewicz pueden definirse otros conectivos en términos de los básicos. Por ejemplo, en todas las lógicas donde hay conjunción e implicación suele definirse la equivalencia como  $x \leftrightarrow y = (x \rightarrow y) \wedge (y \rightarrow x)$  y en este caso su tabla es la siguiente.

$\leftrightarrow$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	$\frac{1}{2}$	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$
0	0	$\frac{1}{2}$	1

## MV-álgebras

En la lógica trivalente de Łukasiewicz, la negación puede expresarse algebraicamente como  $\neg x = 1 - x$  mientras la implicación puede definirse como  $x \rightarrow y = \min(1, 1 - x + y)$ . Esta observación permite definir de manera

análoga lógicas con  $n$  valores de verdad distribuidos uniformemente en el intervalo  $[0, 1]$  e incluso lógicas con infinitos valores. Estas ideas dieron lugar a la teoría de las *MV-álgebras*, este nombre seguramente proviene del inglés “multiple-valued algebras” (véanse [Cignoli, D’Ottaviano e Mundici 1994, Cignoli, D’Ottaviano and Mundici 2000, Oostra 2004a, Oostra 2005b]). En realidad, las MV-álgebras guardan con la lógica de Łukasiewicz una relación similar a la que tienen las álgebras booleanas con la lógica proposicional clásica.

Los conectivos siguientes son comunes en la teoría de las MV-álgebras, aquí se presentan solo para el caso particular del álgebra  $\{0, \frac{1}{2}, 1\}$ .

$\oplus$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	1	1
$\frac{1}{2}$	1	1	$\frac{1}{2}$
0	1	$\frac{1}{2}$	0

$\odot$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	$\frac{1}{2}$	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0
0	0	0	0

$*$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	0	$\frac{1}{2}$	1
$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$
0	0	0	0

El conectivo  $\oplus$  es la suma truncada, definida como  $x \oplus y = \min(1, x + y)$ . Nótese que los conectivos  $\oplus$  y  $\rightarrow$  tienen cierta dualidad pues  $x \oplus y = \neg x \rightarrow y$  y, en el otro sentido,  $x \rightarrow y = \neg x \oplus y$ . Por su parte los conectivos  $\odot$  y  $\oplus$  también son duales aunque en un sentido diferente, aquí  $x \odot y = \neg(\neg x \oplus \neg y)$  y  $x \oplus y = \neg(\neg x \odot \neg y)$ . Esta relación podría llamarse “dualidad tipo De Morgan” pues es la misma que existe entre los conectivos clásicos  $\wedge$ ,  $\vee$ .

El conectivo  $*$  se denota así en la teoría de las *BCK-álgebras*, donde juega un papel importante, mientras en las MV-álgebras se suele denotar  $\ominus$ . Presenta una dualidad con  $\odot$  similar a la de  $\oplus$  con  $\rightarrow$ , pues  $x * y = x \odot \neg y$  y, por supuesto,  $x \odot y = x * \neg y$ .

Vale la pena destacar aquí que las dualidades mencionadas se observan con nitidez en la tablas que definen los conectivos. Por ejemplo, las tablas de  $\rightarrow$  y  $\oplus$  se obtienen la una de la otra por reflexión en el eje horizontal mientras las tablas de  $\odot$  y  $*$  se obtienen la una de la otra por reflexión en el eje vertical.

A su vez, las tablas de  $\oplus$  y  $\odot$  se obtienen la una de la otra por reflexión en la diagonal ascendente seguida por “complementación” (aplicación de  $\neg$  a todas las entradas). Lo mismo sucede con las tablas de  $\rightarrow$  y  $*$  pero, al ser estas tablas simétricas en la diagonal ascendente, el “movimiento” se reduce a la complementación.

Una conclusión irremediable de todas estas dualidades —vistas de manera algebraica o geométrica— es que, teniendo la negación, cualquiera de los cuatro conectivos  $\rightarrow, \oplus, \odot, *$  es suficiente para generar los otros tres.

## Post

En la misma época de Łukasiewicz pero de manera independiente el matemático norteamericano de origen polaco Emil Post (1897–1954) propuso otra lógica trivalente. En realidad en el significativo artículo [Post 1921] el autor introduce una lógica con  $m$  valores de verdad para cualquier entero  $m \geq 2$ . Los conectivos fundamentales escogidos por Post, particularizados a  $m = 3$ , son los siguientes.

	$\sim$
1	$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}$	0
0	1

$\vee$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	1	1
$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
0	1	$\frac{1}{2}$	0

El conectivo  $\vee$  es la misma disyunción definida por Łukasiewicz pero la negación es diferente, de hecho se observa que el conectivo  $\sim$  de Post es cíclico. En esta lógica tampoco vale el principio del tercio excluso, como se observa en la tabla siguiente.

$x$	$\sim x$	$x \vee \sim x$
1	$\frac{1}{2}$	1
$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
0	1	1

En su brillante artículo, entre otros resultados importantes Post demostró que todos los conectivos de cualquier lógica trivalente pueden expresarse como combinación de estos dos conectivos.

## 1.2 El Adelantado Charles S. Peirce

Al revisar la historia del origen de las lógicas multivalentes no debería pasarse por alto mencionar a C. S. Peirce.

Charles S. Peirce (1839–1914) fue un científico y filósofo norteamericano. Considerado el fundador del pragmatismo y el padre de la semiótica moderna, su pensamiento ha disfrutado interés creciente en las últimas décadas. Cada vez más se reconoce la influencia de Peirce en la lógica, en la metodología de la investigación y en la filosofía de la ciencia. Fue un auténtico polígrafo que escribió ampliamente sobre muy diversos temas científicos y filosóficos. Su obra se caracteriza por una gran coherencia pues cada trabajo particular está inspirado en principios muy generales.

Aunque trabajó durante mucho tiempo como geodesta en el *U. S. Coast Survey*, por diferentes razones Peirce nunca tuvo una posición académica estable lo cual contribuyó a que sus abundantes escritos permanecieran mayormente inéditos. En los años 30 la Universidad de Harvard publicó una primera colección de sus escritos [Peirce 1931]; luego Carolyn Eisele editó una selección de sus trabajos matemáticos [Peirce 1976]; desde los años 80 el *Peirce Edition Project* prepara una edición cronológica y cuidadosa de los escritos peirceanos [Peirce 1982].

Los trabajos científicos de Peirce y en especial sus escritos matemáticos

pueden clasificarse en tres categorías. En primer lugar están sus *aportes*, esto es, ideas e investigaciones que ingresaron directamente al corpus científico como la lógica de los relativos y la teoría de la cuantificación [Brady 2000, Oostra 2006, Zalamea 1993]. Otro grupo de trabajos podría denominarse las *latencias* de Peirce, pues son ideas que aún no han sido estudiadas a fondo ni han sido propuestas por otros científicos. Algunos ejemplos importantes son la notación para los conectivos binarios [Clark 1997, García y Gómez 2002, García, Gómez y Oostra 2002, Oostra 2003a, Oostra 2004b], los ya mencionados gráficos existenciales y la noción general del continuo [Zalamea 2001, Zalamea 2003]. En tercer lugar cabe destacar un sinnúmero de *anticipos* muy inteligentes realizados por Peirce. Por ejemplo en la matemática, Peirce publicó una axiomatización de los naturales varios años antes que Dedekind y Peano [Oostra 2002, Oostra 2003b, Peirce 1881, Peirce 2003], de igual manera anticipó la axiomatización de la lógica proposicional y el estudio de los conectivos completos [Zalamea 1993]. En otros campos vale la pena mencionar que Peirce colaboró en los estudios previos al diseño de los primeros aeroplanos [Ketner 2001] y que anticipó el uso de la energía eléctrica para la construcción de máquinas calculadoras [Peirce 1982, p 5.422]. Los anticipos de Peirce no recibieron atención en su momento sino quedaron en el olvido. Años o décadas después otros científicos, trabajando de manera independiente e ignorando los escritos de Peirce, llegaron a conclusiones idénticas y sus trabajos ingresaron al corpus científico. Estos anticipos prueban de manera concluyente que Charles Peirce estaba adelantado por mucho a su tiempo. Por supuesto en estos casos no puede negarse el mérito de los otros investigadores, quienes seguro hicieron sus redescubrimientos sin conocer las ideas de Peirce y además realizaron muchos otros aportes valiosos. Sin embargo, un recuento histórico completo debería hacer referencia también a los anticipos de Peirce.

La lógica trivalente también se puede contar entre los anticipos de Peirce pues hay evidencia de que él ya había estudiado el tema, al menos desde



una perspectiva semántica, más de una década antes de los trabajos de Łukasiewicz y Post.

