SOBRE EL ÁLGEBRA DE LA LÓGICA
Una contribución a la filosofía de una notación

Charles S. Peirce (1885)

Traducción castellana de Pilar Castrillo (1988)

"On the Álgebra of Logic. A Contribution to the Philosophy of a Notation" se publicó originalmente en *American Journal of Mathematics*, vol. 7, (1885), pp. 180-202 y fue recogido en *CP* 3. 359-403. La traducción castellana de Pilar Castrillo se publicó en *Charles S. Peirce. Escritos lógicos*, Alianza Editorial, Madrid 1988.

SOBRE EL ALGEBRA DE LA LOGICA.
Una contribución a la filosofía de una notación

1. Tres clases de signos

Toda propiedad o proposición concierne bien a un sujeto, bien a dos, bien a una pluralidad de ellos. Por ejemplo, una partícula tiene masa, dos partículas se atraen mutuamente, una partícula gira en torno a la línea que une a otras dos. Un hecho concerniente a dos sujetos es una propiedad diádica o relación, pero de una relación que sea una mera combinación de dos hechos independientes acerca de dos sujetos se puede decir que es una relación *degenerada*, del mismo modo que de dos líneas se dice que son una cónica degenerada. De igual modo, una propiedad poliádica o relación conjunta ha de llamarse degenerada caso de que sea un mero conglomerado de propiedades diádicas.

Un signo está en una relación conjunta con la cosa designada y con la mente. Si esta relación triádica no es de tipo degenerado, el signo se relaciona con su objeto solo debido a una asociación mental y depende de un hábito. Como los hábitos no son otra cosa que reglas generales a las que el organismo ha llegado a someterse, tales signos son siempre abstractos y generales. La mayoría de ellos son convencionales o arbitrarios. Entre ellos se encuentran todas las palabras generales, que constituyen la parte principal del lenguaje, y todas las formas de expresar un juicio. En aras de la brevedad los llamaré expresiones-caso (*tokens*).

Pero si la relación triádica entre el signo, su objeto y la mente es de generada, entonces de los tres pares

signo	objeto
signo	mente
objeto	mente

por lo menos dos mantinen entre sí las relaciones diádicas que constituyen la triádica. Uno de los pares relacionados ha de estar formado por el signo y su objeto, ya que si el signo no estuviera relacionado con su objeto más que a través de una mente que los concibiera independientemente, no realizaría la función de signo. Suponiendo, pues, que la relación entre el signo y su objeto no estriba en una asociación mental, ha de haber entonces una relación diádica directa entre el signo y su objeto, independiente de la mente que hace uso de aquél. En el segundo de los tres casos que acabamos de mencionar, esta relación diádica no es degenerada, y el signo designa su objeto sólo por el hecho de estar realmente conectado con él. A este tipo de signo lo llamo *índice*, siendo prototipo del mismo un dedo señalando algo.

El índice no afirma nada; sólo dice «¡Ahí!» Hace presa de nuestra vista, por así decirlo, y la dirige hacia un objeto determinado y allí se para. Los pronombres demostrativos y relativos son índices casi puros, en la medida en que denotan cosas sin describirlas; y lo mismo ocurre con las letras de un diagrama geométrico y con los subíndices empleados en álgebra para distinguir un valor de otro sin especificar cuáles sean dichos valores.

El tercer caso es aquel en el que la relación diádica entre el signo y su objeto es degenerada y consiste en una mera similitud entre ellos. Llamo *icono* a aquel signo que representa algo únicamente por el hecho de que se asemeja a ello. Los iconos son sustitutos tan completos de sus objetos que difícilmente se los puede distinguir de ellos. Tal es el caso de los diagramas geométricos. Un diagrama, en la medida en que posee un sentido general, no es, desde luego, un icono puro, pero cuando estamos a mitad de nuestro razonamiento, nos olvidamos casi por completo de su naturaleza abstracta y pasamos a ver el diagrama como la cosa misma. Así, cuando contemplamos una pintura, hay un momento en el que perdemos la conciencia de que no se trata de la cosa, un momento en el que la distinción entre lo real y la copia se desvanece y ésta se convierte por un momento en un puro ensueño —en algo que no tiene una existencia concreta pero, sin embargo, tampoco general—. En ese momento estamos contemplando un *icono*.

Me he tomado la molestia de esclarecer mi distinción[1] entre iconos, índices y expresiones-caso con objeto de enunciar la siguiente proposición: en un sistema de notación lógica que sea perfecto han de emplearse signos de todas estas clases. Sin expresiones-caso, los enunciados no tendrían generalidad, pues ellos son los únicos signos generales, y la generalidad es esencial al razonamiento. Tomemos, por ejemplo, los círculos mediante los cuales Euler representa las relaciones entre términos. Cumplen a la perfección la función de iconos, pero su falta de generalidad y su incapacidad para expresar proposiciones no pueden haber pasado desapercibidas a quien los haya empleado. Esto ha llevado al señor Venn a añadirles un sombreado, que no es sino un signo convencional cuya naturaleza es la de una expresión-caso. En álgebra, tanto las letras cuantitativas como las funcionales son de esta naturaleza. Pero las expresiones-caso no bastan por sí solas para establecer cuál es el objeto del discurso, pues éste no pude describirse en términos generales, sino que sólo se lo puede indicar. El mundo real no puede distinguirse de uno imaginario mediante una descripción. De ahí la necesidad de emplear pronombres e índices, necesidad que es tanto mayor cuanto más complicado el tema. La introducción de índices en el álgebra de la lógica es la principal aportación del sistema del señor Mitchell[2]. El escribe F_1 para indicar que la proposición F es verdadera de todos los objetos del universo y F_u para indicar que es verdadera de alguno de ellos. Esta distinción sólo puede establecerse mediante algún procedimiento de este tipo. Los índices también se necesitan para mostrar de

[1] Véase *Proceedings, American Academy of Arts and Sciences*, vol. 7, p. 294, 14 de mayo de 1867.

[2] *Studies in Logic*, realizados por miembros de la universidad Johns Hopkins, Boston, Little, Brown and Co., 1883.

qué modo se hallan conectados entre sí otros signos. Tan sólo con estos dos tipos de signos se puede expresar cualquier proposición; pero en cambio no se puede razonar sobre ella, pues el razonamiento consiste en la observación de que allí donde se dan ciertas relaciones, se hallarán también otras y, en consecuencia, requiere la exhibición de las mismas en un icono. Durante mucho tiempo se ha considerado un enigma el hecho de que, por una parte, la matemática tenga una naturaleza puramente deductiva y establezca sus conclusiones de forma apodíctica, a la vez que, por otra, presenta una serie de sorprendentes descubrimientos tan rica y aparentemente interminable como cualquier ciencia observacional. Ha habido varios intentos de resolver esta paradoja por el procedimiento de echar abajo alguna de estas dos aserciones, pero ninguno ha tenido éxito. Pues lo cierto es que todo razonamiento deductivo, hasta el simple silogismo, envuelve un elemento de observación por cuanto que la deducción consiste en construir un icono o diagrama, las relaciones entre cuyas partes presentarán una absoluta analogía con las de las partes del objeto de razonamiento, en experimentar con esta imagen en la imaginación y en observar el resultado con objeto de descubrir aquellas relaciones entre las partes que han pasado desapercibidas. Tomemos, por ejemplo, la fórmula silogística

Todo M es P
S es M
∴ S es P.

Esta no es en realidad más que un diagrama de las relaciones entre S, M y P. Exhibe el hecho de que el término medio aparece en las dos premisas, como no puede menos de hacer porque, de lo contrario, la notación carecerá de utilidad. Por lo que al álgebra se refiere, la idea misma de que es un arte estriba en el hecho de que presenta fórmulas que se pueden manipular y que, observando los efectos de esta manipulación, descubrimos propiedades que de lo contrario no podríamos identificar. Nuestra guía en esta manipulación no es otra que ciertos descubrimientos previos que están recogidos en fórmulas generales. Estas no son sino los modelos que hemos de imitar en nuestras operaciones y constituyen los *iconos por excelencia* del álgebra.

Las letras del álgebra aplicada son generalmente expresiones-caso, pero las x, y, z, etc., de una fórmula general como, por ejemplo,

$$(x+y)z=xz+yz,$$

son espacios en blanco que han de ser rellenados con expresiones-caso; son índices de expresiones-caso. Es cierto que una fórmula como ésta podría ser reemplazada por una regla formulada de forma abstracta (como, por ejemplo, la de que la multiplicación es distributiva), pero de un enunciado abstracto así no podría hacerse ninguna aplicación sin antes traducirlo a una imagen sensible.

