SOBRE EL ÁLGEBRA DE LA LÓGICA

Charles S. Peirce (1880)

Traducción castellana de Pilar Castrillo (1988)

© de la traducción: Alianza Editorial

"On the Álgebra of Logic" se publicó originalmente en *American Journal of Mathematics*, vol. 3, (1880), pp. 15-57 y fue recogido en *CP* 3. 154-251. La traducción castellana de Pilar Castrillo se publicó en *Charles S. Peirce. Escritos lógicos*, Alianza Editorial, Madrid 1988.

SOBRE EL ALGEBRA DE LA LOGICA

Parte I. Silogística[1]

1. Derivación de la lógica

Para lograr una clara comprensión del origen de los diferentes signos empleados en el álgebra de la lógica así como de la razón de ser de las fórmulas más importantes, debemos empezar por considerar el modo en que surge la propia lógica.

El pensamiento, en tanto que actividad mental, está indudablemente sujeto a las leyes generales de la acción nerviosa.

Cuando un grupo de nervios reciben un estímulo, los ganglios con que tal grupo está más estrechamente conectado entran, por lo general, en un estado activo que normalmente produce a su vez movimientos corporales. Si el estímulo persiste, la irritación pasa de un ganglio a otro (yendo generalmente en aumento). Por otro lado, las partes primero excitadas empiezan a dar

[1] «El conjunto de estas dos partes está viciado, primero porque no trata el tema desde el punto de vista de la matemática pura, como se debería haber hecho, y en segundo lugar, porque no se establecen las proposiciones fundamentales. Sigo demasiado de cerca los pasos del álgebra numérica ordinaria y el esbozo que hago del álgebra de la cópula es del todo insuficiente.» (Nota marginal tomada por los editores de los *Collected Papers of Charles Sanders Peirce*, ed. por Hartshorne y P. Weiss, de las Lowell Lectures de 1903.)

muestras de fatiga enseguida, siendo por tanto doble la razón por la que la actividad corporal es de naturaleza cambiante. Cuando el estímulo desaparece, la excitación decrece enseguida.

De estos hechos se deduce que cuando un nervio se ve afectado, la acción refleja, si en un principio no resulta adecuada para eliminar la irritación, irá cambiando de naturaleza una y otra vez hasta que aquélla desaparezca, momento en que la acción cesará.

Ahora bien, todos los procesos vitales tienden a resultar más fáciles con la repetición. Una vez que una descarga nerviosa ha tenido lugar en un punto, cualquiera que sea, lo más probable es que sea en dicho punto donde se produzca una nueva descarga nerviosa.

En consecuencia, cuando se repite una irritación de los nervios, lo más probable es que sean las distintas acciones que se han desencadenado en ocasiones similares previas las que se desencadenen ahora, siendo mayor la probabilidad de que lo hagan aquellas que más frecuentemente lo hayan hecho en dichas ocasiones previas. Ahora bien, mientras que las distintas acciones que no han logrado eliminar la irritación pueden haber sido realizadas unas veces y no haber sido realizadas otras con anterioridad, la acción que logra eliminarla tiene que haber sido realizada siempre, ya que tiene que haber persistido todo el tiempo hasta su realización. De donde se deduce que enseguida ha de establecerse un firme hábito de responder de esta forma a la irritación dada.

Un hábito así adquirido es susceptible de ser transmitido hereditariamente.

Uno de nuestros hábitos más importantes es aquel en virtud del cual ciertas clases de estímulos nos inducen, al menos en principio, a una actividad puramente cerebral.

En general, lo que pone en marcha el hilo del pensamiento no es una sensación externa sino simplemente una fantasía. En otros términos, la irritación es visceral en vez de periférica. En un caso así, la actividad tiene en general la misma naturaleza: una acción interna elimina la irritación interna. Una coyuntura imaginada nos lleva a idear una línea de acción apropiada. Pues bien, se ha comprobado que, aunque no se produzca acción externa alguna, tales eventos contribuyen en gran medida a la formación de hábitos que llevan a actuar realmente de la ma-

nera imaginada cuando se presenta realmente la ocasión imaginada.

Hay un hábito del cerebro, perteneciente a la categoría más elevada, que determina tanto lo que hacemos imaginariamente como lo que hacemos de hecho. Se denomina *creencia*. La representación ante nosotros mismos del hecho de que tengamos un hábito específico de esta índole se denomina *juicio*. Un hábito-creencia inicia su andadura siendo vago, específico y limitado, pero se va haciendo más preciso, general y completo cada vez. El proceso de este desarrollo, en la medida en que tiene lugar en la imaginación, recibe el nombre de *pensamiento*. Empieza por formarse un juicio y bajo la influencia de un hábito —creencia éste da lugar a un nuevo juicio que indica una agregación a la creencia. Este proceso recibe el nombre de *inferencia;* el juicio antecedente se denomina **premisa,** el consecuente, **conclusión,** y el hábito de pensamiento que ha determinado el paso de uno a otro (cuando se lo formula como una proposición), *principio rector*[2].

A la vez que este proceso de inferencia o desarrollo espontáneo de una creencia se está desarrollando continuamente dentro de nosotros, nuevas excitaciones periféricas están también continuamente creando nuevos hábitos-creencia. Una creencia está pues determinada en parte por viejas creencias, en parte por nueva experiencia. ¿Hay alguna ley acerca de la manera en que se producen las excitaciones periféricas? El lógico mantiene que la hay y que no es sino la de que todas ellas se adaptan a un fin, a saber, el de acabar llevando a la creencia a ciertas conclusiones predeterminadas que son las mismas para todos los hombres. Esta es la fe del lógico. Es también la cuestión de hecho sobre la que se basan todas las máximas del razonamiento. En virtud de este hecho, lo que vaya a acabarse por creer es independiente de lo que hasta ahora se haya creído y en consecuencia tiene el carácter de *realidad*. De ahí que un determinado hábito, considerado como determinante de una inferen-

---

[2] La expresión *lógica deductiva* tal vez no entrañe el principio de que la excitación periférica tenga un carácter específico, sino sólo de que el razonaminto se desarrolla mediante hábitos que son consistentes. *Deductivo* —consistencia del pensamiento consigo mismo. *Inductivo* —consistencia del mundo (uniformidad de la naturaleza). (Nota marginal de 1882, añadida por los editores de los *Collected Papers*...).

cia, sea correcto si es de tal naturaleza que tiende al resultado final, e incorrecto en caso contrario. Esta es la razón por la que las inferencias pueden dividirse en válidas y no válidas y es en este hecho en donde reside la razón de ser de la lógica.