### 1.3 La lógica triádica de Peirce

El pensamiento general de Peirce ha sido comparado con una catedral cuyos pilares estructurales son las categorías fenomenológicas [Zalamea 2006]. En filosofía, un sistema de categorías es una lista completa de las mayores clases de géneros. Aristóteles distinguió diez categorías (sustancia, cantidad, cualidad, relación, lugar, fecha, postura, estado, acción y pasión) mientras Kant las aumentó a doce (Tres de cantidad: unidad, pluralidad, totalidad; tres de cualidad: realidad, negación, limitación; tres de relación: inherencia, causalidad, comunidad; tres de modalidad: posibilidad, existencia y necesidad). Peirce en cambio propone solo tres categorías, llamadas por él simplemente *primeridad*, *segundidad* y *terceridad*. La primeridad es la categoría del sentimiento puro y prereflexivo; la segundidad abarca la existencia actual, la confrontación y la reacción; la terceridad es la categoría de la relación, el hábito y la continuidad.

Las tres categorías permean todo el edificio filosófico de Peirce. Por ejemplo, ellas constituyen el fundamento de la noción peirceana de signo como una relación triádica [Zeman 1977]. Entre otras muchas presentaciones, en alguna ocasión Peirce definió el signo como “algo que está por algo para alguien” [Peirce 1931, §1.346 y §2.228]. Saltan a la vista tres elementos integrantes del signo, llamados por Peirce el *signo en sí* (algo), el *objeto* (que está por algo) y el *interpretante* (para alguien). Estos elementos inducen tres ramas de la semiótica como ciencia, que a su vez puede considerarse en tres dimensiones. Peirce también propuso muchas clasificaciones de los signos, siempre basadas en tricotomías, la más conocida de las cuales sin duda es la tríada *ícono–índice–símbolo*. La tres categorías también aparecen de manera iterativa en los demás armazones fundamentales del sistema arquitectónico peirceano: en la máxima pragmática, en la adjunción entre generalidad y

vaguedad y en la clasificación (¡triádica!) de las ciencias.

De manera que la filosofía general de Peirce, la Gran Lógica como la llamaba él, es un pensamiento eminentemente triádico o ternario. Entonces no resulta extraño que Peirce haya pensado en la lógica matemática con tres valores, más aún, extraño sería que no lo hubiera hecho. En efecto, en un manuscrito sin fecha aparece el siguiente ejemplo de un razonamiento en lógica triádica [Peirce 1976, p 3.742].

Por tanto, si hay solo dos valores, se tiene la inferencia

$A$  tiene un valor diferente de  $B$ ,  
 $B$  tiene un valor diferente de  $C$ ;  
 $\therefore C$  tiene el mismo valor que  $A$ .

Para un sistema de tres valores no se tiene esta inferencia pero la siguiente es válida, aunque no lo es para un sistema con más de tres valores:

$A$  tiene un valor diferente de  $B$ ,  
 $A$  tiene un valor diferente de  $C$ ,  
 $A$  tiene un valor diferente de  $D$ ;  
 $B$  tiene un valor diferente de  $C$ ,  
 $B$  tiene un valor diferente de  $D$ ;  
 $\therefore C$  tiene el mismo valor que  $D$ .

Pero hay más, mucho más. En 1966 el distinguido investigador peirceano Max Fisch y el matemático Atwell Turquette publicaron lo que aparece como evidencia concluyente de que, a principios de 1909, Peirce había extendido a la lógica trivalente el método de las tablas de verdad de la lógica clásica. Esta evidencia consiste en varios apuntes de Peirce en su Cuaderno de Lógica, un muy importante documento (aún inédito) en el que realizó multitud de anotaciones a lo largo de muchos años, apuntes que son ideas puras como los bocetos de un artista.

## Los apuntes

Las referencias a la lógica trivalente de Peirce aparecen en tres páginas del Cuaderno de Lógica, reproducidas en [Fisch and Turquette 1966]. De hecho ese artículo es una discusión más histórica que matemática de estas tres páginas.

La primera página en cuestión (página 340v del Cuaderno, en la numeración de Roberts) consiste en una serie de cálculos en “un sistema con valores  $V$ ,  $L$ ,  $F$ ”. Esta hoja contiene muchos signos de interrogación y en un margen aparece al sesgo (como añadida posteriormente) la siguiente frase intraducible.

*All this is mighty close to nonsense.*

Sin embargo en esta página se encuentran, quizás por primera vez en la historia de la matemática, las tablas de cuatro negaciones trivalentes. Además en la esquina inferior izquierda aparece la tabla  $3 \times 3$  de un conectivo binario con tres valores.

La segunda página considerada (página 341v del Cuaderno de Lógica) comienza con la frase: “Intentemos de nuevo el sistema triádico de valores”. Como la primera, la mayor parte de esta página se ocupa de cálculos con conectivos trivalentes. La importancia capital de este manuscrito reside en que allí aparecen, quizás también por primera vez, seis tablas  $3 \times 3$  de los valores  $V$ ,  $L$  y  $F$ . Estas tablas corresponden a otros tantos conectivos de la lógica proposicional trivalente, algunos de los cuales son usados por Peirce en sus cálculos.

La tercera página (la 344r del Cuaderno de Lógica) es sin duda la más ordenada de las tres. Está encabezada por la fecha, 23 de febrero de 1909, y titulada “Lógica Triádica”. Comienza con las frases siguientes.

Lógica Triádica es aquella lógica que, sin desechar completamente el Principio del Tercio Excluido, sin embargo reconoce que cada

proposición [de la forma] “ $S$  es  $P$ ” o bien es verdadera, o falsa, o bien  $S$  tiene un modo inferior de ser tal que no es definitivamente  $P$  ni definitivamente no- $P$ , sino que está en el límite entre  $P$  y no- $P$ .

Luego Peirce añade que sí se mantiene el principio de no-contradicción. Sigue una discusión que se itera varias veces en sus escritos.

Se hace una mancha en una hoja. Entonces todo punto de la hoja es immaculado o ennegrecido. Pero hay puntos en la línea limitante, y estos puntos no son susceptibles de ser immaculados o ennegrecidos porque estos predicados se refieren al área alrededor [del punto] y una línea no tiene área alrededor de ninguno de sus puntos.

Luego en esta tercera página realiza los cálculos que demuestran que “la lógica triádica no riñe con la lógica diádica”. Esta nota de Peirce concluye con la frase siguiente.

La Lógica Triádica es universalmente verdadera. Pero la Lógica Diádica no es absolutamente falsa, solo es  $L$ .

### Los conectivos

Las negaciones triádicas de una proposición  $x$  consideradas por Peirce en la primera página, las indica con los signos  $\bar{x}$ ,  $\overset{\circ}{x}$ ,  $\dot{x}$  y  $\acute{x}$ . Las siguientes son las tablas contenidas en ese manuscrito.

$x$	$V$	$L$	$F$
$\bar{x}$	$F$	$L$	$V$
$\overset{\circ}{x}$	$L$	$L$	$L$
$\dot{x}$	$F$	$V$	$L$
$\acute{x}$	$L$	$F$	$V$

La negación  $\bar{\phantom{x}}$  de Peirce es la misma negación  $\neg$  de Łukasiewicz mientras la negación  $\acute{\phantom{x}}$  de Peirce es la negación  $\sim$  de Post. La negación  $\grave{\phantom{x}}$  también es cíclica, de hecho estas dos son las únicas negaciones ternarias cíclicas posibles. El conectivo  $\overset{\circ}{\phantom{x}}$  en realidad es una constante y quizás no puede considerarse como una negación.

Respecto a la segunda página, Peirce asigna las letras griegas mayúsculas  $\Phi$ ,  $\Theta$ ,  $\Psi$ ,  $Z$ ,  $\Omega$  e  $\Upsilon$  a los conectivos que considera. A continuación se reproducen las tablas mediante las cuales los define.