En este trabajo me propongo desarrollar un álgebra que resulte adecuada para el tratamiento de todos los problemas de la lógica deductiva, mostrando qué clase de signos es preciso emplear en cada etapa del desarrollo. Con ello lograré tres objetivos. El primero es la ampliación de las potencialidades del álgebra lógica a la totalidad de su propio ámbito. El segundo lo constituye la ilustración de principios que subyacen a toda notación algebraica. El tercero, la enumeración de los tipos esencialmente distintos de inferencia necesaria, pues es evidente que, cuando la notación que basta para poner de manifiesto una inferencia se revela insuficiente para justificar otra, esta última entraña un elemento inferencial ausente en la primera. En consecuencia, el procedimiento empleado ha de llevar a una lista de categorías de razonamiento, cuyo interés no depende de la forma algebraica de considerar la cuestión. No está en mi mano perfeccionar el álgebra lo suficiente como para poder ofrecer fáciles fórmulas para obtener conclusiones lógicas: lo único que puedo hacer es facilitar un método mediante el cual poder llegar a toda conclusión legítima y evitar toda la que sea falaz. Pero no me cabe la menor duda de que otros vendrán que, prosiguiendo estas investigaciones, lograrán dar a la notación una forma que será de enorme utilidad para el trabajo matemático. Tengo incluso la esperanza de que lo por mí hecho suponga un primer paso para la resolución de uno de los principales problemas que tiene planteados la lógica: el de dar con un procedimiento para el descubrimiento de métodos en matemáticas.

2. Lógica no-relativa

De acuerdo con la lógica estándar, una proposición es o bien verdadera o bien falsa y no caben más distinciones. Esta es la concepción descriptiva, como dicen los geómetras; la métrica sería que toda proposición es más o menos falsa y que en realidad se trata de una cuestión de cantidad. Aquí vamos a adoptar la primera de estas dos concepciones.

Representemos las proposiciones mediante cantidades. Sean v y f dos valores constantes y sean v y f los valores de las cantidades que representan una proposición verdadera y falsa respectivamente. Así, si x es una proposición, el hecho de que x es o bien verdadera o bien falsa se escribe

$$(x-f)\ (v-x)=0.$$

De suerte que

$$(x-f)\ (v-y)=0$$

significará que o x es falsa o y verdadera. Esto puede decirse que es lo mismo que decir que 'si x es verdadera, y es verdadera'. En general, una proposición hipotética no se limita a establecer lo que de hecho sucede, sino que establece lo que es invariablemente verdadero en un universo de posibilidad. No obstante, esta proposición se restringe a un solo estado de cosas: el real.

Nos hallamos así en posesión de una notación lógica en la que ya se puede representar el silogismo. Tomemos las premisas 'si x es verdadera, y es verdadera' y 'si y es verdadera, z es verdadera'. Estas se escriben

$$(x-f)\ (v-y)=0,$$
$$(y-f)\ (v-z)=0.$$

Multipliquemos la primera por $(v-z)$ y la segunda por $(x-f)$ y sumémoslo. Tenemos

$$(x-f)\ (v-f)\ (v-z)=0,$$

o, dividiendo por $v-f$, que no puede ser 0,

$$(x-f)\ (v-z)=0,$$

lo cual establece la conclusión silogística «si x es verdadera, z es verdadera».

Pero esta notación tiene el inconveniente de que expresa las proposiciones de dos modos distintos: en forma de cantidades y en forma de ecuaciones, y de que las cantidades son de dos tipos, aquellas que han de ser iguales a v o a f y aquellas que son iguales a *cero*. Para poner remedio a esta situación, renunciemos al empleo de ecuaciones y no realicemos operaciones que puedan dar lugar a otros valores distintos de f y v.

De todas las operaciones sobre una variable simple, no nenesitaremos más que una, pues de una sola proposición en sí misma considerada sólo se pueden decir dos cosas: que es verdadera y que es falsa,

$$x=v \qquad \text{y} \qquad x=f.$$

La primera de estas ecuaciones se expresa mediante la propia x, la segunda mediante una función, φ, de x, que satisface las siguientes condiciones:

$$\varphi v=f \qquad \varphi f=v.$$

La solución más sencilla a estas ecuaciones es

$$\varphi x=f+v-x.$$

Un producto de n factores de las dos formas $(x-f)$ y $(v-y)$, si no es igual a cero, lo es a $(v-f)^n$. Llamemos P a dicho producto. Entonces $v-\dfrac{\mathrm{P}}{(v-f)^{n-1}}$ es la función más simple de las variables que resulta v cuando el producto se desvanece y f cuando no lo hace. Mediante este procedimiento se puede expresar toda proposición que se refiera a un solo individuo.

Si queremos emplear los signos algebraicos con su sentido habitual, el significado de las operaciones dependerá enteramente de los de v y f. Boole hizo la opción $v=1, f=0$. Esta opción da lugar a las siguientes formas:

$$f+v-x=1-x,$$

que sería mejor escribir $\bar{x}$.

$$V-\frac{(x-f)\ (V-y)}{V-f}=1-x+xy=\overline{x\bar{y}}.$$

$$V-\frac{(V-x)\ (V-y)}{V-f}=x+y-xy.$$

$$V-\frac{(V-x)\ (V-y)\ (V-z)}{(V-f)^2}=x+y+z-xy-xz-yz+xyz$$

$$V-\frac{(x-f)\ (y-\mathrm{f})}{V-f}=1-xy=\overline{xy}.$$

Creo que si se emplea el sistema booleano estricto se debe abandonar el signo $+$. Boole y su seguidor, el señor Venn (cuyas observaciones siempre me parecen provechosas aunque no esté de acuerdo con él), prefieren escribir $x+\bar{x}y$ en lugar de $\overline{\bar{x}\bar{y}}$. Confieso que no veo qué ventajas pueda tener esto, habida cuenta de que el principio distributivo vale también cuando se lo escribe

$$\overline{\bar{x}\,\bar{y}}z=\overline{\bar{x}\bar{z}\ \bar{y}\bar{z}}\S$$

$$\overline{\bar{x}\bar{y}\,\bar{z}}=\overline{\bar{x}\bar{z}}\ \overline{\bar{y}\bar{z}}.$$

La opción $v=l$ y $f=0$ se adecúa a la forma clásica de medir las probabilidades. Pero no es necesario, y muchas veces ni siquiera conveniente, medir las probabilidades de esta manera. Mi idea es que Boole, al construir su álgebra, empezó por considerar las letras como signos que designaban proposiciones o eventos. En su presentación del tema, son nombres de clase, pero no hay ninguna necesidad de interpretarlas así. Tomemos, por ejemplo, la ecuación

$$t=n+hf,$$

que podría significar que el conjunto de los contribuyentes se compone de todos los nativos más de aquellos extranjeros que sean cabeza de familia. Podríamos recoger este significado mediante cualquiera de los sistemas de notación siguientes, que no difieren desde el punto de vista lógico, aunque sí desde el gramatical.

Signo	*Significado 1.er sistema*	*Significado 2.º sistema*
t	Contribuyente	El es un contribuyente
n	Nativo	El es un nativo
h	Cabeza de familia	El es un cabeza de familia
f	Extranjero	El es un extranjero

No hay ningún *índice* que muestre quién es el «El» del segundo sistema, pero esto no supone ninguna diferencia. Decir que él es un contribuyente equivale a decir que es o un nativo o un cabeza de familia extranjero. Desde este punto de vista, las constantes 1 y 0 son simplemente las probabilidades, para el conocedor, de lo que es verdadero y lo que es falso, confiriéndose así unidad a la totalidad del sistema.

Por mi parte, de momento prefiero no asignar valores concretos a *v* y a *f* ni identificar las operaciones lógicas con operaciones aritméticas precisas para así estar libre para poder hacerlo más adelante del modo que pueda resultar más conveniente. Además, en conjunto, el sistema de importación de la aritmética a estas cuestiones es artificial y los booleanos modernos ya no lo emplean. El álgebra de la lógica debe ser desarrollada en sí misma, debiendo la aritmética surgir de la lógica en lugar de llevar a ella. Volviendo de nuevo al punto de partida, supongamos que una letra escrita significa que cierta proposición es verdadera. Esta letra no es sino una *expresión-caso* (*token*). Todo el mundo comprende que hay una referencia al estado real de cosas o a algún otro estado, idea que tiene que haber sido establecida mediante un *índice* y que, en cierto modo, exime de la necesidad de otros. La negación de una proposición se representará escribiendo una línea sobre ella.