2. Silogismo y dialogismo

El tipo general de inferencia es

P
∴ C,

donde ∴ es el signo de ilación.

El paso de la premisa (o conjunto de premisas), P, a la conclusión, C, tiene lugar de acuerdo con un hábito o regla que actúa en nuestro interior. Todas las inferencias susceptibles de ser determinadas por dicho hábito una vez admitidas las premisas adecuadas forman una clase. Un hábito es bueno desde el punto de vista lógico siempre que no lleve nunca (o en el caso de una inferencia probable, rara vez) de una premisa verdadera a una conclusión falsa; de lo contrario es lógicamente malo. Es decir, todos los casos posibles de operación de un hábito bueno podrían reducirse a dos: aquel en que la premisa fuera falsa y aquel otro en que la conclusión fuera verdadera, mientras que si un hábito de inferencia es malo, cabría también la posibilidad de aquel caso en el que la premisa fuera verdadera mientras que la conclusión falsa. Cuando hablamos de caso *posible,* estamos indicando que de la descripción general de casos hemos eliminado todos aquellos tipos que sabemos cómo describir en términos generales pero que sabemos también que no se presentarán nunca; los que quedan, entre los que se cuentan todos aquéllos de cuya no-presencia no estamos seguros junto con aquellos otros cuya no-presencia no podemos explicar sobre la base de ningún principio general, se denominan posibles.

Un hábito de inferencia es susceptible de ser formulado en una proposición que establezca que toda proposición *c*, relacionada de cierta manera general con una proposición verdadera *p*, es verdadera. Dicha proposición se denomina el *principio rector* de la clase de inferencias cuya validez implica. Cuando la infe-

rencia se realiza por primera vez, el principio rector no se halla presente ante la mente, pero el hábito que él formula actúa de tal modo que, al contemplar la premisa creída, una especie de percepción lleva a juzgar verdadera la conclusión[3]. Después, cuando a la inferencia se la somete a la crítica lógica, hacemos una nueva inferencia, una de cuyas premisas es ese principio rector de la primera inferencia de acuerdo con el cual proposiones relacionadas entre sí de cierto modo pueden perfectamente constituir premisa y conclusión de una inferencia válida, mientras que la otra no es sino un hecho de observación, a saber, que la relación dada subsiste entre la premisa y la conclusión de la inferencia objeto de crítica, concluyéndose por tanto que la inferencia era válida.

La lógica parte del supuesto de que las inferencias no son sólo algo a realizar sino también a someter a crítica, por lo que no sólo se requiere la forma P∴C para expresar un argumento, sino también una forma $P_i \prec C_i$ para expresar la verdad de su principio rector. P_i denota aquí alguna clase de premisa y C_i la conclusión correspondiente. El símbolo $\prec$ es la cópula y su sentido primordial es el de que todo estado de cosas en el que una proposición de la clase P_i sea verdadera es también un estado de cosas en el que las proposiciones correspondientes de la clase C_i son también verdaderas. Pero la lógica parte también del supuesto de que algunas inferencias no son válidas, por lo que tiene que haber alguna forma de negar la premisa (principio?) rectora. Representaremos esto escribiendo $P_i \overline{\prec} C_i$, *representando en nuestra notación una raya escrita sobre un símbolo cualquiera, la negación de dicho símbolo*[4].

Por tanto, la forma $P_i \prec C_i$ implica

o bien, 1, que es imposible que una premisa de la clase P_i sea verdadera,

o bien, 2, que todo estado de cosas en el que P_i sea verdadera es un etado de cosas en el que la C_i correspondiente es verdadera.

---

[3] Aunque el mismo principio rector no esté presente en la mente, generalmente tenemos conciencia de que inferimos de acuerdo con algún principio general.

[4] Esta raya fue empleada por Boole, pero no la escribió más que sobre signos de clase.

La forma $P_i \lesssim C_i$ implica

tanto, 1, que es posible una premisa de la clase P_i,
como, 2, que entre los casos posibles de verdad de P_i hay uno en el que la C_i correspondiente no es verdadera.

Este sentido de la cópula difiere del que se le otorga en otros sistemas silogísticos en una medida que explicaremos más adelante cuando nos ocupemos de la negación.

En la forma de inferencia P.˙.C no se halla expresado el principio rector y la inferencia podría justificarse sobre la base de varios principios distintos. No obstante, uno de ellos, $P_i \prec C_i$, es la formulación del hábito que en realidad ha presidido las inferencias. Este principio contiene todo lo que se necesita, además de la premisa P, para justificar la conclusión. (Y generalmente, afirmará más de lo necesario). Podemos, por tanto, construir un nuevo argumento que tenga por premisas las dos proposiciones P y $P_i \prec C_i$ tomadas conjuntamente y por conclusión, C. Parece indudable que este argumento ha de tener, como cualquier otro, su principio rector, por cuanto que la inferencia está regida por algún hábito; pero, no obstante, éste tiene que hallarse ya sustancialmente contenido de forma implícita en las premisas, dado que la proposición $P_i \prec C_i$ contiene ya por hipótesis todo lo que se requiere para justificar la derivación de C a partir de P. Un principio rector como éste que no contenga ningún hecho que no esté implícito o que no sea observable en las premisas se denomina principio *lógico* y del argumento por él regido se dice que es un argumento *completo,* por contraposición al *incompleto* o *entimema.*

Pongamos un ejemplo para aclarar lo anterior. Empecemos con el entimema

Enoch era un hombre
∴ Enoch murió.

El principio rector del mismo es «Todos los hombres mueren». Estableciendo éste, llegamos al siguiente argumento completo

Todos los hombres mueren,
Enoch era un hombre;
∴ Enoch tenía que morir.

El principio rector de éste es *nota notae est nota rei ipsius*. Formulando éste como una premisa tenemos el argumento.

Nota notae est nota rei ipsius,
La motalidad es un indicio de humanidad, la cual es a su vez indicio de Enoch;
$\therefore$ La mortalidad es un indicio de Enoch.

Pero este principio del *nota notae* está otra vez presente en la realización de esta última inferencia, por lo que el estado último del argumento no es más completo que el penúltimo.