$\Phi$	$\Theta$																		
V L F	V L F																		
V <table border="1" style="display: inline-table; border-collapse: collapse; text-align: center; width: 30px; height: 20px;"><tr><td>V</td><td>V</td><td>V</td></tr><tr><td>V</td><td>L</td><td>F</td></tr><tr><td>V</td><td>F</td><td>F</td></tr></table>	V	V	V	V	L	F	V	F	F	V <table border="1" style="display: inline-table; border-collapse: collapse; text-align: center; width: 30px; height: 20px;"><tr><td>V</td><td>V</td><td>V</td></tr><tr><td>V</td><td>L</td><td>L</td></tr><tr><td>V</td><td>L</td><td>F</td></tr></table>	V	V	V	V	L	L	V	L	F
V	V	V																	
V	L	F																	
V	F	F																	
V	V	V																	
V	L	L																	
V	L	F																	
L <table border="1" style="display: inline-table; border-collapse: collapse; text-align: center; width: 30px; height: 20px;"><tr><td>V</td><td>V</td><td>V</td></tr><tr><td>V</td><td>L</td><td>F</td></tr><tr><td>V</td><td>F</td><td>F</td></tr></table>	V	V	V	V	L	F	V	F	F	L <table border="1" style="display: inline-table; border-collapse: collapse; text-align: center; width: 30px; height: 20px;"><tr><td>V</td><td>V</td><td>V</td></tr><tr><td>V</td><td>L</td><td>L</td></tr><tr><td>V</td><td>L</td><td>F</td></tr></table>	V	V	V	V	L	L	V	L	F
V	V	V																	
V	L	F																	
V	F	F																	
V	V	V																	
V	L	L																	
V	L	F																	
F <table border="1" style="display: inline-table; border-collapse: collapse; text-align: center; width: 30px; height: 20px;"><tr><td>V</td><td>V</td><td>V</td></tr><tr><td>V</td><td>L</td><td>F</td></tr><tr><td>V</td><td>F</td><td>F</td></tr></table>	V	V	V	V	L	F	V	F	F	F <table border="1" style="display: inline-table; border-collapse: collapse; text-align: center; width: 30px; height: 20px;"><tr><td>V</td><td>V</td><td>V</td></tr><tr><td>V</td><td>L</td><td>L</td></tr><tr><td>V</td><td>L</td><td>F</td></tr></table>	V	V	V	V	L	L	V	L	F
V	V	V																	
V	L	F																	
V	F	F																	
V	V	V																	
V	L	L																	
V	L	F																	
$\Psi$	$Z$																		
V L F	V L F																		
V <table border="1" style="display: inline-table; border-collapse: collapse; text-align: center; width: 30px; height: 20px;"><tr><td>V</td><td>V</td><td>F</td></tr><tr><td>V</td><td>L</td><td>F</td></tr><tr><td>V</td><td>F</td><td>F</td></tr></table>	V	V	F	V	L	F	V	F	F	V <table border="1" style="display: inline-table; border-collapse: collapse; text-align: center; width: 30px; height: 20px;"><tr><td>V</td><td>L</td><td>F</td></tr><tr><td>L</td><td>L</td><td>F</td></tr><tr><td>F</td><td>F</td><td>F</td></tr></table>	V	L	F	L	L	F	F	F	F
V	V	F																	
V	L	F																	
V	F	F																	
V	L	F																	
L	L	F																	
F	F	F																	
L <table border="1" style="display: inline-table; border-collapse: collapse; text-align: center; width: 30px; height: 20px;"><tr><td>V</td><td>V</td><td>F</td></tr><tr><td>V</td><td>L</td><td>F</td></tr><tr><td>V</td><td>F</td><td>F</td></tr></table>	V	V	F	V	L	F	V	F	F	L <table border="1" style="display: inline-table; border-collapse: collapse; text-align: center; width: 30px; height: 20px;"><tr><td>V</td><td>L</td><td>F</td></tr><tr><td>L</td><td>L</td><td>F</td></tr><tr><td>F</td><td>F</td><td>F</td></tr></table>	V	L	F	L	L	F	F	F	F
V	V	F																	
V	L	F																	
V	F	F																	
V	L	F																	
L	L	F																	
F	F	F																	
F <table border="1" style="display: inline-table; border-collapse: collapse; text-align: center; width: 30px; height: 20px;"><tr><td>V</td><td>V</td><td>F</td></tr><tr><td>V</td><td>L</td><td>F</td></tr><tr><td>V</td><td>F</td><td>F</td></tr></table>	V	V	F	V	L	F	V	F	F	F <table border="1" style="display: inline-table; border-collapse: collapse; text-align: center; width: 30px; height: 20px;"><tr><td>V</td><td>L</td><td>F</td></tr><tr><td>L</td><td>L</td><td>F</td></tr><tr><td>F</td><td>F</td><td>F</td></tr></table>	V	L	F	L	L	F	F	F	F
V	V	F																	
V	L	F																	
V	F	F																	
V	L	F																	
L	L	F																	
F	F	F																	
$\Omega$	$\Upsilon$																		
V L F	V L F																		
V <table border="1" style="display: inline-table; border-collapse: collapse; text-align: center; width: 30px; height: 20px;"><tr><td>V</td><td>L</td><td>F</td></tr><tr><td>L</td><td>L</td><td>L</td></tr><tr><td>F</td><td>L</td><td>F</td></tr></table>	V	L	F	L	L	L	F	L	F	V <table border="1" style="display: inline-table; border-collapse: collapse; text-align: center; width: 30px; height: 20px;"><tr><td>V</td><td>L</td><td>V</td></tr><tr><td>L</td><td>L</td><td>L</td></tr><tr><td>F</td><td>V</td><td>F</td></tr></table>	V	L	V	L	L	L	F	V	F
V	L	F																	
L	L	L																	
F	L	F																	
V	L	V																	
L	L	L																	
F	V	F																	
L <table border="1" style="display: inline-table; border-collapse: collapse; text-align: center; width: 30px; height: 20px;"><tr><td>V</td><td>L</td><td>F</td></tr><tr><td>L</td><td>L</td><td>L</td></tr><tr><td>F</td><td>L</td><td>F</td></tr></table>	V	L	F	L	L	L	F	L	F	L <table border="1" style="display: inline-table; border-collapse: collapse; text-align: center; width: 30px; height: 20px;"><tr><td>V</td><td>L</td><td>V</td></tr><tr><td>L</td><td>L</td><td>L</td></tr><tr><td>F</td><td>V</td><td>F</td></tr></table>	V	L	V	L	L	L	F	V	F
V	L	F																	
L	L	L																	
F	L	F																	
V	L	V																	
L	L	L																	
F	V	F																	
F <table border="1" style="display: inline-table; border-collapse: collapse; text-align: center; width: 30px; height: 20px;"><tr><td>V</td><td>L</td><td>F</td></tr><tr><td>L</td><td>L</td><td>L</td></tr><tr><td>F</td><td>L</td><td>F</td></tr></table>	V	L	F	L	L	L	F	L	F	F <table border="1" style="display: inline-table; border-collapse: collapse; text-align: center; width: 30px; height: 20px;"><tr><td>V</td><td>L</td><td>V</td></tr><tr><td>L</td><td>L</td><td>L</td></tr><tr><td>F</td><td>V</td><td>F</td></tr></table>	V	L	V	L	L	L	F	V	F
V	L	F																	
L	L	L																	
F	L	F																	
V	L	V																	
L	L	L																	
F	V	F																	

Los conectivos  $\Phi$ ,  $\Theta$  y  $\Upsilon$  de Peirce generalizan la disyunción bivalente mientras los conectivos  $\Psi$ ,  $Z$  y  $\Omega$  generalizan la conjunción. El conectivo  $\Theta$  asigna el máximo de los argumentos según el orden  $F < L < V$  y  $Z$  asigna

el mínimo, de manera que  $Z$  es el conectivo  $\wedge$  de la sección 1.1 mientras  $\Theta$  es el conectivo  $\vee$ .

Aunque Peirce no hace este ejercicio, el principio del tercio excluido puede leerse con sus conectivos de nueve maneras. En ningún caso es tautología:

$x$	$x\Phi\bar{x}$	$x\Phi\dot{x}$	$x\Phi\acute{x}$	$x\Theta\bar{x}$	$x\Theta\dot{x}$	$x\Theta\acute{x}$	$x\Upsilon\bar{x}$	$x\Upsilon\dot{x}$	$x\Upsilon\acute{x}$
$V$	$V$	$V$	$V$	$V$	$V$	$V$	$V$	$V$	$L$
$L$	$L$	$V$	$F$	$L$	$V$	$L$	$L$	$L$	$L$
$F$	$V$	$F$	$V$	$V$	$L$	$V$	$V$	$L$	$V$

Más adelante, en la sección 3 de este trabajo, se detallarán algunas simetrías asombrosas presentes en las seis tablas consignadas por Peirce.

## 2 Simetría en la lógica bivalente

Una notación diseñada por Peirce en 1902 revela simetrías sorprendentes en el sistema de los conectivos binarios de la lógica proposicional clásica. Esta sección es una presentación breve del tema, desarrollado de manera más extensa en varios trabajos anteriores en inglés [Clark and Zellweger 1993, Clark 1997, Zellweger 1991] y en castellano [García, Gómez y Oostra 2002, García y Gómez 2002, Oostra 2003a, Oostra 2004b, Oostra 2005a].

### 2.1 Los conectivos proposicionales bivalentes

No es difícil ver que, en la lógica proposicional clásica o bivalente, los siguientes son todos los posibles conectivos con un solo argumento.

	1	2	3	4
$V$	$F$	$F$	$V$	$V$
$F$	$F$	$V$	$F$	$V$

Por diversas razones —alguna de ellas se hará explícita en el apartado 3.1 de este trabajo— solo se tiene en cuenta el segundo conectivo. Es la *negación* clásica y en adelante se indicará con la barra superior,  $\bar{x}$ .