En otro lugar he mostrado que el tipo fundamental y primario de relación entre dos proposiciones es el que hemos expresado mediante la forma

$$v-\frac{(x-f)\ (v-y)}{v-f}.$$

Representaremos esto mediante $x \prec y$, que también equivale a $(x-f)\ (v-y)=0$.

Antes hemos establecido que esto significa «si x es verdadera y es verdadera», pero este significado se ve en buena medida modificado por la circunstancia de que sólo se hace referencia al estado real de cosas.

Para dejar del todo clara la cuestión, conviene empezar por definir el significado de una proposición hipotética en general. Cuáles puedan ser los usos del lenguaje es una cuestión que no nos concierne, pues éste ha sufrido modificaciones de significado en las fórmulas lógicas técnicas, lo mismo que en otros tipos especializados de discurso. La cuestión es ¿cuál es el sentido que es más útil conferir a la proposición hipotética en lógica? Pues bien, la peculiaridad de la proposición hipotética estriba en que va más allá del estado de cosas real y afirma lo que sucedería de ser las cosas distintas a como son o pueden ser. La utilidad que esto tiene está en que nos pone en posesión de una regla, a saber, que «si A es verdadero, B es verdadero», tal que si más tarde llegáramos a saber algo que ahora no sabemos, a saber, que A es verdadero, entonces, en virtud de esta regla nos encontraríamos con que sabemos también alguna otra cosa, a saber, que B es verdadero. No puede caber duda alguna de que lo Posible, en su significación primaria, es aquello que, hasta donde alcanza nuestro conocimiento, es verdadero, aquello cuya falsedad no conocemos. Este propósito se ve, por tanto, satisfecho si, dentro del ámbito entero de la posibilidad, en cualquier estado de cosas en que A es verdadero, lo es también B. Por consiguiente, sólo hay un estado de cosas que puede hacer falsa a la proposición hipotética: aquel en que siendo A verdadero, B es falso. Los estados de cosas en que A es falso, lo mismo que aquellos en que B es verdadero, no pueden hacerla falsa. Por tanto, si B es una proposición verdadera en todos los casos que puedan presentarse dentro del ámbito total de la posibilidad, entonces la proposición hipotética, tomada en su sentido lógico, no puede menos de ser considerada como verdadera, cualquiera que sea el uso del lenguaje ordinario. Si, por otro lado, A no es verdadero en ningún caso dentro de todo el ámbito de la posibilidad, entonces es totalmente irrelevante el considerar como verdadera o como falsa a la proposición hipotética, ya que carece de utilidad. Pero, teniendo en cuenta que los casos en los que el antecedente es falso no hacen falsa, en ningún otro caso, a una proposición hipotética, lo más sencillo será clasificarla entre las proposiciones verdaderas. Este es, en cualquier caso, el sentido que conferiré a la proposición hipotética en este trabajo.

El ámbito de la posibilidad es considerado más ampliamente en un caso, en un sentido más estricto, en otro. En este caso, se considera restringido al estado de cosas real. Por consiguiente, tal como la consideramos aquí, la proposición

$$a \prec b$$

es verdadera si b es verdadera o a es falsa, pero es falsa en el caso de que a sea verdadera y, en cambio, b sea falsa. Pero, aunque nos restrinjamos al estado de cosas real, de todos modos, cuando nos encontremos con que una fórmula de esta índole es verdadera por necesidad lógica, resultará aplicable a todos los estados de cosas del ámbito de la posibilidad lógica. Así, por ejemplo, veremos que de $x \overline{\prec} y$ podemos inferir $z \prec x$. Esto no significa que por el hecho de que en el estado de cosas real x sea verdadera e y sea falsa, en todo estado de cosas ocurre que z es falsa o x verdadera, sino que significa que en todo estado de cosas en el que resulte que x es verdadera e y falsa, z será falsa o x verdadera. En este sentido, no se restringe al estado de cosas real, sino que se extiende a cualquier estado de cosas.

El *primer icono* del álgebra se halla contenido en la fórmula de la identidad

$$x \prec x.$$

Esta fórmula no sirve para justificar por sí misma ninguna transformación, ninguna inferencia. Sólo prmite justificar el que sigamos manteniendo aquello que hemos mantenido (aún cuando hayamos podido olvidar de qué modo nos hemos visto justificados en un principio a mantenerlo).

El *segundo icono* se halla contenido en la regla según la cual se pueden cambiar de lugar los distintos antecedentes de una *consequentia*, esto es, según la cual de

$$x \prec (y \prec z)$$

podemos pasar a

$$y \prec (x \prec z).$$

Esto se establece en la fórmula

$$\{x \prec (y \prec z)\} \prec \{y \prec (x \prec z)\}.$$

Pero, puesto que éste es el caso, se pueden omitir los paréntesis, de forma que podemos escribir

$$y \prec x \prec z.$$

Por la fórmula de la identidad

$$(x \prec y) \prec (x \prec y);$$

y cambiando los antecedentes

$$x \prec \{(x \prec y) \prec y\},$$

lo cual, omitiendo los paréntesis innecesarios, se convierte en

$$x \prec (x \prec y) \prec y.$$

Esto equivale a decir que si en un estado de cosas x es verdadera, y la proposición «si x, entonces y» también lo es, entonces en dicho estado de cosas, y también es verdadera. Este no es sino el *modus ponens* de la inferencia hipotética, el cual constituye la forma más rudimentaria de razonamiento.

Decir que $(x \prec x)$ es generalmente verdadera equivale a decir que lo es en todo estado de cosas, como, por ejemplo, aquel en el que y es verdadera; por tanto podemos escribir

$$y \prec (x \prec x),$$

y luego, por transposición de los antecedentes,

$$x \prec (y \prec x),$$

o, lo que es lo mismo, de x podemos inferir $y \prec x$.

El *tercer icono* se halla implícito en el principio de la transitividad de la cópula que se establece en la siguiente fórmula

$$(x \prec y) \prec (y \prec z) \prec x \prec z.$$

De acuerdo con este principio, si en todos los casos y se sigue de x y z de y, entonces z se sigue de x. Este no es sino el principio del silogismo en *Barbara*.

Ya hemos visto que de x se sigue $y \prec x$. En consecuencia, por la transitividad de la cópula, si de $y \prec z$ se sigue z, entonces de x se sigue z o, lo que es lo mismo, de

$$(y \prec x) \prec z$$

se sigue

$$x \prec z,$$

esto es,

$$\{(y \prec x) \prec z\} \prec x \prec z.$$

La notación original $x \prec y$ nos ha servido tal cual para expresar la simple fórmula de la identidad. Para expresar el principio de la transformación de antecedentes ha sido precisa una ampliación de la forma de concebir la notación con objeto de hacer complejos los propios términos; este nuevo *icono* ha dado lugar a nuevas proposiciones. El tercer *icono* introduce la idea de una cadena de consecuencias. Lo que ahora tenemos que hacer es ampliar de nuevo la notación con objeto de introducir la negación. Hemos visto ya que si a es verdadera, podemos escribir $x \prec a$, sea x lo que quiera que sea. Sea b tal que podamos escribir $b \prec x$, sea x lo que quiera que sea. Entonces b es falsa. Tenemos aquí un *cuarto icono* que confiere a diversas fórmulas un sentido nuevo. Así, por ejemplo, el principio de intercambio de antecedentes es el de que de

$$x \prec (y \prec z)$$

podemos inferir

$$y \prec (x \prec z).$$

Dado que z es cualquier proposición que se nos antoje, esto equivale a decir que si de la verdad de x se sigue la falsedad de y, entonces de la verdad de y se sigue la falsedad de x.

En cuanto a la fórmula

$$x \prec \{(x \prec y) \prec y\}$$

se ve que significa que de x podemos inferir que de aquellas cosas que se siguen de x y *a fortiori* de todo lo que se siga de x se sigue lo que queramos. Esto quiere decir, por tanto, que de x se sigue la falsedad de la negación de x, lo cual constituye el principio de contradicción.

Por su parte, la fórmula de la transitividad de la cópula, esto es

$$\{x \prec y\} \prec \{(y \prec z) \prec (x \prec z)\}$$

se ve ahora que justifica la inferencia

$$\begin{array}{l} x \prec y \\ \therefore\ \bar{y} \prec \bar{x}. \end{array}$$

La misma fórmula justifica el *modus tollens*,

$$\begin{array}{l} x \prec y \\ \bar{y} \\ \therefore\ \bar{x} \end{array}$$

Del mismo modo, la fórmula

$$\{(y \prec x) \prec z\} \prec (x \prec z)$$

muestra que de la falsedad de $y \prec x$ se puede inferir la falsedad de x. Mediante este mecanismo se pueden reducir sin dificultad a *Barbara* todos los modos silogísticos tradicionales.