Hay otra forma de hacer completo un argumento, a saber: en lugar de añadir el principio rector $P_i \prec C_i$ mediante conjunción a la premisa P, para formar un nuevo argumento, podríamos añadir su negación a la conclusión disyuntivamente del modo siguiente:

P
$\therefore$ O bien C o bien $P_i \succcurlyeq C_i$

Un principio lógico se dice que es una proposición *vacía* o meramente formal porque, aunque relevante, no puede añadir nada a las premisas del argumento por él regido, de forma que no implica hecho alguno salvo el que, como hemos visto que ocurría en § 1, se presupone en todo discurso. Podemos distinguir aquí entre validez *lógica* y validez *extralógica,* siendo la primera la de un argumento *completo* y la segunda la de uno *incompleto*. El término *principio rector lógico* podemos entender que significa aquel principio que hemos de suponer verdadero con el fin de sustentar la validez lógica de un argumento. Este principio establece que entre todos los estados de cosas que pueden suponerse sin colisión con principios lógicos, aquéllos en que la premisa del argumento fuera verdadera serían también casos en que la conclusión lo sería también. Esto es lo único que resulta relevante para el *principio rector lógico,* el cual, por tanto, lejos de ser vago, como hemos visto que es el extralógico, se halla perfectamente determinado.

Un argumento completo con una sola premisa se denomina inferencia *inmediata. Ejemplo:* Todos los cuervos son pájaros negros; por consiguiente todos los cuervos son pájaros. Si de la

premisa de un argumento como éste se omite todo lo redundante, entonces el estado de cosas expresado en la premisa será el mismo que el expresado en la conclusión, cambiando únicamente la forma de expresión. Ahora bien, el lógico no se propone enumerar todas las formas de expresión de los hechos, sino que parte del supuesto de que éstos se hallan expresados en ciertas formas estándar o canónicas. Sin embargo, la equivalencia entre distintas de sus formas estándar tiene un interés enorme para él, siendo ésta la razón por la que algunas inferencias inmediatas desempeñan un destacado papel en la lógica formal. Algunas de ellas no serán inferencias recíprocas o ecuaciones lógicas, pero las más importantes sí serán de esta naturaleza.

Si un hecho está con otro distinto en una relación tal que si el primero es verdadero también lo es necesaria o probablemente el segundo, dicha relación constituye un hecho concreto y por tanto, como el principio rector de un argumento completo no entraña ninguna cuestión de hecho (fuera de las involucradas en todo discurso), de aquí se sigue que todo argumento completo y *material* (en tanto que contrapuesto al meramente *formal*) tiene que tener por lo menos dos premisas.

De la tesis del principio rector se desprende que si tenemos un argumento válido y completo de más de una premisa, podremos suprimir todas las premisas menos una y seguir teniendo un argumento válido, aunque incompleto. Tal argumento se justifica por las premisas suprimidas, por lo que basta con éstas para poder inferir que la conclusión se seguiría del resto de las demás. De este modo, el argumento original

P Q R S T
$\therefore$ C

se descompone en dos, a saber, 1.º,

P Q R S
$\therefore$ T$\prec$C

y, 2.º,

T$\prec$C
T
$\therefore$ C.

Repitiendo este proceso, cualquier argumento puede descomponerse en argumentos de dos premisas. Un argumento completo con dos premisas se denomina *silogismo*[5].

Un argumento puede descomponerse también de otro modo distinto, sustituyendo el segundo componente anterior por la forma

$$T \prec C$$
$$\therefore \text{ O bien C o bien no T.}$$

Por este procedimiento, todo argumento puede resolverse en otros, compuestos de una premisa y dos conclusiones alternativas. A un argumento así, cuando es completo, se le puede dar el nombre de *dialogismo*.

3. Formas proposicionales

En lugar de las dos expresiones $A \prec B$ y $B \prec A$ tomadas conjuntamente, podemos escribir $A = B$[6]. En lugar de las dos expre-

---

[5] La tesis general de esta sección se halla desarrollada en mi artículo *On the Natural Classification of Arguments* (Sobre la clasificación natural de los argumentos), de 1867.

[6] Hay divergencias de opinión entre los lógicos respecto a la cuestión de si es más simple la relación $\prec$ o la $=$. Pero en mi trabajo sobre la *Logic of Relatives* (Lógica de relativos) he demostrado con todo rigor que, en este aspecto, ha de concederse la preeminencia a $\prec$. El término *más simple* tiene en lógica un significado preciso; quiere decir aquello cuya profundidad lógica es menor; es decir, si un concepto implica otro, pero no a la inversa, entonces se dice que el segundo es el más simple. Ahora bien, se puede decir que $A = B$ implica $A \prec B$, pero no a la inversa. *Ergo*, etc. De poco sirve decir que $A \prec B$ implica $A = (A \text{ que es } B)$, e igual de poco relevante sería decir que $A \prec B$ implica $A = A$. Consideremos un caso análogo. El concepto de secuencia lógica es más simple que el de secuencia causal, porque toda secuencia causal es una secuencia lógica pero no toda secuencia lógica es una secuencia causal, y no es una respuesta el decir que una secuencia lógica entre dos hechos implica una secuencia causal entre algún par de hechos sean los mismos o distintos. La idea de que $=$ es una relación muy simple se debe probablemente al hecho de que el descubrimiento de dicha relación nos permite ver que en lugar de dos objetos tenemos solamente uno, de suerte que simplifica nuestra concepción del universo. En este sentido, la existencia de semejante relación es un importante hecho a descubrir; en realidad tiene la suma de las importancias de los dos hechos de que se compone. No es infrecuente que resulte más conveniente tratar las propo-

siones $A \prec B$ y $B \succnsim A$ tomadas conjuntamente podemos escribir $A < B$ o $B > A$, y en lugar de las dos expresiones $A \succnsim B$ y $B \succnsim A$ tomadas conjuntamente (disyuntivamente) podemos escribir $A \asymp B$.

De Morgan, en la importante memoria con que inició su análisis del silogismo (1846, p. 380), ha señalado que generalmente hacemos nuestros razonamientos bajo una restricción implícita relativa a lo que tomaremos como posible, restricción que, cuando se aplica a la totalidad de aquello de lo que se habla, no necesita ser expresada. La totalidad de cosas que consideramos posibles se denomina *universo* del discurso y puede ser muy limitada. Una forma de limitar nuestro universo estriba en considerar únicamente lo que ocurre de hecho, de suerte que todo lo que no ocurre es considerado como imposible.

Las formas $A \prec B$, o A implica B, y $A \succnsim B$, o A no implica B, incluyen tanto las proposiciones hipotéticas como las categóricas. Así, por ejemplo, decir que todos los hombres son mortales equivale a decir que si un hombre posee una característica cualquiera, entonces un mortal posee dicha característica. Decir 'si A, entonces B' es obvio que es lo mismo que decir que de A se sigue B lógica o extralógicamente. Identificando así la relación expresada por la cópula con la de ilación, identificamos la proposición con la inferencia y el término con la proposición. Esta identificación, mediante la cual todo lo que se ve que es verdadero de un término, proposición o inferencia se sabe a la

---

siciones $A \prec B$ y $B \prec A$ conjuntamente en su forma $A = B$, pero tampoco lo es que resulte más conveniente tratarlas por separado. Incluso en geometría podemos ver que decir que dos figuras A y B son iguales equivale a decir que cuando se las pone juntas de forma adecuada, A se solapará con B y B con A. Y, generalmente, es necesario examinar estos hechos por separado. Así, cuando comparamos los números de dos conjuntos de objetos, los contraponemos entre sí, uno a uno, y observamos que a cada uno de los miembros del conjunto A corresponde uno del conjunto B y a cada uno de los del conjunto B, uno del conjunto A.