De manera análoga, los siguientes son todos los conectivos proposicionales bivalentes con dos argumentos.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
$VV$	$F$	$F$	$F$	$F$	$V$	$V$	$V$	$V$	$F$	$F$	$F$	$F$	$V$	$V$	$V$	$V$
$VF$	$F$	$F$	$F$	$V$	$F$	$V$	$F$	$F$	$V$	$V$	$F$	$V$	$F$	$V$	$V$	$V$
$FV$	$F$	$F$	$V$	$F$	$F$	$F$	$V$	$F$	$V$	$F$	$V$	$V$	$V$	$F$	$V$	$V$
$FF$	$F$	$V$	$F$	$F$	$F$	$F$	$F$	$V$	$F$	$V$	$V$	$V$	$V$	$V$	$F$	$V$

Además de los conectivos que se emplean usualmente en lógica (5, 8, 13 y 15), en esta tabla se observan simetrías muy interesantes.

## 2.2 Simetría

La herramienta desarrollada por la matemática con el propósito específico de estudiar la simetría es la Teoría de Grupos. Pues, en general, algún aspecto de cierta estructura es simétrico en la medida en que es invariante bajo un automorfismo o movimiento rígido de la estructura, y los movimientos rígidos de cualquier estructura constituyen un grupo. De esta manera —como lo han indicado numerosos y brillantes matemáticos desde Felix Klein hasta Hermann Weyl—, estudiar la simetría es estudiar los invariantes bajo ciertos subgrupos de un grupo de automorfismos.

Se plantea entonces la tarea de determinar automorfismos para el sistema de los conectivos proposicionales binarios de la lógica bivalente o clásica. La tabla siguiente muestra los 16 posibles automorfismos que pueden construirse a partir de la negación y la conversión de los argumentos. Cada renglón muestra a la derecha la función por extensión y a la izquierda cómo obtener el nuevo conectivo a partir de  $O$ . Para los nombres de los automorfismos se sigue a [García y Gómez 2002, García, Gómez y Oostra 2002].

$xOy$		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
$xOy$	$I$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
$\bar{y}Ox$	$R$	1	3	5	2	4	10	6	9	8	11	7	13	15	12	14	16
$\bar{x}O\bar{y}$	$R^2$	1	5	4	3	2	11	10	8	9	7	6	15	14	13	12	16
$yO\bar{x}$	$R^3$	1	4	2	5	3	7	11	9	8	6	10	14	12	15	13	16
$yOx$	$C$	1	2	4	3	5	7	6	8	9	11	10	12	14	13	15	16
$\bar{x}Oy$	$CR$	1	4	5	2	3	11	7	9	8	10	6	14	15	12	13	16
$\bar{y}O\bar{x}$	$CR^2$	1	5	3	4	2	10	11	8	9	6	7	15	13	14	12	16
$xO\bar{y}$	$CR^3$	1	3	2	5	4	6	10	9	8	7	11	13	12	15	14	16
$\overline{xOy}$	$N$	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
$\overline{\bar{y}Ox}$	$NR$	16	14	12	15	13	7	11	8	9	6	10	4	2	5	3	1
$\overline{\bar{x}O\bar{y}}$	$NR^2$	16	12	13	14	15	6	7	9	8	10	11	2	3	4	5	1
$\overline{yO\bar{x}}$	$NR^3$	16	13	15	12	14	10	6	8	9	11	7	3	5	2	4	1
$\overline{yOx}$	$NC$	16	15	13	14	12	10	11	9	8	6	7	5	3	4	2	1
$\overline{\bar{x}Oy}$	$NCR$	16	13	12	15	14	6	10	8	9	7	11	3	2	5	4	1
$\overline{\bar{y}O\bar{x}}$	$NCR^2$	16	12	14	13	15	7	6	9	8	11	10	2	4	3	5	1
$\overline{xO\bar{y}}$	$NCR^3$	16	14	15	12	13	11	7	8	9	10	6	4	5	2	3	1

Estos automorfismos constituyen un grupo cuya tabla se muestra a continuación.



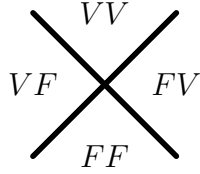
	<i>I</i>	<i>R</i>	<i>R</i> <sup>2</sup>	<i>R</i> <sup>3</sup>	<i>C</i>	<i>CR</i>	<i>CR</i> <sup>2</sup>	<i>CR</i> <sup>3</sup>	<i>N</i>	<i>NR</i>	<i>NR</i> <sup>2</sup>	<i>NR</i> <sup>3</sup>	<i>NC</i>	<i>NCR</i>	<i>NCR</i> <sup>2</sup>	<i>NCR</i> <sup>3</sup>
<i>I</i>	<i>I</i>	<i>R</i>	<i>R</i> <sup>2</sup>	<i>R</i> <sup>3</sup>	<i>C</i>	<i>CR</i>	<i>CR</i> <sup>2</sup>	<i>CR</i> <sup>3</sup>	<i>N</i>	<i>NR</i>	<i>NR</i> <sup>2</sup>	<i>NR</i> <sup>3</sup>	<i>NC</i>	<i>NCR</i>	<i>NCR</i> <sup>2</sup>	<i>NCR</i> <sup>3</sup>
<i>R</i>	<i>R</i>	<i>R</i> <sup>2</sup>	<i>R</i> <sup>3</sup>	<i>I</i>	<i>CR</i> <sup>3</sup>	<i>C</i>	<i>CR</i>	<i>CR</i> <sup>2</sup>	<i>NR</i>	<i>NR</i> <sup>2</sup>	<i>NR</i> <sup>3</sup>	<i>N</i>	<i>NCR</i> <sup>3</sup>	<i>NC</i>	<i>NCR</i>	<i>NCR</i> <sup>2</sup>
<i>R</i> <sup>2</sup>	<i>R</i> <sup>2</sup>	<i>R</i> <sup>3</sup>	<i>I</i>	<i>R</i>	<i>CR</i> <sup>2</sup>	<i>CR</i> <sup>3</sup>	<i>C</i>	<i>CR</i>	<i>NR</i> <sup>2</sup>	<i>NR</i> <sup>3</sup>	<i>N</i>	<i>NR</i>	<i>NCR</i> <sup>2</sup>	<i>NCR</i> <sup>3</sup>	<i>NC</i>	<i>NCR</i>
<i>R</i> <sup>3</sup>	<i>R</i> <sup>3</sup>	<i>I</i>	<i>R</i>	<i>R</i> <sup>2</sup>	<i>CR</i>	<i>CR</i> <sup>2</sup>	<i>CR</i> <sup>3</sup>	<i>C</i>	<i>NR</i> <sup>3</sup>	<i>N</i>	<i>NR</i>	<i>NR</i> <sup>2</sup>	<i>NCR</i>	<i>NCR</i> <sup>2</sup>	<i>NCR</i> <sup>3</sup>	<i>NC</i>
<i>C</i>	<i>C</i>	<i>CR</i>	<i>CR</i> <sup>2</sup>	<i>CR</i> <sup>3</sup>	<i>I</i>	<i>R</i>	<i>R</i> <sup>2</sup>	<i>R</i> <sup>3</sup>	<i>NC</i>	<i>NCR</i>	<i>NCR</i> <sup>2</sup>	<i>NCR</i> <sup>3</sup>	<i>N</i>	<i>NR</i>	<i>NR</i> <sup>2</sup>	<i>NR</i> <sup>3</sup>
<i>CR</i>	<i>CR</i>	<i>CR</i> <sup>2</sup>	<i>CR</i> <sup>3</sup>	<i>C</i>	<i>R</i> <sup>3</sup>	<i>I</i>	<i>R</i>	<i>R</i> <sup>2</sup>	<i>NCR</i>	<i>NCR</i> <sup>2</sup>	<i>NCR</i> <sup>3</sup>	<i>NC</i>	<i>NR</i> <sup>3</sup>	<i>N</i>	<i>NR</i>	<i>NR</i> <sup>2</sup>
<i>CR</i> <sup>2</sup>	<i>CR</i> <sup>2</sup>	<i>CR</i> <sup>3</sup>	<i>C</i>	<i>CR</i>	<i>R</i> <sup>2</sup>	<i>R</i> <sup>3</sup>	<i>I</i>	<i>R</i>	<i>NCR</i> <sup>2</sup>	<i>NCR</i> <sup>3</sup>	<i>NC</i>	<i>NCR</i>	<i>NR</i> <sup>2</sup>	<i>NR</i> <sup>3</sup>	<i>N</i>	<i>NR</i>
<i>CR</i> <sup>3</sup>	<i>CR</i> <sup>3</sup>	<i>C</i>	<i>CR</i>	<i>CR</i> <sup>2</sup>	<i>R</i>	<i>R</i> <sup>2</sup>	<i>R</i> <sup>3</sup>	<i>I</i>	<i>NCR</i> <sup>3</sup>	<i>NC</i>	<i>NCR</i>	<i>NCR</i> <sup>2</sup>	<i>NR</i>	<i>NR</i> <sup>2</sup>	<i>NR</i> <sup>3</sup>	<i>N</i>
<i>N</i>	<i>N</i>	<i>NR</i>	<i>NR</i> <sup>2</sup>	<i>NR</i> <sup>3</sup>	<i>NC</i>	<i>NCR</i>	<i>NCR</i> <sup>2</sup>	<i>NCR</i> <sup>3</sup>	<i>I</i>	<i>R</i>	<i>R</i> <sup>2</sup>	<i>R</i> <sup>3</sup>	<i>C</i>	<i>CR</i>	<i>CR</i> <sup>2</sup>	<i>CR</i> <sup>3</sup>
<i>NR</i>	<i>NR</i>	<i>NR</i> <sup>2</sup>	<i>NR</i> <sup>3</sup>	<i>N</i>	<i>NCR</i> <sup>3</sup>	<i>NC</i>	<i>NCR</i>	<i>NCR</i> <sup>2</sup>	<i>R</i>	<i>R</i> <sup>2</sup>	<i>R</i> <sup>3</sup>	<i>I</i>	<i>CR</i> <sup>3</sup>	<i>C</i>	<i>CR</i>	<i>CR</i> <sup>2</sup>
<i>NR</i> <sup>2</sup>	<i>NR</i> <sup>2</sup>	<i>NR</i> <sup>3</sup>	<i>N</i>	<i>NR</i>	<i>NCR</i> <sup>2</sup>	<i>NCR</i> <sup>3</sup>	<i>NC</i>	<i>NCR</i>	<i>R</i> <sup>2</sup>	<i>R</i> <sup>3</sup>	<i>I</i>	<i>R</i>	<i>CR</i> <sup>2</sup>	<i>CR</i> <sup>3</sup>	<i>C</i>	<i>CR</i>
<i>NR</i> <sup>3</sup>	<i>NR</i> <sup>3</sup>	<i>N</i>	<i>NR</i>	<i>NR</i> <sup>2</sup>	<i>NCR</i>	<i>NCR</i> <sup>2</sup>	<i>NCR</i> <sup>3</sup>	<i>NC</i>	<i>R</i> <sup>3</sup>	<i>I</i>	<i>R</i>	<i>R</i> <sup>2</sup>	<i>CR</i>	<i>CR</i> <sup>2</sup>	<i>CR</i> <sup>3</sup>	<i>C</i>
<i>NC</i>	<i>NC</i>	<i>NCR</i>	<i>NCR</i> <sup>2</sup>	<i>NCR</i> <sup>3</sup>	<i>N</i>	<i>NR</i>	<i>NR</i> <sup>2</sup>	<i>NR</i> <sup>3</sup>	<i>C</i>	<i>CR</i>	<i>CR</i> <sup>2</sup>	<i>CR</i> <sup>3</sup>	<i>I</i>	<i>R</i>	<i>R</i> <sup>2</sup>	<i>R</i> <sup>3</sup>
<i>NCR</i>	<i>NCR</i>	<i>NCR</i> <sup>2</sup>	<i>NCR</i> <sup>3</sup>	<i>NC</i>	<i>NR</i> <sup>3</sup>	<i>N</i>	<i>NR</i>	<i>NR</i> <sup>2</sup>	<i>CR</i>	<i>CR</i> <sup>2</sup>	<i>CR</i> <sup>3</sup>	<i>C</i>	<i>R</i> <sup>3</sup>	<i>I</i>	<i>R</i>	<i>R</i> <sup>2</sup>
<i>NCR</i> <sup>2</sup>	<i>NCR</i> <sup>2</sup>	<i>NCR</i> <sup>3</sup>	<i>NC</i>	<i>NCR</i>	<i>NR</i> <sup>2</sup>	<i>NR</i> <sup>3</sup>	<i>N</i>	<i>NR</i>	<i>CR</i> <sup>2</sup>	<i>CR</i> <sup>3</sup>	<i>C</i>	<i>CR</i>	<i>R</i> <sup>2</sup>	<i>R</i> <sup>3</sup>	<i>I</i>	<i>R</i>
<i>NCR</i> <sup>3</sup>	<i>NCR</i> <sup>3</sup>	<i>NC</i>	<i>NCR</i>	<i>NCR</i> <sup>2</sup>	<i>NR</i>	<i>NR</i> <sup>2</sup>	<i>NR</i> <sup>3</sup>	<i>N</i>	<i>CR</i> <sup>3</sup>	<i>C</i>	<i>CR</i>	<i>CR</i> <sup>2</sup>	<i>R</i>	<i>R</i> <sup>2</sup>	<i>R</i> <sup>3</sup>	<i>I</i>