Para el principio del tercio excluso y otras proposiciones afines se requiere un *quinto icono*. Una de las fórmulas de este tipo más elementales es la siguiente:

$$\{(x \prec y) \prec x\} \prec x.$$

Es difícil que sea axiomática, pero que es verdadera se puede ver del siguiente modo. Sólo puede ser falsa si el consecuente último x es falso a la vez que su antecedente $(x \prec y) \prec x$ es verdadero. Si éste es verdadero, o bien su consecuente x es verdadero, en cuyo caso la fórmula total sería verdadera, o bien su antecedente $x \prec y$ es falso. Pero en este caso, el antecedente de $x \prec y$, esto es x, tiene que ser verdadero[3].

---

[3] Es interesante observar que este razonamiento es dilemático. De hecho, el dilema lleva implícito el quinto icono. El dilema fue introducido en la lógica por los humanistas del *renacimiento*, que lo tomaron de la retórica, pero en esta época el estudio de la lógica se hacía con tan poca axactitud que no es de extrañar que la especial naturaleza de este tipo de razonamiento pasara inadvertida. Esta situación llevó a suponer que toda la lógica no-relativa era susceptible de ser derivada de los principios de la antigua silogística y este error se halla implícito en el capítulo 2 de mi trabajo incluido en el volumen tercero de esta revista. Mi amigo el profesor Schröder detectó el error y mostró que las fórmulas distributivas

$$(x+y)z \prec xz+yz$$
$$(x+z)\ (y+z) \prec xy+z$$

no pueden deducirse de principios silogísticos. (Esta cuestión es ampliamente discutida por Schröder en sus *Vorlesungen über die Algebra der Logik*, Bd. 1, § 12 (1890)). Yo, por mi parte, he descubierto y establecido de forma independiente más o menos lo mismo. (*Studies in Logic*, p. 189). No hay un consenso total a propósito de la definición del dilema, pero lo más útil sería definirlo como un silogismo que depende de las fórmulas distributivas anteriores. Las fórmulas de la distribución

$$xz+yz \prec (x+y)z$$
$$xy+z \prec (x+z)\ (y+z)$$

son estrictamente silogísticas. Los modos añadidos por De Morgan son modos potencialmente dilemáticos que dependen del principio del tercio excluso.

De la fórmula que acabamos de dar se sigue

$$\{(x\prec y)\prec a\}\prec x,$$

en la que a se emplea en un sentido tal que $(x\prec y)\prec a$ significa que de $(x\prec y)$ se sigue toda proposición. Así entendida, esta fórmula establece el principio del tercio excluso, esto es, el de que de la falsedad de la negación de x se sigue la verdad de x.

El álgebra lógica hasta ahora desarrollada incluye signos de los siguientes tipos.

Primero, *tokens*; signos de proposiciones simples, como, por ejemplo t, para esquematizar 'El es un contribuyente', etc.

Segundo, el signo operativo $\prec$, que también pertenece a la categoría de los *tokens*.

Tercero, la yuxtaposición de letras a derecha e izquierda del signo operativo. Esta yuxtaposición cumple la función de un índice, al indicar las conexiones que se dan entre los símbolos.

Cuarto, los paréntesis que cumplen la misma función.

Quinto, las letras a, β, etc., que son índices de *tokens* cualesquira que sirven para expresar la negación.

Sexto, los índices de *tokens*, x, y, z, etc., empleados en las fórmulas generales.

Séptimo, las fórmulas generales mismas, que son *iconos* o ejemplares de procedimientos algebraicos.

Octavo, el cuarto *icono* que permite una segunda interpretación de las fórmulas generales.

Podríamos prescindir de los signos de las clases quinta y octava —los mecanismos mediante los cuales expresamos la negación— adoptando un segundo signo operacional, $\bar{\prec}$, tal que

$$x\bar{\prec}y$$

signifique que $x=v$, $y=f$. Con éste, necesitaríamos nuevos índices de conexiones y nuevas fórmulas generales. Probablemente ésta fuera la mejor notación. En dicho caso tendríamos dos signos operacionales,pero ningún signo de negación. Las formas de álgebra booleana hasta ahora empleadas tienen o bien dos signos operacionales y otro específico para la negación, o bien tres signos operacionales. Uno de ellos es en este caso superfluo. Así, en la notación usual tenemos

$$\overline{x+y}=\bar{x}\bar{y}$$
$$\bar{x}+\bar{y}=\overline{xy}$$

que muestran dos formas de representar el mismo hecho. El aparente paralelismo entre los dos conjuntos de teoremas tan notablemente expuesto por Schröder, se debe enteramente a esta doble forma en que puede representarse todo. Pero aunque el sistema estándar no es, desde el punto de vista analítico, tan adecuado a su propósito como el que hemos expuesto aquí, sin embargo, como ocurre en muchos otros casos en el álgebra, lo que tiene de superfluo hace que posea una gran facilidad de manipulación.

Las fórmulas generales dadas antes no resultan útiles en la práctica. Podemos prescindir de ellas, así como de uno de los índices de *tokens* que en ellas aparecen mediante el empleo de las siguientes reglas. Una proposición de la forma

$$x \prec y$$

es verdadera si $x=f$ o $y=v$. Sólo es falsa si $y=f$ y $x=v$. Una proposición representada de la forma

$$x \overline{\prec} y$$

es verdadera si $x=v$ e $y=f$, y es falsa si o $x=f$ o $y=v$. En consecuencia, para averiguar si una fórmula es necesariamente verdadera sustituyamos sus letras por f y v y veamos si se la puede suponer falsa para cualquiera de esas asignaciones de valores. Tomemos, por ejemplo, la fórmula

$$(x \prec y) \prec \{(y \prec z) \prec (x \prec z)\}.$$

Para hacerla falsa hemos de tomar

$$x \prec y = v$$
$$\{(y \prec z) \prec (x \prec z)\} = f$$

Esto da lugar a

$$(y \prec z) = v, \qquad (x \prec z) = f, \qquad x = v, \qquad z = f.$$

Sustituyendo por esos valores en

$$(x \prec y) = v \qquad (y \prec z) = v,$$

tenemos

$$(v \prec y) = v \qquad (y \prec f) = v,$$

que no pueden ser satisfechas a la vez.

Para poner otro ejemplo, busquemos la conclusión de las siguientes premisas: cualquier persona con la que podría casarme sería o bella o sin atractivo; cualquier persona con la que podría casarme sería una mujer; ninguna mujer bella sería un buen partido para desposarla; ninguna mujer sin atractivo sería un buen partido para desposarla. Sea

m, cualquier persona con la que pudiera casarme;
b, bella;
b, sin atractivo;
w, mujer;
i, mal partido;

Las premisas son entonces:

$$m \prec (b \prec f) \prec p,$$
$$m \prec w,$$
$$w \prec b \prec i,$$
$$w \prec p \prec i.$$

Sea x la conclusión. Entonces,

$$[m \prec (b \prec f) \prec p] \prec (m \prec w) \prec (w \prec b \prec i) \prec (w \prec p \prec i) \prec x$$

es necesariamente verdadera. Ahora bien, si suponemos que $m = v$, entonces la proposición sólo podría resultar falsa interpretando $w = v$ y o b o $p = v$. En este último caso, la proposición sólo podría resultar falsa interpretando $i = v$. Por consiguiente, si x sólo puede resultar f si se interpreta $m = v$, $i = f$, es decir, si $x = (m \prec i)$, la proposición es necesariamente verdadera.

En este procedimiento introducimos los dos símbolos de segunda intención f y v, mantenemos dos índices de *tokens*, x e y, y nos servimos de un *icono* un tanto complejo, acompañado de una determinada prescripción para su empleo.

Cabe un procedimiento mejor y es el siguiente: hemos visto que

$$x \prec (y \prec z)$$

se puede escribir

$$x \prec y \prec z;$$

mientras que

$$(x \prec y) \prec z$$

debe conservar los paréntesis. Ampliemos esta regla con el fin de hacerla más general y mantengamos la tesis de que es necesario incluir *siempre* entre paréntesis el antecedente.

Escribamos entonces $(x) \prec y$ en lugar de $x \prec y$. Si ahora nos limitamos a cambiar la apariencia externa de dos signos, a saber, si nos servimos del *vinculum* en lugar del paréntesis y del signo $+$ en lugar de el de $\prec$, nos encontraremos con

$x \prec y$	escrito	$\bar{x} + y$
$x \prec y \prec z$	escrito	$\bar{x} + \bar{y} + z$
$(x \prec y) \prec z$	escrito	$\overline{\bar{x} + \bar{y}} + z$, etc.