En lógica el gran objetivo que perseguimos es analizar todas las operaciones de la razón y reducirlas a sus elementos últimos, siendo un objetivo secundario hacer un cálculo del razonamiento. En consecuencia, aparte de todas las consideraciones de conveniencia, es más filosófico el empleo de la cópula $\prec$. Además, esta cópula se halla estrechamente relacionada con nuestras ideas lógicas y metafísicas naturales, siendo uno de los principales objetivos de la lógica mostrar qué validez tienen tales ideas. Por lo demás, como veremos más adelante, cuanto más analítica es la cópula más fácil el método de resolución de problemas lógicos a que de hecho dará lugar.

vez que es verdadero de las tres cosas, es un motor sumamente importante del razonamiento, y ha sido por partir de una consideración de la génesis de la lógica por lo que la hemos conseguido[7].

De las dos formas $A \prec B$ y $A \overline{\prec} B$ la más primitiva es sin duda la primera, por cuanto que se halla implícita en la idea de razonamiento, en tanto que la segunda sólo se requiere para la crítica del mismo. Los dos tipos de proposición son esencialmente distintos y todo intento de reducir el segundo a un caso específico del primero está condenado al fracaso. Boole intenta expresar 'Algunos hombres no son mortales' en la forma 'Cualesquiera hombres que tengan cierta característica desconocida *v* no son mortales'. Pero estas dos proposiciones no son idénticas pues la segunda no implica que algunos hombres tengan dicha característica *v*; y, por consiguiente, de la proposición de Boole podemos inferir legítimamente que 'cualesquiera mortales que tengan la característica desconocida *v* no son hombres', pero en cambio no podemos pasar de 'algunos hombres no son-mortales' a 'algunos mortales no son hombres'[8]. En cambio, sí podemos remontarnos a una forma más general bajo la que quedan incluidas tanto $A \prec B$ como $A \overline{\prec} B$. Para ello hemos de escribir $A \prec B$ de la forma $\breve{A} \prec \bar{B}$, en donde $\breve{A}$ es *algún*-A y $\bar{B}$ es *no*-B. Esta forma general es equívoca por cuanto que deja sin determinar si la proposición sería o no verdadera en el caso de que el sujeto fuera imposible. Cuando el sujeto es general, éste es el caso, pero cuando es particular (esto es, está sometido a la modificación *alguno*), no. Esta forma general lo único que supone es la inclusión del sujeto bajo el predicado. La pequeña curva escrita sobre la letra que esquematiza el sujeto indica que alguna parte del término representado por dicha letra es el sujeto y que de ella se afirma que posiblemente exista.

La modificación del sujeto por la raya curva y del predicado

---

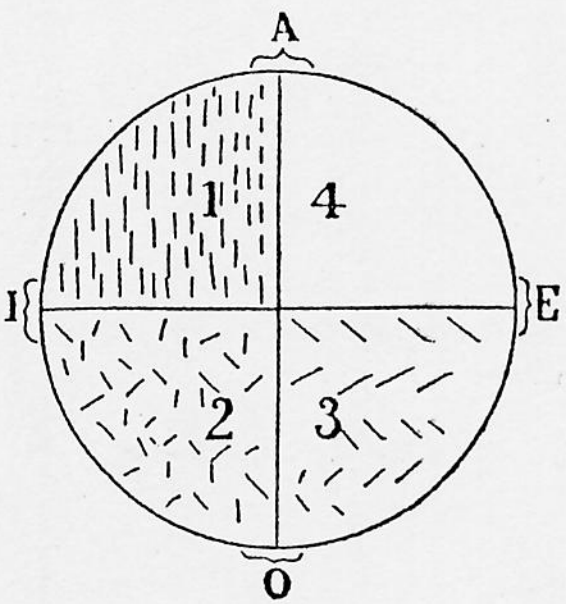
[7] Como consecuencia de la identificación en cuestión, hablo indistintamente de S, en $S \prec P$, como *sujeto, antecedente* o *premisa* y de P como *predicado, consecuente* o *conclusión.*

[8] Igual de poco afortunado es el intento realizado por Mr. Jevons para superar la dificultad omitiendo las proposiciones particulares «ya que si queremos, siempre podemos sustituirlo (alguno) por expresiones más concretas». La misma razón podría alegarse para dejar de lado la consideración de *no*, pero de hecho la forma $\overline{A \prec B}$ se necesita para poder simplemente negar $A \prec B$.

por la recta da lugar a la siguiente representación del viejo conjunto de formas proposicionales:

A.	$a \prec b$	Todo *a* es *b*	Universal afirmativa.
E.	$a \prec \bar{b}$	Ningún *a* es *b*	Universal negativa.
I.	$\breve{a} \prec b$	Algún *a* es *b*	Particular afirmativa.
O.	$\breve{a} \prec \bar{b}$	Algún *a* no es *b*	Particular negativa.

Hay, sin embargo, una diferencia entre el sentido en que esas proposiciones se toman aquí y aquel que tenían tradicionalmente, a saber: generalmente se entendía que las proposiciones afirmativas entrañan la existencia de sus sujetos, en tanto que las negativas no. Por esta razón se decía que hay una inferencia inmediata de A a I y de E a O. Sin embargo, en el sentido que se les confiere en este trabajo, las proposiciones particulares entrañan la existencia de sus sujetos, pero no así las unversales. La siguiente figura ilustra el sentido preciso aquí conferido a las cuatro formas A, E, I, O.



En el cuadrante 1 todas las líneas que hay son verticales; en el 2, algunas son verticales y otras no; en el 3, ninguna de las líneas que hay es vertical, y en el 4 no hay ninguna línea. Pues

bien, interpretando *línea* como sujeto y *vertical* como predicado, tenemos que

A es verdadera de los cuadrantes 1 y 4 y falsa del 2 y del 3.
E es verdadera de los cuadrantes 3 y 4 y falsa del 1 y del 2.
I es verdadera de los cuadrantes 1 y 2 y falsa del 3 y del 4.
O es verdadera de los cuadrantes 2 y 3 y falsa del 1 y del 4.