## 2.3 Notaciones simétricas

Con la notación usual de los conectivos es imposible ver las simetrías o los automorfismos, de hecho la mayoría de estas funciones no se pueden definir con esa notación porque hay muchos conectivos sin signo. Pero hay otras notaciones que sí revelan plenamente esas simetrías.

### Peirce

La notación propuesta y empleada por Peirce en 1902 se basa en una idea sencilla en extremo. Los cuadrantes de un signo  $\times$  se rotulan con las cuatro posibles combinaciones de valores de verdad, como se muestra en el diagrama siguiente.



Ahora, cada cuadrante puede cerrarse mediante un trazo entre los extremos del signo  $\times$  que lo limitan. La convención propuesta por Peirce es *cerrar el cuadrante falso*, esto es, cerrar los cuadrantes de las combinaciones a las cuales el conectivo asigna  $F$ . En la tabla siguiente se observan los signos de los conectivos y dos notaciones cursivas propuestas por el mismo Peirce para simplificar la escritura.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
$VV$	$F$	$F$	$F$	$F$	$V$	$V$	$V$	$V$	$F$	$F$	$F$	$F$	$V$	$V$	$V$	$V$
$VF$	$F$	$F$	$F$	$V$	$F$	$V$	$F$	$F$	$V$	$V$	$F$	$V$	$F$	$V$	$V$	$V$
$FV$	$F$	$F$	$V$	$F$	$F$	$F$	$V$	$F$	$V$	$F$	$V$	$V$	$V$	$F$	$V$	$V$
$FF$	$F$	$V$	$F$	$F$	$F$	$F$	$F$	$V$	$F$	$V$	$V$	$V$	$V$	$V$	$F$	$V$
	$\boxtimes$	$\boxtimes$	$\boxtimes$	$\boxtimes$	$\boxtimes$	$\boxtimes$	$\boxtimes$	$\boxtimes$	$\boxtimes$	$\boxtimes$	$\boxtimes$	$\boxtimes$	$\boxtimes$	$\boxtimes$	$\boxtimes$	$\boxtimes$
	$\otimes$	$\wedge$	$<$	$>$	$\vee$	$\otimes$	$\otimes$	$\infty$	$8$	$\otimes$	$\otimes$	$\otimes$	$\infty$	$\infty$	$\otimes$	$\times$
	$\oplus$	$\lambda$	$<$	$>$	$\vee$	$\triangleleft$	$\triangleleft$	$=$	$\parallel$	$\nabla$	$\nabla$	$\otimes$	$\infty$	$\infty$	$\otimes$	$\times$

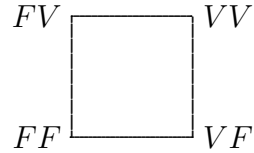
Esta tabla pone de manifiesto que el sistema de signos de Peirce tiene todas las simetrías del sistema de los conectivos. Esto se hace aún más evidente si en la tabla de los automorfismos (página 16) se reemplazan los números por los signos de Peirce.

$x O y$	☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒	
$x O y$	☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒	Reposo
$\bar{y} O x$	☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒	Rotación 90°
$\bar{x} O \bar{y}$	☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒	Rotación 180°
$y O \bar{x}$	☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒	Rotación 270°
$y O x$	☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒	Reflexión EV
$\bar{x} O y$	☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒	Reflexión DA
$\bar{y} O \bar{x}$	☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒	Reflexión EH
$x O \bar{y}$	☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒	Reflexión DD
$\overline{x O y}$	☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒	Complemento
$\overline{\bar{y} O x}$	☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒	Rot 90°+Co
$\overline{\bar{x} O \bar{y}}$	☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒	Rot 180°+Co
$\overline{y O \bar{x}}$	☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒	Rot 270°+Co
$\overline{y O x}$	☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒	Ref EV+Co
$\overline{\bar{x} O y}$	☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒	Ref DA+Co
$\overline{\bar{y} O \bar{x}}$	☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒	Ref EH+Co
$\overline{x O \bar{y}}$	☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒	Ref DD+Co

Aquí los automorfismos se traducen en movimientos físicos del signo. Los primeros ocho automorfismos corresponden con exactitud a los movimientos rígidos del cuadrado, los demás son los mismos movimientos seguidos de cierto complemento, que en este caso consiste en abrir los cuadrantes cerrados y cerrar los abiertos.

### Zellweger

En la segunda mitad del siglo XX el norteamericano Shea Zellweger diseñó, desarrolló y patentó una notación para los conectivos proposicionales binarios que comparte muchas características con la notación de Peirce. En este caso también se escoge un cuadrado, cuyos vértices se rotulan como sigue.