Por otro lado, en lugar de $\overline{x \prec y}$ podemos escribir $\overline{\bar{x} + y}$, lo cual quiere decir que $x + y$ es un antecedente respecto de cualquier consecuente que pueda considerarse, con lo que el *vinculum* queda identificada con el signo de negación. También podemos emplear el signo de multiplicación como abreviatura, interpretando

$$xy = \overline{\bar{x} + \bar{y}} = \overline{x \prec \bar{y}}.$$

Con este sistema, la adición y la multiplicación quedan sometidas a todas las reglas del álgebra ordinaria, así como a las siguientes:

$$y+x\bar{x}=y \qquad y(x+\bar{x})=y$$
$$x+\bar{x}=v \qquad \bar{x}x=f$$
$$xy+z=(x+z)\ (y+z).$$

Dada una proposición cualquiera, podemos añadirle la expresión que nos plazca, así como eliminar cualquier factor de cualquier término. Se pueden multiplicar las expresiones de proposiciones distintas conocidas de forma independiente. Estas son, en líneas generales, las reglas de procedimiento introducidas por el señor Mitchell. Así, por ejemplo, las premisas de Barbara son

$$\bar{x}+y \quad \text{y} \quad \bar{y}+z.$$

Multiplicándolas obtenemos el resultado

$$(\bar{x}+y)\ (\bar{y}+z)=\bar{x}\bar{y}+yz.$$

Suprimiendo $\bar{y}$ e y llegamos a la conclusión $\bar{x}+z$.

3. Lógica de relativos primo-intencional

El álgebra de Boole provee de un lenguaje mediante el cual se puede expresar todo aquello que se puede decir cuando no se habla más que de un individuo cada vez. Es cierto que se puede afirmar que ciertas propiedades pertenecen a una clase entendida como un todo, pero sólo aquellas que se pueden considerar pertenecientes a cada invididuo por separado. La lógica de relativos considera enunciados que involucran dos o más individuos a un tiempo. Los índices resultan aquí necesarios. Tomando, en primer lugar, una forma degenerada de relación, podemos escribir $x_i y_j$ para decir que x es verdadero del individuo i a la vez que y es verdadero del individuo j. Si z es una propiedad relativa, z_{ij} significará que i está en esa relación con j. Por este procedimiento podemos expresar relaciones de gran complejidad. Así, si

$$\begin{array}{lll} 1, & 2, & 3, \\ 4, & 5, & 6, \\ 7, & 8, & 9, \end{array}$$

son puntos en un plano y l_{123} significa que 1, 2 y 3 están en una línea, una conocida proposición de la geometría se puede escribir

$$l_{159} \prec l_{267} \prec l_{348} \prec l_{147} \prec l_{258} \prec l_{369} \prec l_{123} \prec l_{456} \prec l_{789}.$$

En esta notación se halla implícito un *sexto icono*.

Llegamos ahora a la distinción entre *alguno* y *todo*, distinción que guarda un paralelismo con la que existe entre verdad y falsedad y que es, por tanto, descriptiva.

Todos los intentos encaminados a introducir esta distinción en el álgebra de Boole han supuesto otros tantos fracasos de mayor o menor envergadura hasta que el señor Mitchell ha mostrado cómo se había de establecer. Su método no consiste en realidad más que en hacer que la expresión total de la proposición conste de dos partes, una expresión puramente booleana que hace referencia a un individuo y una parte cuantificacional que establece qué individuo es ése. Así, si k significa 'él es un rey' y h 'él es feliz', la parte booleana

$$(\bar{k}+h)$$

significa que el individuo del que se habla o no es rey o es feliz. Aplicando la cuantificación, podemos escribir

$$\text{Todo } (\bar{k}+h)$$

para expresar que esto es verdadero de todo individuo del universo (limitado), o

$$\text{Algún } (\bar{k}+h)$$

para expresar que existe un individuo que o no es rey o es feliz.

Así pues,

Algún (kh)

significa algún rey es feliz, y

Todo (kh)

significa todo invidiuo es a un tiempo rey y feliz. Las reglas que rigen el uso de esta notación son obvias. Las dos proposiciones

Todo (x) Todo (y)

son equivalentes a

Todo (xy)

De las dos proposiciones

Todo (x) Algún (y)

podemos inferir

Algún (xy)[4].

---

[4] Quisiera señalar de pasada que la cuantificación puede hacerse numérica, dando lugar entonces a las inferencias numéricamente definidas de De Morgan y Boole. Supongamos que por lo menos 2/3 de la compañía tienen corbata blanca y por lo menos 3/4 tienen frac. Esquematicemos mediante w 'él tiene una corbata blanca' y mediante d 'él tiene un frac'. Entonces las dos proposiciones anteriores serían

$$\frac{2}{3}(w) \quad \text{y} \quad \frac{3}{4}(d).$$

Estas dos proposiciones han de ser multiplicadas entre sí. Pero recordaremos que xy es una mera abreviatura de $\overline{\bar{x}+\bar{y}}$, por lo que en consecuencia debemos escribir

$$\overline{\overline{\frac{2}{3}}w+\overline{\frac{3}{4}}d}.$$

Ahora bien, $\overline{2/3w}$ es la negación de $2/3w$, y esta negación puede escribirse $(>1/3)\bar{w}$, esto es, más de un tercio del universo (la compañía) no tienen corbata

El señor Mitchell ha hecho también una muy interesante e instructiva ampliación de su notación para expresar *alguno* y *todo* a un universo bi-dimensional, esto es, a la lógica de relativos. Para hacer tan icónica como sea posible esta notación, emplearemos aquí para representar *alguno* y *todo* los símbolos Σ y Π, que sugieren una suma y un producto respectivamente. Así $\Sigma_i x_i$ significa que x es verdadera de alguno de los individuos designados por i o, lo que es lo mismo,

$$\Sigma_i x_i = x_i + x_j + x_k + \text{etc.}$$

Del mismo modo, $\Pi_i x_i$ significa que x es verdadera de todos esos individuos o, lo que es lo mismo,

$$\Pi_i x_i = x_i x_j x_k \text{ etc.}$$

Si x es una relación simple, $\Pi_i \Pi_j x_{ij}$ significa que todo i está en esa relación con todo j, $\Sigma_i \Pi_i x_{ij}$ que algún i está en esa

---

blanca. Del mismo modo $\overline{3/4d} = (<1/4)\bar{d}$. Por tanto, las dos premisas combinadas se convierten en

$$\overline{\left(>\frac{1}{3}\right)\bar{w} + \left(>\frac{1}{4}\right)\bar{d}}.$$

Ahora bien,

$$\left(>\frac{1}{3}\right)\bar{w} + \left(>\frac{1}{4}\right)\bar{d}$$

nos da

$$\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) \quad (\bar{w} + \bar{d}).$$

Tenemos entonces

$$\overline{\left(\frac{7}{12}\right) \quad (\bar{w} + \bar{d})},$$

lo cual equivale a

$$\left(\text{al menos } \frac{5}{12}\right) \quad (\bar{w} + \bar{d}),$$

que es la conclusión.

relación con todo j; $\Pi_j\Sigma_i x_{ij}$ que para todo j hay un i que está en esa relación con algún j. Conviene subrayar que $\Sigma_i x_i$ y $\Pi_i x_i$ son sólo similares a una suma y a un producto; no son de naturaleza exactamente idéntica, ya que los individuos del universo pueden ser innumerables.

Llegados a este punto, al lector seguramente le gustaría no tanto formarse tan buen concepto de esta notación como realizar alguna práctica en la traducción del lenguaje ordinario a este sistema, retrocediendo otra vez. Supongamos que l_{ij} significa que i es un amante de j y b_{ij} que i es un benefactor de j. Entonces

$$\Pi_i\Sigma_j \mathrm{l}_{ij}\mathrm{b}_{ij}$$

significa que todo es a la vez amante y benefactor de algo; y

$$\Pi_i\Sigma_j l_{ij} b_{ji}$$

que todo es amante de un benefactor de él mismo.

$$\Sigma_i\Sigma_k\Pi_j(l_{ij}+b_{jk})$$

significa que hay dos personas, una de las cuales ama a todo no benefactor de la otra (si ama o no a alguno de ellos no se especifica). Supongamos que g_i significa que i es un grifo y c_i que i es una quimera, entonces

$$\Sigma_i\Pi_j(\mathrm{g}_i\mathrm{l}_{ij}+\bar{\mathrm{c}}_j)$$

significa que si hay quimeras, hay algún grifo que ama a todas ellas, mientras que

$$\Sigma_i\Pi_j g_i\,(l_{ij}+\bar{c}_j)$$

significa que hay un grifo y que éste ama a toda quimera que existe (si es que existe alguna). En cambio,

$$\Pi_j\Sigma_i g_i\,(l_{ij}+\bar{c}_j)$$

significa que existen grifos (al menos uno) y que alguno de ellos ama a todas las quimeras que puedan existir, y

$$\Pi_j \Sigma_i (g_i l_{ij} + \bar{c}_j)$$

significa que toda quimera (si existe alguna) es amada por algún grifo.