De donde se deduce que A y O se niegan entre sí, lo mismo que E e I. Pero cualquier otro par de proposiciones pueden ser lo mismo ambas verdaderas o ambas falsas que una verdadera y la otra falsa.

De Morgan («On the syllogism», n.º I, 1846, p. 381) ha ampliado el sistema de formas proposicionales por el procedimiento de aplicar el signo de negación que aparece por primera vez en $A \prec B$ al sujeto y al predicado. De este modo logra las siguientes formas:

$A \prec B$. Todo A es B.	A es una especie de B.
$A \overline{\prec} B$. Algún A no es B.	A excede a B.
$A \prec \bar{B}$. Ningún A es B.	A es externo a B.
$A \overline{\prec} \bar{B}$. Algún A es B.	A es parte de B.
$\bar{A} \prec B$. Todo es o A o B.	A es complemento de B.
$\bar{A} \overline{\prec} B$. Hay algo además de A y de B.	A no coincide del todo con B.
$\bar{A} \prec \bar{B}$. A incluye a todo B.	A es género de B.
$\bar{A} \overline{\prec} \bar{B}$. A no incluye a todo B.	A es deficitario de B.

La tabla establecida por De Morgan de las relaciones entre estas proposiciones ha de ser sometida a modificación para que cuadre con los significados aquí conferidos a $\prec$ y a $\overline{\prec}$.

Nosotros podríamos limitarnos a las dos formas proposicionales $S \prec P$ y $S \overline{\prec} P$. Si en alguna ocasión traspasamos este límite y adoptamos la forma $S \prec \bar{P}$, entonces, por razones de completud, tenemos que adoptar la totalidad del sistema de De Morgan. Pero, como veremos en la próxima sección, este sistema tampoco es completo, sino que requiere para su completud la admisión de la particularidad del predicado. Esto ya fue intentado por Hamilton, pero con una falta de competencia verdaderamente extraordinaria. Más adelante aludiré a esta

cuestión, pero sin tratar de mostrar cuántas formas proposicionales habría en un sistema completado de este modo[9].

4. El álgebra de la cópula

De la identidad entre la relación expresada por la cópula y la de ilación se desprende un álgebra. Esta nos da, en primer lugar

$$x \prec x \tag{1}$$

el principio de identidad, que como puede verse, expresa que aquello que hayamos creído hasta ahora hemos de seguir creyéndolo, a falta de razones en contrario. En segundo lugar, esta identificación muestra que las dos inferencias

$$\begin{array}{lll} x & & \\ y & \text{y} & x \\ \therefore z & & \therefore\ y \prec z \end{array} \tag{2}$$

tienen la misma validez, por lo que tenemos

$$\{x \prec (y \prec z)\} = \{y \prec (x \prec z)\}\ ^{10}. \tag{3}$$

De [1] se desprende

$$(x \prec y) \prec (x \prec y),$$

de ahí que por [2]

$$\begin{array}{ll} x \prec y & x \\ & \therefore\ y \end{array} \tag{4}$$

sea una inferencia válida.

[9] En conexión con este punto, *vide* De Morgan «On the Syllogism», n.º V, 1862. (*Transactiones, Cambridge Philosophical Society,* vol. 4, p. 467, 1864, memoria leída y fechada en 1863.)

[10] Mr. Hugh McColl («Calculus of Equivalent Statements», second Paper, 1878, *Proceedings, London Mathematical Society,* vol. 9, p. 183 (1877)), hace uso del signo de inclusión varias veces en la misma proposición, pero no da ninguna de las fórmulas de esta sección.

Por [4], si x y $x \prec y$ son verdaderas, y es verdadera, y si y e $y \prec z$ son verdaderas z también lo es, por lo que resulta válida la inferencia

$$x \quad x \prec y \qquad y \prec z$$
$$\therefore z.$$

Por el principio [2] esto equivale a decir que

$$\begin{array}{l} x \prec y \quad y \prec z \\ \therefore x \prec z \end{array} \qquad [5]$$

es una inferencia válida. Esta no es sino la forma canónica del silogismo en *Barbara*. Al enunciado que afirma su validez se le ha denominado el *dictum de omni,* el *nota notae,* etc., pero es preferible considerarlo, siguiendo a De Morgan[11], como un enunciado que establece que la relación expresada por la cópula es una relación transitiva[12]. También se lo puede considerar como un enunciado que implica que en lugar del sujeto de una proposición de la forma A≺B se puede escribir cualquier sujeto de dicho sujeto y en lugar del predicado cualquier predicado de dicho predicado[13]. El mismo principio se puede considerar desde el punto de vista algebraico como una regla para la eliminación de y de las proposiciones $x \prec y$ e $y \prec z$[14].

No es necesario señalar que x, y, z puede sustituirse por cualquier letra y que, por consiguiente, también pueden susti-

---

[11] «On the Syllogism», n.° II, 1850, *Transations, Cambridge Philosophical Society*, vol. 9, 1851, p. 104.

[12] Que la validez del silogismo no puede deducirse de los principios de identidad, contradicción y tercio excluso es susceptible de demostración precisa. En cambio, la transitividad de la cópula se halla implícita en la identificación de la relación-cópula con la ilación, ya que ésta es claramente transitiva.

[13] El concepto de sustitución (implícito ya en la doctrina medieval del descenso), lo mismo que el término, les era familiar a los lógicos antes de la publicación de la *Substitution of Similars* (La sustitución de semejantes) de Mr. Jevons. Pero en este libro no sólo se afirma que inferencia es sustitución, sino también que aquélla y en especial la inducción consisten en la sustitución de semejantes. Esta doctrina es afín a la teoría de la inducción de Mill.

[14] Esto debe de haber estado en la mente de Mill desde el comienzo. De Morgan («On the Syllogism», n.° II, 1850, p. 83) va demasiado lejos al decir que «lo que se llama eliminación en álgebra se llama inferencia en lógica», si con ello quiere significar, como parece, que toda inferencia es eliminación.

tuirse bien todas ellas, bien sólo alguna por $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$. No obstante, una vez realizados estos cambios puramente extrínsecos, el argumento deja de llamarse *Barbara*, aunque se dice que es algún otro modo universal de la *primera figura*. Es evidente que hay ocho de tales modos.

De [5] se desprenden, por [2] las dos formas válidas de inferencia inmediata siguientes:

$$\begin{array}{l} S \prec P \\ \therefore\ (x \prec S) \prec (x \prec P) \end{array} \qquad [6]$$

y

$$\begin{array}{l} S \prec P \\ \therefore\ (P \prec x) \prec (S \prec x). \end{array} \qquad [7]$$

A esta última se la puede llamar inferencia de *contraposición*.