La convención propuesta por Zellweger es *marcar el vértice verdadero*, esto es, distinguir con un punto grueso los vértices de las combinaciones a las cuales el conectivo asigna  $V$ . Luego cada punto marcado se interpreta como una extremidad del signo, lo cual indica una correspondencia con algunas letras minúsculas.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
$VV$	$F$	$F$	$F$	$F$	$V$	$V$	$V$	$V$	$F$	$F$	$F$	$F$	$V$	$V$	$V$	$V$
$VF$	$F$	$F$	$F$	$V$	$F$	$V$	$F$	$F$	$V$	$V$	$F$	$V$	$F$	$V$	$V$	$V$
$FV$	$F$	$F$	$V$	$F$	$F$	$F$	$V$	$F$	$V$	$F$	$V$	$V$	$V$	$F$	$V$	$V$
$FF$	$F$	$V$	$F$	$F$	$F$	$F$	$F$	$V$	$F$	$V$	$V$	$V$	$V$	$V$	$F$	$V$
	□	◻	◻	◻	◻	◻	◻	◻	◻	◻	◻	◻	◻	◻	◻	◻
	o	p	b	q	d	c	u	s	z	n	o	h	μ	rl	y	x

Además de compartir toda la simetría con el sistema de Peirce —y por ende con el sistema de los conectivos— la ventaja inmensa de la notación de Zellweger es que los signos tienen nombres, pues todos corresponden a letras del alfabeto excepto tres que son inversas de letras usuales. Por ello es natural que a este sistema de signos, Zellweger haya denominado el *Alfabeto Lógico*.

### 3 Hacia la simetría en los conectivos binarios trivalentes

Las simetrías en los conectivos binarios clásicos corresponden a invariantes bajo “automorfismos lógicos” y el grupo de todos estos automorfismos es

el que se presentó en el apartado 2.2. Aunque todavía no se tiene el grupo general de todos los automorfismos para los conectivos binarios trivalentes, en esta sección sí se presentan algunos de ellos. Los automorfismos introducidos aquí comparten la característica peculiar de que el conjunto de conectivos consignado por Peirce es cerrado bajo cada uno de ellos.

### 3.1 Negaciones triádicas

Las distintas negaciones para la lógica trivalente presentadas en la sección 1 pueden clasificarse de manera natural en dos grupos. La negación  $\bar{\phantom{x}}$  de Peirce, que es la misma negación  $\neg$  de Łukasiewicz, deja invariante un elemento e intercambia los otros dos y por ello podría llamarse una negación *parcial*; las negaciones  $\grave{\phantom{x}}$  y  $\acute{\phantom{x}}$  de Peirce, la segunda de las cuales es la misma negación  $\sim$  de Post, permuta todos los valores de verdad de manera cíclica y por ello podría llamarse una negación *total*.

De esta manera resultan cinco negaciones para la lógica trivalente. Las dos negaciones totales se denotarán, siguiendo a Peirce,  $\grave{N}$  y  $\acute{N}$ ; las tres negaciones parciales se denotarán  $N_V$ ,  $N_L$  y  $N_F$  donde el subíndice indica el valor invariante. De inmediato se reconocen aquí los cinco elementos no triviales del grupo  $S_3$  de las permutaciones de tres elementos. Para efecto de la compleción podría añadirse la negación trivial  $N_0$ , que es la función idéntica. Así, en general, en una lógica con  $n$  valores podría definirse una negación como una permutación de los valores de verdad. Esto es consistente con el caso bivalente, donde la negación es la única permutación no trivial de dos elementos, como se observó en apartado 2.1. Es necesario advertir, sin embargo, que hay lógicas multivalentes con negaciones que no son biyectivas, como la lógica intuicionista correspondiente al álgebra de Heyting con tres elementos [Oostra 2004a].

La tabla siguiente muestra las seis negaciones consideradas para la lógica trivalente.

	$N_0$	$\dot{N}$	$\acute{N}$	$N_V$	$N_L$	$N_F$
$V$	$V$	$F$	$L$	$V$	$F$	$L$
$L$	$L$	$V$	$F$	$F$	$L$	$V$
$F$	$V$	$L$	$V$	$L$	$V$	$F$

## Dualidad

En la lógica proposicional clásica o bivalente —con su notación usual—, las identidades siguientes se conocen con el nombre de *Leyes de De Morgan*.

$$\overline{x \wedge y} \equiv \bar{x} \vee \bar{y} \qquad \overline{x \vee y} \equiv \bar{x} \wedge \bar{y}$$

En realidad este hecho no se limita a los conectivos  $\wedge$ ,  $\vee$  sino que cada uno de los conectivos binarios tiene su dual tipo De Morgan. Con la notación de Peirce, un conectivo  $\bigcirc$  es el dual tipo De Morgan de otro  $\square$  cuando el signo de  $\bigcirc$  se obtiene del de  $\square$  por rotación de 180 grados y complementación [García y Gómez 2002]. Por otro lado, como se anotó en el apartado 1.1 de este trabajo, la dualidad tipo De Morgan también se observa en las MV-álgebras:

$$\neg(x \odot y) = \neg x \oplus \neg y \qquad \neg(x \oplus y) = \neg x \odot \neg y$$

En la lógica trivalente, la dualidad tipo De Morgan toma la forma siguiente. Para cualquier negación  $N$ , al conectivo  $\bigcirc$  corresponde el conectivo  $\square$  que valida la identidad siguiente.

$$N(x \square y) \equiv N(x) \bigcirc N(y)$$

La dualidad de De Morgan entre los conectivos consiste en que esta identidad equivale a la siguiente.

$$N^{-1}(x \bigcirc y) \equiv N^{-1}(x) \square N^{-1}(y)$$

Por supuesto, se recuperan las identidades clásicas cuando  $N^{-1} = N$ , lo cual en el caso trivalente solo se tiene para  $N_0$ ,  $N_V$ ,  $N_L$  y  $N_F$ .

La identidad  $N(x \square y) \equiv N(x) \circ N(y)$  también equivale a la siguiente.

$$x \square y \equiv N^{-1}(N(x) \circ N(y))$$

Esta presentación de la identidad de De Morgan determina una función en el sistema de los conectivos, dada por  $\circ \mapsto \square$ . Es bien claro que esta función tiene inversa, dada por  $x \circ y \equiv N(N^{-1}(x) \square N^{-1}(y))$ . Y puesto que ambas funciones biyectivas se construyen a partir de negaciones, puede concluirse que *cada dualidad tipo De Morgan induce un automorfismo lógico* en el sistema de los conectivos binarios trivalentes.

### 3.2 Dualidad con negaciones parciales

En el caso de las negaciones trivalentes parciales  $N_V$ ,  $N_L$ ,  $N_F$  la dualidad de De Morgan es la misma de la lógica clásica y el automorfismo asociado es, por ejemplo,  $x \square y \equiv N_V(N_V(x) \circ N_V(y))$ . En particular, ¿cuál es la imagen del conectivo  $\Phi$  de Peirce por este automorfismo? ¿Esta imagen está entre los conectivos de Peirce?

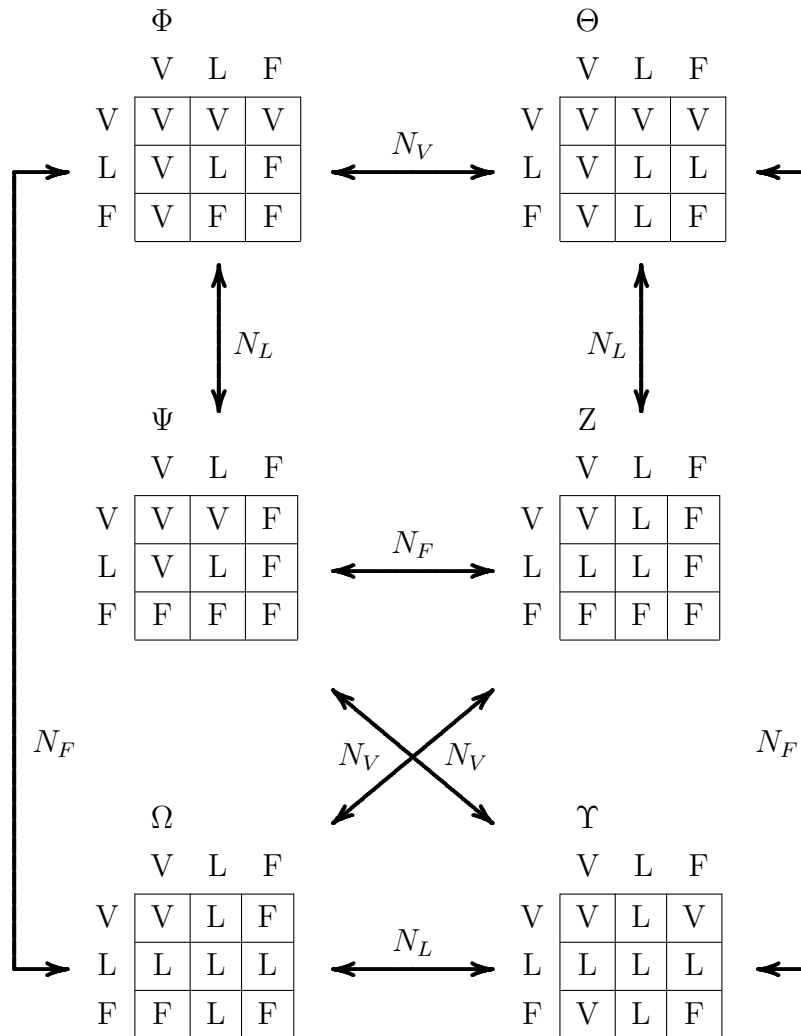
Las tablas siguientes muestran un procedimiento para calcular la imagen del conectivo  $\Phi$  por el automorfismo correspondiente a la negación  $N_V$ . En la primera tabla se calcula  $N_V(x) \Phi N_V(y)$ ; la segunda se obtiene de ella aplicando  $N_V$  a todas las entradas.