Representemos: Todas las partes del mundo o bien sufren unas veces el azote del cólera y otras el de la viruela (sin el cólera), o bien no sufren nunca el de la fiebre amarilla y el de la peste a la vez. Supongamos que

c_{ij} significa el lugar i sufre el cólera en el momento j,
s_{ij} significa el lugar i sufre la viruela en el momento j,
y_{ij} significa el lugar i sufre la fiebre amarilla en el momento j,
p_{ij} significa el lugar i sufre la peste en el momento j.

Entonces escribimos

$$\Pi_i \Sigma_j \Sigma_k \Pi_l \, (c_{ij} \bar{c}_{ik} s_{ik} + \bar{y}_{il} + \bar{p}_{il})$$

Expresemos lo siguiente: es preciso admitir alguna de estas dos teorías, a saber: primera, que ningún hombre es en todo momento altruista o libre, y que algunos hombres son siempre hipócritas y que siempre hay algunos hombres que se comportan amigablemente con otros de quienes en otras ocasiones son enemigos, o, segunda, que en todo momento todos los hombres son como ángeles o como demonios. Supongamos que

u_{ij} significa el hombre i es altruista en el momento j,
f_{ij} significa el hombre i es libre en el momento j,
h_{ij} significa el hombre i es hipócrita en el momento j,
a_{ij} significa el hombre i es un ángel en el momento j,
d_{ij} significa el hombre i es un demonio en el momento j,
p_{ijk} significa el hombre i se comporta amigablemente en el momento j con el hombre k,
e_{ijk} significa el hombre i es enemigo en el momento j del hombre k,
1_{jm} los dos objetos j y m son idénticos.

Entonces la proposición es

$$\Pi_i \Sigma_h \Pi_j \Sigma_k \Sigma_l \Sigma_m \Pi_n \Pi_p \Pi_q (\bar{u}_{ij} \bar{f}_{ij} h_{hj} p_{kjl} e_{kml} \bar{1}_{jm} + a_{pn} + d_{qn})$$

Ahora tenemos que considerar la forma en que se puede operar con este cálculo. Dista mucho de ser cierto que el único problema deductivo sea extraer una conclusión de unas premisas dadas. Por el contrario, es igual de importante contar con un método que permita averiguar qué premisas llevarán a una cierta conclusión. Hay además otros problemas de transformación, en los que se nos da cierto sistema de hechos y de lo que se trata es de describir éste en otros términos distintos de una determinada índole. Tal es, por ejemplo, el caso del problema de las quince jóvenes y el de otros relativos a *sistemas*. Aquí me conformaré, sin embargo, con mostrar cómo, dado un conjunto de premisas, se las puede unir y cómo se pueden eliminar ciertas letras. De los diversos métodos que podrían seguirse, expondré aquel que me parece en conjunto el más útil.

En primer lugar, se colocan juntas las distintas premisas, que han debido escribirse con distintos índices (no empleándose el mismo índice en dos proposiciones), y se colocan a la izquierda todos los Π's y Σ's. Esto está claro que puede hacerse, dado que

$$\Pi_i x_i \cdot \Pi_j x_j = \Pi_i \Pi_j x_i x_j$$
$$\Sigma_i x_i \cdot \Pi_j x_j = \Sigma_i \Pi_j x_i x_j$$
$$\Sigma_i x_i \cdot \Sigma_j x_j = \Sigma_i \Sigma_j x_i x_j.$$

En segundo lugar, sin alterar el orden de los índices de ninguna de las premisas, se pueden intercambiar entre sí los Π's y Σ's pertenecientes a las distintas premisas, debiendo colocarse, en la medida en que ello sea posible, los Σ's a la izquierda de los Π's. Tenemos

$$\Pi_i \Pi_j x_{ij} = \Pi_j \Pi_i x_{ij}$$
$$\Sigma_i \Sigma_j x_{ij} = \Sigma_j \Sigma_i x_{ij}$$

y también

$$\Sigma_i \Pi_j x_i y_j = \Pi_j \Sigma_i x_i y_j.$$

Pero esta fórmula no vale cuando la i y la j no están separadas. No obstante, tenemos

$$\Sigma_i \Pi_j x_{ij} \prec \Pi_i \Sigma_j x_{ij}.$$

Convendrá por tanto empezar colocando los Σ's a la izquierda, en la medida en que esto sea posible, pues en la última etapa del trabajo se los podrá mover a la derecha, pero no hacia la izquierda. Así, por ejemplo, si los operadores de las dos premisas son $\Pi_i \Sigma_j \Pi_k$ y $\Sigma_x \Pi_y \Sigma_z$, podemos unirlos de las dos formas siguientes:

$$\Sigma_x \Pi_y \Sigma_z \Pi_i \Sigma_j \Pi_k$$
$$\Sigma_x \Pi_i \Sigma_j \Pi_y \Sigma_z \Pi_k.$$

obteniendo por lo general conclusiones distintas. Generalmente, la habilidad para elegir la colocación más adecuada también contará.

En tercer lugar, lo que a veces resulta conveniente hacer a continuación es manipular la parte booleana de la expresión, siendo éste el momento de eliminar, si se desea, las letras que hayan de ser eliminadas. Para ello, se las reemplaza por relaciones de segunda intención, tales como «otro que», etc. Así, si, por ejemplo, nos encontramos en alguna parte de la expresión con

$$a_{ijk} \bar{a}_{xyz},$$

esto puede reemplazarse por

$$(n_{ix} + n_{jy} + n_{k2}),$$

donde, como es usual, n significa no u otro que. Este tercer paso del proceso es muchas veces completamente indispensable, abarcando una gran variedad de formas, pero en los casos normales puede ser pasado por alto.

En cuarto lugar, el siguiente paso, que tampoco será por lo general necesario, consiste en hacer que los índices refieran a la misma colección de objetos en la medida en que esto pueda tener utilidad. Si la parte cuantificacional o cuantificador, con-tiene Σ_x, y deseamos reemplazar la x por un nuevo índice i, que no esté ya en el cuantificador, y tal que todo x sea un i, podemos hacerlo simplemente multiplicando todas las letras de la parte booleana que tengan como índice x por x_i. *Así,* si tenemos «alguna mujer es un ángel» esquematizado como $\Sigma_w a_w$, podemos reemplazar esta forma por ésta, $\Sigma_i(a_i w_i)$. En general, será más útil reemplazar el índice de un Π por otro más amplio, y esto se hará añadiendo $\bar{x}_i$ a cada letra que tenga a x como índice. Así, si tenemos «todos los perros son animales y todos los animales son vertebrados» esquematizado así:

$$\Pi_d a_d \qquad \Pi_a v_a,$$

donde a y $_a$ significan ambas animal, será conveniente sustituir el último índice por i, representando éste un objeto cualquiera, y esquematizar la proposición

$$\Pi_i\,(\bar{a}_i + v_i).$$

En quinto lugar, el siguiente paso consiste en multiplicar toda la parte booleana por la modificación de la misma producida como consecuencia de la sustitución del índice de un Π cualquiera por cualquier otro índice que esté a la izquierda de él en el cuantificador. Así, en lugar de

$$\Sigma_i \Pi_j l_{ij},$$

podemos escribir

$$\Sigma_i \Pi_j l_{ij} l_{ii}.$$

En sexto lugar, el siguiente paso consiste en una nueva manipulación de la parte booleana consistente primero en añadir a cualquier parte el término que nos plazca; segundo, en eliminar de cualquier parte el factor que queramos, y tercero, en observar que

$$x\bar{x} = f, \qquad x + \bar{x} = v,$$

de suerte que

$$x\bar{x}y+z=z, \qquad (x+\bar{x}+y)z=z.$$

En séptimo lugar se eliminan aquellos Π's y Σ's de la parte cuantificacional cuyos índices ya no aparezcan en la parte booleana.