De la transitividad de la cópula se desprende la validez de la siguiente inferencia

$$\begin{array}{l} (S \prec M) \prec (S \prec P) \\ (S \prec P) \prec x \\ \therefore\ (S \prec M) \prec x \end{array}$$

Pero, por [6], de $(M \prec P)$ se puede inferir de forma inmediata la primera premisa, por lo que la inferencia

$$\begin{array}{l} M \prec P \\ (S \prec P) \prec x \\ \therefore\ (S \prec M) \prec x. \end{array} \qquad [8]$$

resulta válida.

Se la puede llamar *silogismo indirecto menor*. Un ejemplo es el siguiente:

Todos los hombres son mortales,
Si Enoch y Elías fueron mortales, la Biblia se equivoca;
$\therefore$ Si Enoch y Elías fueron hombres, la Biblia se equivoca.

De nuevo podemos partir del siguiente silogismo en *Barbara*

$$\begin{array}{l}(M \prec P) \prec (S \prec P),\\ (S \prec P) \prec x;\\ \therefore\ (M \prec P) \prec x.\end{array}$$

Pero, por el principio de contraposición [7], la primera premisa se sigue de forma inmediata de $(S \prec M)$, de suerte que tenemos la inferencia válida siguiente

$$\begin{array}{l}S \prec M,\\ (S \prec P) \prec x;\\ \therefore\ (M \prec P) \prec x,\end{array} \qquad [9]$$

a la que podemos llamar *silogismo indirecto mayor*.

Ejemplo: Todos los patriarcas son hombres,
Si todos los patriarcas son mortales, la Biblia se equivoca
$\therefore$ Si todos los hombres son mortales, la Biblia se equivoca.

De igual modo se podría mostrar que [6] justifica el silogismo

$$\begin{array}{l}M \prec P,\\ x \prec (S \prec M);\\ \therefore\ x \prec (S \prec P).\end{array} \qquad [10]$$

y que [7] justifica la inferencia

$$\begin{array}{l}S \prec M,\\ x \prec (M \prec P);\\ \therefore\ x \prec (S \prec P).\end{array} \qquad [11]$$

Pero estas inferencias no son más que ligeras modificaciones de *Barbara*.

En la forma [10], x puede denotar un universo limitado que incluya algunos casos de S. En este caso, tenemos el silogismo

$$\begin{aligned} &M \prec P, \\ &S \precsim \bar{M}; \\ \therefore\ &S \precsim \bar{P}, \end{aligned} \qquad [12]$$

cuyo nombre es *Darii*. Naturalmente, se podría trazar una línea sobre la S. Así, en la forma [11], x puede denotar un universo limitado que incluya algún P. En este caso, tenemos el silogismo

$$\begin{aligned} &S \prec M, \\ &\bar{M} \precsim P; \\ \therefore\ &\bar{S} \precsim P. \end{aligned} \qquad [13]$$

Aquí se podría trazar una línea sobre la P. Pero las formas [12] y [13] se deducen de [10] y [11] sólo mediante principios de interpretación que requieren demostración.

Por otro lado, si en el *silogismo indirecto menor* [8], ponemos en lugar de x «lo que no ocurre», tenemos por definición

$$\{(S \prec P) \prec x\} = (S \precsim P)$$

por lo que entonces tenemos

$$\begin{aligned} &M \prec P, \\ &S \precsim P; \\ \therefore\ &S \precsim M, \end{aligned} \qquad [14]$$

que no es sino el silogismo *Baroko*. Si trazamos una línea sobre P, el silogismo se llama *Festino*; y mediante otras negaciones se obtienen ocho formas esencialmente idénticas, que se denominan modos particulares menores de la segunda figura[15]. De igual modo, el silogismo indirecto mayor [9] da lugar a la forma

$$\begin{aligned} &S \prec M. \\ &S \precsim P; \\ \therefore\ &M \precsim P. \end{aligned} \qquad [15]$$

[15] De Morgan, *Syllabus*, 1860, p. 18.

cuyo nombre es *Bocardo*. Si se niega P, su nombre es *Disamis* y mediante otras negaciones se obtienen otros ocho modos particulares mayores de la tercera figura.

Hemos visto que $S \prec P$ tiene la misma forma que $(S \prec P) \prec x$. Si escribimos A en lugar de $S \prec P$, nos encontraremos con que $\bar{A}$ tiene la forma $A \prec x$. Entonces el principio de contraposición [7] da lugar a la inferencia inmediata

$$\begin{array}{l} S \prec P \\ \therefore\ \bar{P} \prec \bar{S} \end{array} \qquad [16]$$

Aplicando ésta a los modos universales de la primera figura quedan justificados seis modos. Hay dos en la segunda figura,

$$\begin{array}{lll} x \prec \bar{y} & z \prec y & \therefore\ x \prec \bar{z} \\ \bar{x} \prec \bar{y} & z \prec y & \therefore\ \bar{x} \prec \bar{z}; \end{array} \qquad (\textit{Camestres})$$

dos en la tercera figura

$$\begin{array}{lll} y \prec x & \bar{y} \prec z & \therefore\ \bar{x} \prec z \\ y \prec x & \bar{y} \prec \bar{z} & \therefore\ \bar{x} \prec \bar{z}. \end{array}$$

y otros dos que se dice que pertenecen a la cuarta figura,

$$\begin{array}{lll} x \prec y & y \prec z & \therefore\ \bar{z} \prec \bar{x} \\ x \prec \bar{y} & \bar{y} \prec z & \therefore\ \bar{z} \prec \bar{x}. \end{array}$$

Pero la negación tiene otras dos propiedades que todavía no hemos tomado en consideración. Estas son

$$x \prec \bar{\bar{x}} \qquad [17]$$

esto es, x es no no-x, que recibe el nombre de *principio de contradicción*, y

$$\bar{\bar{x}} \prec x \qquad [18]$$

o, lo que es no no-x es x, denominado *principio del tercio excluso*.

es el principio de *Ferison*, un silogismo válido de la tercera figura, y si en lugar de x escribimos $\bar{S}$, tenemos

$$(S \prec \bar{\bar{S}}) \prec (P \precsim \bar{S}),$$

lo cual equivale a decir que $P \precsim \bar{S}$ es verdadero si el principio de contradicción es verdadero, por lo que del principio de contradicción se deduce que $P \precsim \bar{S}$ equivale a $S \precsim \bar{P}$. Comparando

$$S \prec P \quad \text{o} \quad (S \precsim x) \prec (P \precsim x)$$

con

$$S \precsim \bar{P} \quad \text{o} \quad (S \prec \bar{x}) \prec (P \precsim x),$$

vemos que difieren por una modificación del sujeto. Representando esto mediante una pequeña curva sobre el sujeto, podemos escribir $\breve{S} \prec P$ en lugar de $S \precsim \bar{P}$. Vemos entonces que igual que en lugar de A podemos escribir $A \precsim x$, donde x es cualquier cosa, en lugar de $\breve{A}$ podemos escribir $A \prec \bar{x}$. Si sometemos a una modificación similar también al predicado, tenemos

$$\breve{S} \prec \breve{P} \quad \text{o} \quad (S \prec \bar{x}) \prec (P \prec \bar{x}),$$

lo cual equivale a decir que uno puede hallar un S que sea el P que le plazca. Tenemos entonces

$$(S \prec P) \prec (\breve{P} \prec \breve{S}), \qquad [24]$$

que es una fórmula de contraposición similar a [16].