		$y$	$V$	$L$	$F$		
		$N_V y$	$V$	$F$	$L$		
$x$	$N_V x$	$\Phi$					
$V$	$V$		$V$	$V$	$V$		
$L$	$F$		$V$	$F$	$F$		
$F$	$L$		$V$	$F$	$L$		

$\xrightarrow{N_V}$

		$V$	$L$	$F$
$V$		$V$	$V$	$V$
$L$		$V$	$L$	$L$
$F$		$V$	$L$	$F$

El resultado es la tabla de  $\Theta$ , de suerte que  $\Phi$  y  $\Theta$  son duales según la negación trivalente  $N_V$ . De la misma manera pueden calcularse los duales de todos los conectivos de Peirce. Los resultados se sintetizan en la tabla siguiente, que apareció originalmente en [Turquette 1969].



En primer lugar resulta sorprendente, o mejor asombroso, el hecho de que el conjunto de los conectivos consignado por Peirce es *cerrado* bajo los automorfismos asociados a estas tres negaciones. En otros términos, el dual



—según cualquier negación parcial— de cualquier conectivo de Peirce es de nuevo un conectivo de Peirce.

En segundo lugar es interesante observar que si dos conectivos de Peirce  $A, B$  son duales según alguna negación parcial  $N$ , entonces los demás conectivos se distribuyen en dos subconjuntos  $\{C, D\}, \{E, F\}$  que —miembro a miembro— son duales según *la misma* negación  $N$ . Por ejemplo,  $\Phi \xleftrightarrow{N_V} \Theta$  y  $\{\Psi, Z\} \xleftrightarrow{N_V} \{\Omega, \Upsilon\}$ .

### 3.3 Dualidad con negaciones totales

Exactamente de la misma manera pueden calcularse los automorfismos asociados a las negaciones totales  $\dot{N}$  y  $\acute{N}$ . Por ejemplo para la primera se tiene lo siguiente.

$$x \square y \equiv (\dot{N})^{-1}(\dot{N}(x) \circ \dot{N}(y)) \equiv \acute{N}(\dot{N}(x) \circ \dot{N}(y))$$

De nuevo caben las preguntas anteriores. ¿Cuáles son las imágenes de cada uno de los conectivos de Peirce por los automorfismos asociados a  $\dot{N}$  y  $\acute{N}$ ? ¿En todos los casos están de nuevo entre los conectivos de Peirce? A continuación se ilustra el problema mediante dos ejemplos.

		$y$	$V$	$L$	$F$				
		$\dot{N}y$	$F$	$V$	$L$				
$x$	$\dot{N}x$	$Z$							
$V$	$F$		$F$	$F$	$F$	$\xrightarrow{\acute{N}}$	$V$	$L$	$F$
$L$	$V$		$F$	$V$	$L$		$V$	$V$	$V$
$F$	$L$		$F$	$L$	$L$		$L$	$V$	$F$

De manera que la imagen por el automorfismo asociado a  $\dot{N}$  del conectivo  $Z$  es el conectivo  $\Phi$ , otro conectivo de Peirce.

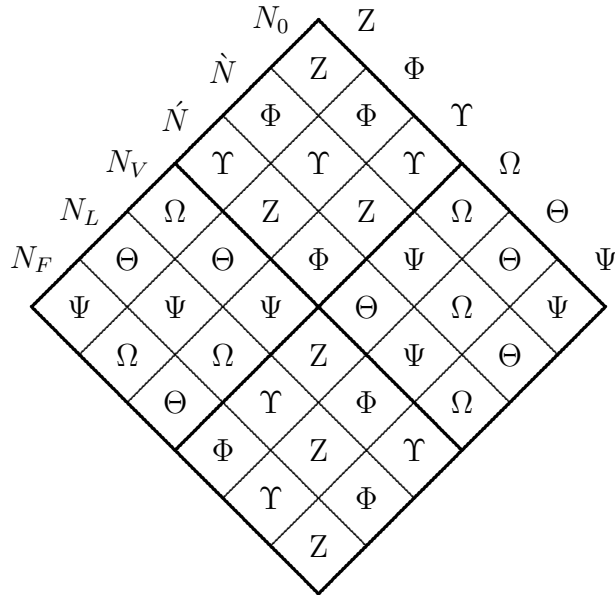
		$y$	$V$	$L$	$F$
		$\acute{N}y$	$L$	$F$	$V$
$x$	$\acute{N}x$	$Z$			
$V$	$L$		$L$	$F$	$L$
$L$	$F$		$F$	$F$	$F$
$F$	$V$		$L$	$F$	$V$

 $\xrightarrow{\acute{N}}$ 

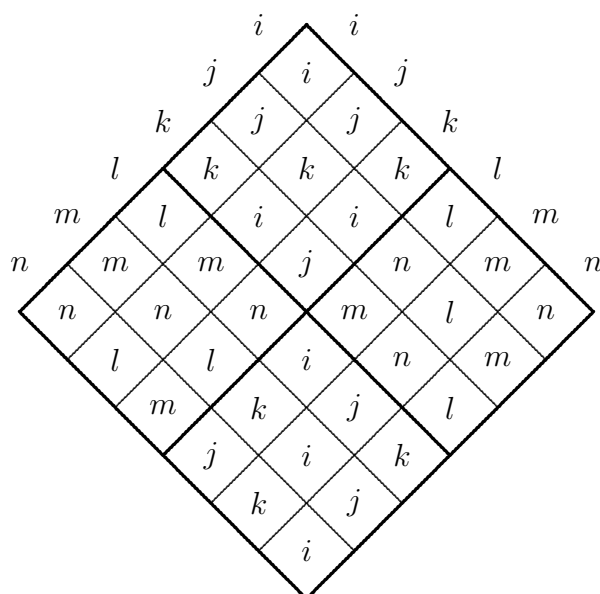
	$V$	$L$	$F$
$V$	$V$	$L$	$V$
$L$	$L$	$L$	$L$
$F$	$V$	$L$	$F$

Así, el automorfismo asociado a  $\acute{N}$  asigna al conectivo  $Z$  el conectivo  $\Upsilon$ . De nuevo sorprende el hecho de que, al menos para este conectivo  $Z$ , sus imágenes por todos los seis automorfismos asociados a negaciones trivalentes son de nuevo conectivos de Peirce. De hecho esto sucede con todos los conectivos de Peirce, es decir, *el conjunto de los conectivos consignados por Peirce es cerrado bajo todos los automorfismos asociados a las seis posibles negaciones trivalentes.*

Los resultados de todos los cálculos se sintetizan en la tabla siguiente.



Esta interesante tabla apareció por primera vez en un manuscrito inédito de Shea Zellweger, que él mismo menciona en su artículo [Zellweger 1991]. La idea de colocar la tabla inclinada ( $\diamond$  en vez de  $\square$ ) es peculiar de Peirce (véase [García y Gómez 2002, Oostra 2004b] y en especial [Oostra 2003a]). De hecho, Zellweger indica el isomorfismo de la tabla anterior con la siguiente, que es una presentación del grupo simétrico  $S_3$  encontrada en una página olvidada de los manuscritos de Peirce.



## Bibliografía

[Brady 2000]

Geraldine Brady, *From Peirce to Skolem: A Neglected Chapter in the History of Logic*. North-Holland, Amsterdam, 2000.

[Caicedo 1990]

Xavier Caicedo, *Elementos de Lógica y Calculabilidad*. Una Empresa Docente, Bogotá, 1990.

[Cignoli 2000]

Roberto Cignoli, *Verdad y consecuencia en el segmento real: Una formalización de la lógica borrosa*. Anales de la Academia Nacional de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales **52** (2000) 9–23.

[Cignoli, D’Ottaviano e Mundici 1994]

Roberto Cignoli, Itala D’Ottaviano e Daniele Mundici, *Álgebras das Lógicas de Lukasiewicz*. Coleção CLE 12. Centro de Lógica, Epistemologia e História da Ciência, UNICAMP, Campinas, 1994.