En la práctica, el quinto paso se dará combinado con parte del sexto y del séptimo. Así, por ejemplo, de $\Sigma_i \Pi_j l_{ij}$ pasaremos, si queremos, de una vez a $\Sigma_i l_{ii}$.

Con los siguientes ejemplos bastará.

Eliminemos b de las premisas $\Sigma_i a_i b_i$ y $\Pi_j(\bar{b}_j+c_j)$. Empezaremos por escribir

$$\Sigma_i \Pi_j a_i b_i (\bar{b}_j+c_j).$$

Por el principio distributivo llegamos a

$$\Sigma_i \Pi_j a_i (b_i \bar{b}_j+b_i c_j).$$

Ahora bien, *siempre será posible suprimir un factor o insertar un término adicional.* Tenemos por consiguiente

$$\Sigma_i \Pi_j a_i (b_i \bar{b}_j+c_j).$$

Mediante el tercer procedimiento podemos insertar si queremos n_{ij} en lugar de $b_i \bar{b}_j$. En uno y otro caso, identificamos j con i y obtenemos la conclusión

$$\Sigma_i a_i c_i.$$

Dadas las premisas

$$\Sigma_h \Pi_i \Sigma_j \Pi_k (a_{hik}+s_{jk} l_{ji})$$
$$\Sigma_u \Sigma_v \Pi_x \Pi_y (\varepsilon_{uyx}+\bar{s}_{yv} b_{vx}).$$

Se trata de eliminar s. La premisa combinada es

$$\Sigma_u \Sigma_v \Sigma_h \Pi_i \Sigma_j \Pi_x \Pi_k \Pi_y (a_{hik}+s_{jk} l_{ji}) (\varepsilon_{uyx}+\bar{s}_{yv} b_{vx}).$$

Identifiquemos k con v y y con j obtendremos:

$$\Sigma_u \Sigma_v \Sigma_h \Pi_i \Sigma_j \Pi_x \, (a_{hiv} + s_{jv} l_{ji}) \; (\varepsilon_{ujx} + \bar{s}_{jv} b_{vx}).$$

A continuación se reduce la parte booleana, con lo que la conclusión será

$$\Sigma_u \Sigma_v \Sigma_h \Pi_i \Sigma_j \Pi_x \, (a_{hiv} \varepsilon_{ujx} + a_{hiv} b_{vx} + \varepsilon_{ujx} l_{ji}).$$

4. Lógica segundo-intencional

Pasemos ahora a considerar la lógica de los términos tomados en sentido colectivo. La notación que hemos desarrollado hasta ahora no nos indica ni siquiera cómo expresar que dos índices, i y j, designan una y la misma cosa. Podemos adoptar un símbolo especial de segunda intención, por ejemplo el 1, para expresar la identidad de suerte que podamos escribir 1_{ij}. Pero esta relación de identidad tiene propiedades peculiares. La primera es que si i y j son idénticos, todo lo que es verdadero de i es verdadero de j. Esto puede escribirse del siguiente modo:

$$\Pi_i \Pi_j \{ \bar{1}_{ij} + \bar{x}_i + x_j \}.$$

El empleo que aquí hacemos del índice general de un *token, x,* muestra que la fórmula es icónica. La otra propiedad es que si todo lo que es verdadero de i es verdadero de j, entonces i y j son idénticos. Supongamos que el símbolo q significa la relación de una cualidad, propiedad, hecho o predicado con su sujeto. Entonces la propiedad que queremos expresar es

$$\Pi_i \Pi_j \Sigma_k \, (1_{ij} + \bar{q}_{ki} q_{kj}).$$

Y la identidad quedará por consiguiente definida del siguiente modo:

$$1_{ij} = \Pi_k \, (q_{ki} q_{kj} + \bar{q}_{ki} \bar{q}_{kj}).$$

Esto es, decir que dos cosas son idénticas equivale a decir que todo predicado es verdadero de ambas o falso de ambas. Acaso pueda parecer un tanto circular introducir la idea de cualidad para expresar la identidad, pero esta impresión se verá modificada si se reflexiona en que $q_{ki}q_{jk}$ significa únicamente que i y j se hallan ambos dentro de la clase o colección k. Si queremos, podemos prescindir del símbolo q, sirviéndonos del índice de un símbolo y refiriéndonos a éste en el cuantificador como si se tratara de un subíndice. Esto quiere decir que podemos escribir

$$1_{ij}=\Pi_x\,(x_i x_j+\bar{x}_i\bar{x}_j).$$

Ahora debemos analizar las propiedades del símbolo q. Todas ellas pueden resumirse en lo siguiente, a saber: que tomando una serie de individuos i_1, i_2, i_3, etc., y otra de individuos j_1, j_2, j_3, etc., hay una colección, clase o predicado que abarca todos los *i's* y excluye todos los *j's* salvo aquellos que sean idénticos a alguno de los *i's*. Esto podría escribirse así:

$$(\Pi_a\Pi_{i_a})\,(\Pi_\beta\Pi_{j\beta})\Sigma_k\,(\Pi_a\Sigma_{i'_a})\Pi_l q_{ki_a}\,(\bar{q}_{kj\beta}+q_{li'_a}q_{lj\beta}+\bar{q}_{li'_a}\bar{q}_{lj\beta}),$$

donde los *i's* y los *i′'s* constituyen el mismo lote de objetos. Esta notación incluye índices de índices. El $\Pi_a\Pi_{ia}$ indica que hemos de tomar una colección cualquiera de *i's* y luego un i de dicha colección. Luego hemos de hacer lo mismo con los *j's*. Podemos luego hallar una cualidad k tal que el i elegido la posea y también tal que el j elegido no la posea salvo que podamos hallar un i que sea idéntico al j elegido. La necesidad de algún tipo de notación para una descripción como esta que trata de clases colectivamente consideradas se desprende de la siguiente consideración: que en un discurso así no estamos hablando ni de un solo individuo (como en la lógica no-relativa) ni tampoco de un pequeño número de individuos considerados cada uno en sí mismo, sino de una clase como un todo, que tal vez esté compuesta de una infinidad de individuos. Esto sugiere un término relativo con una serie indefinida de índices como $x_{ijkl\cdots}$ Sin embargo, dicho relativo será, si no en todos los casos, al menos sí en la mayoría, de tipo degenerado y, en consecuencia, susceptible de ser expresado como antes. Pero parece preferible intentar una descomposición parcial de esta definición. En primer lugar, todo individuo puede ser considerado como una clase. Esto se representa

$$\Pi_i \Sigma_k \Pi_j q_{ki} (\bar{q}_{kj} + 1_{ij}).$$

Este es el *noveno icono*. Luego, dada una clase, hay otra que incluye todo lo que la primera excluye y excluye todo lo que la primera incluye. Esto es,

$$\Pi_l \Sigma_k \Pi_i (q_{li} \bar{q}_{ki} + \bar{q}_{li} q_{ki}).$$

Este es el *décimo icono*. Dadas dos clases hay una clase que incluye todo lo que ambas incluyen y excluye todo lo que ambas excluyen. Es decir,

$$\Pi_l \Pi_m \Sigma_k \Pi_i (q_{li} q_{ki} + q_{mi} q_{ki} + \bar{q}_{li} \bar{q}_{mi} \bar{q}_{ki}).$$

Este es el *undécimo icono*. A continuación, dadas dos clases, hay una clase que incluye la totalidad de la primera y cualquier individuo de la segunda que pueda no haber sido incluido en la segunda y nada más. Es decir,

$$\Pi_l \Pi_m \Pi_i \Sigma_k \Pi_j \{q_{li} + \bar{q}_{mi} + q_{ki} (q_{kj} + \bar{q}_{lj})\}.$$

Este es el *duodécimo icono*.

Para mostrar el modo en que son aplicables estas fórmulas, supongamos que hemos aceptado que todo es o verdadero de i o falso de j. Escribimos entonces:

$$\Pi_k (q_{ki} + \bar{q}_{kj}).$$

El décimo icono arroja como resultado

$$\Pi_l \Sigma_k (q_{li} \bar{q}_{ki} + \bar{q}_{li} q_{ki}) \ (q_{lj} \bar{q}_{kj} + \bar{q}_{lj} q_{kj}).$$

La multiplicación de esas dos fórmulas nos da

$$\Pi_l \Sigma_k (q_{ki} \bar{q}_{li} + q_{lj} \bar{q}_{kj}),$$

o, omitiendo los términos en k

$$\Pi_l\,(\bar{q}_{li}+q_{lj}).$$

Multiplicando esto por el *datum* original e identificando l con k tenemos

$$\Pi_k\,(q_{ki}q_{kj}+\bar{q}_{ki}\bar{q}_{kj}).$$

No hay duda de que se podría hallar algún procedimiento mucho más directo.