Es evidente que

$$(\breve{S} \prec P) \prec (\breve{P} \prec S); \qquad [25]$$

pues, negando ambas proposiciones, esto se convierte por [16], en $(P \prec \bar{S}) \prec (S \prec \bar{P})$, que no es sino [19]. La inferencia justificada por [25] se conoce con el nombre de conversión de *I*. De [25] inferimos

$$\breve{\breve{x}} \prec x, \qquad [26]$$

que se puede llamar principio de particularidad. Este es obviamente verdadero por cuanto que la modificación de la particularidad no consiste más que en cambiar $(A \overline{\prec} x)$ en $(A \prec \bar{x})$, lo cual equivale a negar la cópula y el predicado, operación que, si se repite, dará lugar de nuevo a la primera expresión. Por la misma razón tenemos

$$x \prec \breve{\bar{x}}, \qquad [27]$$

al que podemos dar el nombre de principio de individualidad. Este nos da

$$(S \prec \breve{P}) \prec (P \prec \breve{S}), \qquad [28]$$

y [26] y [27] juntos

$$(\breve{S} \prec \breve{P}) \prec (P \prec S). \qquad [29]$$

No está claro si la proposición $S \prec \breve{P}$ ha de interpretarse como significando que S y P son un solo individuo o que hay algo además de S y de P. Dejo aquí sin cerrar esta rama del tema.

Mediante el siguiente principio, podemos obtener un número de fórmulas semejante al que hemos obtenido por el principio [2]:

2′) La inferencia

$$\begin{array}{l} x \\ \therefore \text{O } y \quad \text{o} \quad z \end{array}$$

tiene la misma validez que

$$\begin{array}{l} x \overline{\prec} y \\ \therefore z. \end{array}$$

De [1] se desprende

$$(x \overline{\prec} y) \prec (x \overline{\prec} y),$$

por lo que, por [2],

4′) x
$\therefore$ O $(x \prec y)$ o y.

Esto da lugar a

x
$\therefore$ O $x \preceq y$ o $y \preceq z$ o z.

Entonces, por [2],

5′) $x \preceq z$
$\therefore$ $x \preceq y$ o $y \preceq z$,

que no es sino la forma canónica del dialogismo. El dialogismo indirecto menor es

8′) $x \preceq (M \prec P)$
$\therefore$ O $x \preceq (S \prec P)$ o $S \prec M$.

El dialogismo indirecto mayor es

$x \preceq (S \prec M)$
$\therefore$ O $x \preceq (S \prec P)$ o $M \prec P$.

Tenemos también

12′) $(S \prec P) \preceq x$
$\therefore$ O $(S \prec M)$ o $(M \prec P) \preceq x$

y

13′) $(S \prec P) \preceq x$
$\therefore$ O $(M \prec P)$ o $(S \prec M) \preceq x$.

Tenemos A escrita en la forma $x \prec \bar{A}$. Tenemos entonces las inferencias

$S \prec P$	$S \prec \bar{P}$	$\bar{S} \prec P$	$\bar{S} \prec \bar{P}$
$\therefore \bar{P} \prec \bar{S}$	$\therefore P \prec \bar{S}$	$\bar{P} \prec S$	$P \prec S$

Parte II. La lógica de los términos no-relativos

1. La multiplicación interna y la adición lógicas

Hemos visto que la inferencia

$$\begin{array}{ll} & x \quad \text{e} \quad y \\ \therefore & z \end{array}$$

tiene la misma validez que la inferencia

$$\begin{array}{ll} & x \\ \therefore & \text{O}\ \bar{y} \quad \text{o} \quad z \end{array}$$

y que la inferencia

$$\begin{array}{ll} & x \\ \therefore & \text{O}\ y \quad \text{o} \quad z, \end{array}$$

la misma que

$$\begin{array}{ll} & x \quad \text{e}\ \bar{y} \\ \therefore & z \end{array}$$

De igual modo, $x \prec y$
es equivalente a

$$(\text{Lo posible}) \prec \text{O}\ \bar{x} \quad \text{o} \quad y,$$

y a

$$x \text{ que es } \bar{y} \prec (\text{lo imposible}).$$

Para poder expresar esto algebraicamente, empezamos por necesitar símbolos para los dos términos de segunda intención, lo

posible y lo imposible. Sean ∞ y 0 tales términos; entonces tenemos las definiciones

$$x \prec \infty \qquad 0 \prec x \qquad [1]$$

sea x lo que quiera que sea[18].

También necesitamos dos operaciones que se pueden denominar multiplicación y adición no-relativas y que se definen del siguiente modo[19]:

Si $a \prec x$ y $b \prec x$, entonces $a+b \prec x$;	Si $x \prec a$ y $x \prec b$, entonces $x \prec a \times b$; [2]
y conversamente,	y conversamente,
si $a+b \prec x$, entonces $a \prec x$ y $b \prec x$.	si $x \prec a \times b$, entonces $x \prec a$ y $x \prec b$. [3]

---

[18] El símbolo 0 lo emplea Boole; en cuanto a ∞ reemplaza a su símbolo 1, con arreglo a una sugerencia hecha en mi *Logic of Relatives*, 1870.