[Cignoli, D’Ottaviano and Mundici 2000]

Roberto Cignoli, Itala D’Ottaviano and Daniele Mundici, *Algebraic Foundations of Many-Valued Reasoning*. Trends in Logic 7. Kluwer, Dordrecht, 2000.

[Clark and Zellweger 1993]

Glenn Clark and Shea Zellweger, *Let the mirrors do the thinking*. Mount Union Magazine **93** (1993) 2–5.

[Clark 1997]

Glenn Clark, *New light on Peirce’s iconic notation for the sixteen binary connectives*. In: Nathan Houser, Don D. Roberts and James Van Evra (Eds.), *Studies in the Logic of Charles Sanders Peirce*, 304–333. Indiana University Press, Bloomington and Indianapolis, 1997.

[Fisch and Turquette 1966]

Max H. Fisch and Atwell R. Turquette, *Peirce’s triadic logic*. Transactions of the Charles S. Peirce Society **2** (1966) 71–85.

[Fraleigh 1982]

John B. Fraleigh, *A First Course in Abstract Algebra*. Addison-Wesley, Reading (Massachusetts), 1982.

[García y Gómez 2002]

Mireya García y Jhon Fredy Gómez, *Notación de Peirce para los Conectivos Binarios*. Trabajo de Grado (Carrera de Matemáticas). Universidad del Tolima, Ibagué, 2002.

[García, Gómez y Oostra 2002]

Mireya García, Jhon Fredy Gómez y Arnold Oostra, *Simetría y Lógica: La notación de Peirce para los 16 conectivos binarios*. Memorias del XII Encuentro de Geometría, 1–26. Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, 2001.

[Ketner 2001]

Kenneth L. Ketner, *Carolyn Eisele (1902-2000)*. Transactions of the Charles S. Peirce Society **37** (2001) 475–489.

[Lukasiewicz 1920]

Jan Łukasiewicz, *O logice trójwarkościowej*. Ruch Filozoficzny **6** (1920) 170–171.

[Oostra 2000]

Arnold Oostra, *Acercamiento lógico a Peirce*. Boletín de Matemáticas **VII** (2000) 60–77.

[Oostra 2001]

Arnold Oostra, *Los diagramas de la matemática y la matemática de los diagramas*. Boletín de Matemáticas **VIII** (2001) 1–7.

[Oostra 2002]

Arnold Oostra, *El concepto de número natural según Charles S. Peirce*. Memorias del XIII Encuentro de Geometría y I de Aritmética, 1–18. Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, 2002.

[Oostra 2003a]

Arnold Oostra, *Simetría en algunas tablas de C. S. Peirce*. Memorias

del XIV Encuentro de Geometría y II de Aritmética, 1–49. Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, 2003.

[Oostra 2003b]

Arnold Oostra, *Acercas del artículo On the Logic of Number, de Charles S. Peirce*. Boletín de Matemáticas **X** (2003) 13–20.

[Oostra 2004a]

Arnold Oostra, *Lógicas de Lukasiewicz y sus álgebras*. Memorias del XV Encuentro de Geometría y III de Aritmética, 1–31. Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, 2004.

[Oostra 2004b]

Arnold Oostra, *La notación diagramática de C. S. Peirce para los conectivos proposicionales binarios*. Revista de la Academia Colombiana de Ciencias **28** (2004) 57–70.

[Oostra 2004c]

Arnold Oostra, *C. S. Peirce y el análisis: Una primera lectura de El Continuo Peirceano*. Boletín de Matemáticas **XI** (2004) 19–30.

[Oostra 2005a]

Arnold Oostra, *Huellas en los Encuentros de Geometría y Aritmética*. Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, 2005.

[Oostra 2005b]

Arnold Oostra, *Sobre lógicas multivaluadas*. Memorias del XVI Encuentro de Geometría y IV de Aritmética, 199–212. Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, 2005.

[Oostra 2006]

Arnold Oostra, *Peirce y la matemática*. Anthropos **212** (2006) 151–159.

[Peirce 1881]

Charles S. Peirce, *On the logic of number*. American Journal of Mathematics **4** (1881) 85–95.

[Peirce 1931]

Charles S. Peirce, *Collected Papers of Charles Sanders Peirce*. Charles Hartshorne and Paul Weiss (Eds.), vols. 1–6. Harvard University Press, 1931–1934.

[Peirce 1976]

Charles S. Peirce, *The New Elements of Mathematics*. Carolyn Eisele (Ed.), vols 1–4. Mouton, The Hague, 1976.

[Peirce 1982]

Charles S. Peirce, *Writings of Charles S. Peirce: A Chronological Edition*. Max H. Fisch, Edward C. Moore, *et al.* (Eds.). Indiana University Press, Bloomington, 1982–.

[Peirce 2003]

Charles S. Peirce, *Sobre la lógica del número*. Boletín de Matemáticas **X** (2003) 1–12.

[Post 1921]

Emil L. Post, *Introduction to a general theory of elementary propositions*. American Journal of Mathematics **43** (1921) 163–185.

[Rasiowa 1974]

Helena Rasiowa, *An Algebraic Approach to Non-Classical Logics*. North-Holland, Amsterdam, 1974.

[Roberts 1973]

Don D. Roberts, *The Existential Graphs of Charles S. Peirce*. Mouton, Den Haag, 1973.

[Turquette 1967]

Atwell R. Turquette, *Peirce's Phi and Psi operators for triadic logic*. Transactions of the Charles S. Peirce Society **3** (1967) 66–73.

[Turquette 1969]

Atwell R. Turquette, *Peirce's complete systems of triadic logic*. Transactions of the Charles S. Peirce Society **5** (1969) 199–210.

[Turquette 1972]

Atwell R. Turquette, *Dualism and trimorphism in Peirce's triadic logic*. Transactions of the Charles S. Peirce Society **8** (1972) 131–140.

[Zalamea 1993]

Fernando Zalamea, *Una jabalina lanzada hacia el futuro: anticipos y aportes de C. S Peirce a la lógica matemática del siglo XX*. Mathesis **9** (1993) 391–404.

[Zalamea 1997]

Fernando Zalamea, *Lógica Topológica: Una introducción a los gráficos existenciales de Peirce*. XIV Coloquio Distrital de Matemáticas y Estadística. Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, 1997.

[Zalamea 2001]

Fernando Zalamea, *El Continuo Peirceano. Aspectos globales y locales de genericidad, reflexividad y modalidad: Una visión del continuo y la arquitectónica pragmática peirceana desde la lógica matemática del siglo XX*. Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, 2001.

[Zalamea 2003]

Fernando Zalamea, *Peirce's logic of continuity: Existential graphs and non-cantorian continuum*. The Review of Modern Logic **9** (2003) 115–162.



[Zalamea 2006]

Fernando Zalamea, *Signos triádicos. Lógicas, literaturas, artes. Nueve cruces latinoamericanos*. *Mathesis* **III 1** (2006) 1–164.

[Zellweger 1982]

Shea Zellweger, *Sign-creation and man-sign engineering*. *Semiotica* **38** (1982) 27–54.

[Zellweger 1991]

Shea Zellweger, *Peirce, iconicity, and the geometry of logic*. In: Myrdene Anderson and Floyd Merrell (Eds.), *On Semiotic Modeling*, 483–507. Mouton de Gruyter, New York, 1991.

[Zellweger 1993]

Shea Zellweger, *Cognitive frames, cognitive overload, and mind-held diagrams in logic*. In: John Deeley and Terry Prewitt (Eds.), *Semiotics 1991*, 35–45. University Press of America, New York, 1993.

[Zellweger 1997a]

Shea Zellweger, *On a deep correspondence between sign-creation in logic and symmetry in crystallography*. In: Irmengard Rauch and Gerald F. Carr (Eds.), *Semiotics around the World: Synthesis in Diversity*, 821–824. Mouton de Gruyter, New York, 1997.

[Zellweger 1997b]

Shea Zellweger, *Untapped potential in Peirce's iconic notation for the sixteen binary connectives*. In: Nathan Houser, Don D. Roberts and James Van Evra (Eds.), *Studies in the Logic of Charles Sanders Peirce*, 334–386. Indiana University Press, Bloomington and Indianapolis, 1997.

[Zellweger 2003]

Shea Zellweger, *Mathelological Semiotics: A lesson in constructing a shape-value notation for elementary logic*. En: Myrdene Anderson,

Adalira Sáenz-Ludlow, Shea Zellweger and Victor V. Cifarelli (Eds.), *Educational Perspectives on Mathematics as Semiosis: From Thinking to Interpreting to Knowing*, 285–356. Legas, New York, 2003.

[Zeman 1964]

J. Jay Zeman, *The Graphical Logic of C. S. Peirce*. Ph.D. dissertation, University of Chicago, 1964.

[Zeman 1977]

J. Jay Zeman, *Peirce's theory of signs*. In: Thomas A. Sebeok, *A Perfusion of Signs*, 22–39. Indiana University Press, Bloomington, 1977.

Arnold Oostra  
Departamento de Matemáticas y Estadística  
Universidad del Tolima  
AA 546  
Ibagué, COLOMBIA