Del mismo modo que q designa la relación entre predicado y sujeto, se requiere otro símbolo, que podríamos representar mediante r, para designar la relación conjunta que media entre una relación simple, su relato y su correlato. Esto quiere decir que r_{jai} significa que i está en la relación a con j. Naturalmente, r tendrá una serie de propiedades similares a las de q. No obstante, y por raro que sea, el uso de ambos símbolos es muy diferente. La principal utilidad de r estriba en permitirnos expresar que el número de una clase es al menos tan grande como el de otra. Esto puede hacerse de muchas maneras distintas. Así, en primer lugar, podemos escribir que para cada a hay un b del siguiente modo:

$$\Sigma_a\Pi_i\Sigma_j\Pi_h\{\bar{a}_i+b_jr_{jai}\,(\bar{r}_{jah}+\bar{a}_h+1_{ih})\}.$$

Pero, con un icono análogo al undécimo, tenemos

$$\Pi_a\Pi_\beta\Sigma_\gamma\Pi_u\Pi_v\,(r_{uav}r_{u\gamma v}+r_{u\beta v}r_{u\gamma v}+\bar{r}_{uav}\bar{r}_{u\beta v}\bar{r}_{u\gamma v}).$$

De donde, por medio de un icono análogo al *décimo*, llegamos a la fórmula general

$$\Pi_a\Pi_\beta\Sigma_\gamma\Pi_u\Pi_v\{r_{uav}r_{u\beta}{}^{v}r_{u\gamma v}+\bar{r}_{u\gamma v}\,(\bar{r}_{uav}+\bar{r}_{u\beta v})\}.$$

Sustituyamos r_{ubv} por a_u y multipliquemos por la antepenúltima fórmula. Entonces, identificando u con h y v con j, tenemos

$$\Sigma_a\Pi_i\Sigma_h\Pi_h\{\bar{a}_i+b_jr_{jai}\,(\bar{r}_{jah}+1_{ih})\},$$

que es una expresión bastante más sencilla. Sin embargo, la mejor forma de expresar una proposición como ésa consiste en utilizar la letra c, interpretada como símbolo para expresar la correspondencia de uno a uno. Esto quiere decir que c se definirá mediante las tres fórmulas siguientes:

$$\Pi_a\Pi_u\Pi_v\Pi_w\,(\bar{c}_a+\bar{r}_{uav}+\bar{r}_{uaw}+1_{vw}),$$
$$\Pi_a\Pi_u\Pi_v\Pi_w\,(\bar{c}_a+\bar{r}_{uaw}+r_{vaw}\dagger+1_{uv}),$$
$$\Pi_a\Sigma_u\Sigma_v\Sigma_w\,(c_a+r_{uav}r_{uaw}\bar{1}_{vw}+r_{uaw}r_{vaw}\bar{1}_{uv}).$$

Con ayuda de este símbolo, podemos esquematizar la proposición que hemos estado considerando del siguiente modo:

$$\Sigma_a\Pi_i\Sigma_j c_a\,(\bar{a}_i+b_j r_{jai}).$$

En un apéndice a su memoria sobre la lógica de los relativos, De Morgan, ha enriquecido la ciencia de la lógica con un nuevo tipo de inferencia, el silogismo de transposición de cantidad. De Morgan ha sido uno de los mejores lógicos de todos los tiempos y es indiscutiblemente el padre de la lógica de relativos. No obstante, como consecuencia de lo imperfecto de su teoría, la nueva forma, tal como él la enunció, era un completo paralogismo, al estar omitida una de las premisas. Pero, una vez suplida ésta, esta forma proporciona una buena prueba de la eficacia de la notación lógica. Uno de los ejemplos de De Morgan es el siguiente:

Algún X es Y.
Para todo X hay algo que no es ni Y ni Z.
Por consiguiente hay algo que no es ni X ni Z.

La primera premisa es simplemente

$$\Sigma_a x_a y_a.$$

En cuanto a la segunda, puede escribirse

$$\Sigma_a\Pi_i\Sigma_j c_a\,(\bar{x}_i+r_{jai}\bar{y}_j\bar{z}_j).$$

De estas dos premisas, poco se puede inferir. Para obtener la conclusión anterior es preciso añadir que la clase de los X'*s* es una colección finita; si esto no fuera necesario, resultaría perfectamente válido el siguiente razonamiento (en el que el universo limitado se supone que está formado de números), ya que se adecúa con toda exactitud al esquema de De Morgan:

> Algún número impar es primo.
> A todo número impar corresponde un cuadrado que no es ni primo ni par.
> Por consiguiente, hay algún número que no es ni impar ni par[5].

Ahora bien, decir que un conjunto de objetos es finito equivale a decir que si recorremos uno a uno todos los individuos de la clase, necesariamente llegaremos a uno por el que ya hayamos pasado; esto quiere decir que si cada uno de los elementos del conjunto está en una relación de uno a uno con algún otro, entonces para cada uno de ellos hay alguno que estará en esa misma relación con él. Esto se representa del siguiente modo:

$$\Pi_\beta \Pi_u \Sigma_v \Sigma_s \Pi_t \{\bar{c}_\beta + \bar{x}_u + x_v r_{u\beta v} + x_s (\bar{x}_t + \bar{r}_{t\beta s})\}.$$

Uniendo esto a las dos premisas y a la cláusula segunda de la definición de c, tenemos

$$\Sigma_a \Sigma_a \Pi_\beta \Pi_u \Sigma_v \Sigma_s \Pi_i \Sigma_j \Pi_t \Pi_\gamma \Pi_e \Pi_f \Pi_g x_a y_a c_a (\bar{x}_i + r_{jai} \bar{y}_j \bar{z}_j)$$
$$\{\bar{c}_\beta + \bar{x}_u + x_v r_{u\beta v} + x_s (\bar{x}_t + \bar{r}_{t\beta s})\} \; (\bar{c}_\gamma + \bar{r}_{e\gamma g} + \bar{r}_{f\gamma w} + 1_{ef}).$$

---

[5] Otro de los ejemplos de De Morgan (*Formal Logic*, p. 168) es el siguiente: «Supongamos una persona que, al revisar sus compras del día, se encuentra con que ha extendido tantos cheques bancarios (y tal vez más) como compras ha hecho. Por otro lado, sabe que ha pagado alguna de sus compras en metálico o no mediante cheque, por lo que infiere de aquí que ha tenido que extender algún cheque para alguna otra cosa distinta de las compras del día. Su inferencia es del todo correcta». Supongamos, sin embargo, que lo que hubiera ocurrido fuera lo siguiente: esa persona compró algo y extendió un cheque para pagarlo, pero en lugar de hacerlo con el cheque, pagó con dinero. Luego hizo otra compra por el mismo valor y extendió otro cheque, pero en lugar de pagar con él, pagó con el anterior, cosa que siguió haciendo incesantemente o *ad infinitum*. Es del todo claro que las premisas siguen siendo verdaderas, mientras que la conclusión es en cambio falsa.

Sustituyamos ahora β y γ por α, u y e por a, t y f por j, g por v. El factor representado por i tiene que repetirse, escribiendo, en lugar de i, primero s y luego v. La parte booleana se reduce entonces a

$$(\bar{x}_s + r_{j\alpha s}\bar{y}_j\bar{z}_j)c_\alpha x_a y_a r_{a\alpha v} x_v r_{j\alpha v}\bar{y}_j\bar{z}_j 1_{aj} +$$
$$r_{j\alpha s}\bar{y}_j\bar{z}_j x_s \bar{x}_j (\bar{x}_v + r_{j\alpha v}\bar{y}_j\bar{z}_j)\ (\bar{r}_{a\alpha v} + \bar{r}_{j\alpha v} 1_{aj}),$$

que, omitiendo algunos factores,se convierte en

$$y_a\bar{y}_j 1_{aj} + \bar{x}_j\bar{z}_j,$$

con lo que tenemos la conclusión

$$\Sigma_j\bar{x}_j\bar{z}_j.$$

Es evidente que este procedimiento podría acortarse considerablemente empleando una notación más icónica y menos analítica desde el punto de vista lógico. Para ver lo minuciosamente analítico que es el presente sistema, basta con que reflexionemos en que cada sustitución de índices (y se han hecho nueve para llegar a la última conclusión) constituye un acto de inferencia distinto. Con la supresión de $(y_a\bar{y}_j 1_{aj})$ son diez los pasos inferenciales que median entre las premisas y la conclusión de un silogismo de transposición de cantidad.