[19] Estas formas de definición son orignales. El álgebra de los términos no-relativos fue ofrecida por Boole (*Mathematical Analysis of Logic* —Análisis matemático de la lógica—, 1847). La adición booleana no era la misma que la del texto ya que en la suya, todo lo que fuera común a los dos términos sumados era tomado dos veces en la suma. Las operaciones del texto fueron consideradas como complementarias entre sí e introducidas con los símbolos apropiados por De Morgan («On the Syllogism», n.° III, 1858, *Cambridge Philosophical Transactions*, vol. 10, p. 185). En lugar de adición, suma, partes, él habla de agregación, agregado, agregantes; en lugar de multiplicación, producto, factores, él habla de composición, compuesto, componente. Mr. Jevons (*Formal Logic*, 1864) —siento no poder hablar de esta obra sino por lo que recuerdo de mi lectura de hace muchos años y sin poder, por tanto, estar seguro de hacerle absoluta justicia— mejoró el álgebra de Boole al sustituir la adición de éste por la agregación de De Morgan. Al no conocer ni los escritos de De Morgan ni los de Jevons sobre el tema, el que esto escribe volvió a recomendar el mismo cambio (*On an Improvement in Boole Calculus of Logic*, Sobre un perfeccionamiento del cálculo lógico booleano, 1867) y a mostrar el absoluto paralelismo existente entre ambas operaciones. En otro trabajo, publicado en 1870, introduje en el álgebra el signo de inclusión.

En 1872, Robert Grassmann, hermano del autor de la *Ausdehnungslehre*, publicó una obra titulada *Die Formenlehre oder Mathematik*, cuyo segundo libro contiene un álgebra de la lógica idéntica a la de Jevons. En ella se reproduce la misma notación, con la única salvedad de que el universo es representado por T en lugar de por U, y un término se niega trazando una línea sobre él,

De estas definiciones se siguen de forma inmediata las siguientes fórmulas:

A)[20] $a \prec a+b \quad a \times b \prec a$ (Peirce, 1870)[21] [4]
$b \prec a+b \quad a \times b \prec b$

Estas se demuestran sustituyendo en [3] x por $a+b$ y por $a \times b$.

B) $x = x+x \quad x \times x = x$ (Jevons, 1864) [5]

Sustituyendo a y b en [2] por x, tenemos

$$x+x \prec x \quad x \prec x \times x;$$

y, por [4],

C) $x \prec x+x \quad x \times x \prec x$ (Boole, Jevons) [6]
$a+b = b+a \quad a \times b = b \times a$

---

como hace Boole, en lugar de tomando una letra del otro caso, como hace Jevons. Grassmann emplea también un signo equivalente a mi $\prec$. En su tercer libro, se ocupa de otra cuestión que muy bien podría haber tomado de mi trabajo de 1870. El tratamiento que hace del tema presenta ciertas desigualdades y la mayoría de los resultados a los que llega ya habían sido anticipados. El profesor Schröder, de Karlsruhe, escribió en la primavera de 1877, su *Operationskreis des Logikkalkuls*. El había visto las obras de Boole y Grassmann, pero no las de De Morgan, ni tampoco las de Jevons o las mías. Ofrece un fino desarrollo del álgebra, adoptando la adición de Jevons, y pone de relieve el paralelismo entre + y × por el procedimiento de representar los teoremas en columnas paralelas, imitando así una práctica común entre los geómetras. Schröder ofrece una forma original, interesante y amplia de operar con el álgebra. En ese mismo año, un poco después, Mr. Hugh McColl, que aparentemente no había leído nada de álgebra lógica salvo un insípido informe de la obra de Boole contenido en la *Logic* de Bain, publicó varios trabajos sobre un «Calculus of Equivalent Statements», (*Proceedings, London Mathematical Society*, serie 1, vol. IX, pp. 177-186), cuya base no es otra que el álgebra booleana, con la adición de Jevons y un signo de inclusión. Mr. McColl añade una aplicación sumamente ingeniosa de esta álgebra a la transformación de integrales concretas.

[20] Observemos que las demostraciones de las proposiciones enunciadas siguen las enunciaciones (1880).

[21] En la *Logic of Relatives* se halla contenida $a \times b \prec a$. Las otras fórmulas, pese a que son igual de obvias, no las he visto en ningún sitio.

Tales fórmulas son ejemplos del *principio conmutativo*. De [4] y [2] se sigue

$$b+a \prec a+b \qquad a \times b \prec b \times a$$

e, intercambiando a y b, tenemos la inclusión recíproca implícita en [6].

D) $(a+b)+c=a+(b+c)$
$a \times (b \times c)=(a \times b) \times c$ (Boole, Jevons) [7]

Estos son casos del *principio asociativo*. Por [4], $c \prec b+c$ y $b \times c \prec c$; también $b+c \prec a+(b+c)$ y $a \times (b \times c) \prec b \times c$; de forma que $c \prec a+(b+c)$ y $a \times (b \times c) \prec c$. Del mismo modo, $b \prec a+(b+c)$ y $a \times (b \times c) \prec b$ y, por [4] $a \prec a+(b+c)$ y $a \times (b \times c) \prec a$. De donde, por [2] se sigue $a+b \prec a+(b+c)$ y $a \times (b \times c) \prec a \times b$. Y, de nuevo por [2], $(a+b)+c \prec a+(b+c)$ y $a \times (b \times c) \prec (a \times b) \times c$. De modo similar podríamos probar las proposiciones conversas de éstas y establecer [7].

E) $(a+b) \times c=(a \times c)+(b \times c)$
$(a \times b)+c=(a+c) \times (b+c)$[22] [8]

Estos son casos del *principio distributivo*. Se demuestran fácilmente por [4] y [2], pero la demostración es demasiado tediosa para ofrecerla.

F) $(a+b)+c=(a+c)+(b+c)$
$(a \times b) \times c=(a \times c) \times (b \times c)$ [9]

Estos son otros casos distintos del principio distributivo. Se demuestran por [5], [6] y [7]. Estas fórmulas, que hasta ahora han pasado inadvertidas, no están desprovistas de interés.

---

[22] La primera de estas fórmulas dada por Boole para su adición, fue mantenida por Jevons al cambiar de adición. La segunda se introdujo por primera vez en mi trabajo de (1867).

G) $a+(a\times b)=a \quad a\times(a+b)=a$ (Grassmann, Shröder) [10]

Por [4],

$$a\prec a+(a\times b) \qquad a\times(a+b)\prec a.$$

De nuevo, por [4], $(a\times b)\prec a$ y $a\prec a+b$, de donde por [2]

H) $\begin{array}{l} a+(a\times b)\prec a \qquad a\prec a\times(a+b). \\ (a+b\prec a)=(b\prec a\times b) \end{array}$ [11]

Esta proposición es una transformación de las dos proposiciones 21 (p. 25) de Schröder, una de las cuales fue formulada por Grassmann. Por [3]

$$(a+b\prec a)\prec(b\prec a) \qquad (b\prec a\times b)\prec(b\prec a).$$

De donde, como

$$b\prec b, \qquad a\prec a$$

tenemos, por [2]

$$(a+b\prec a)\prec(b\prec a\times b) \qquad (b\prec a\times b)\prec(a+b\prec a).$$

I) $\left.\begin{array}{l}(a\prec b)\times(x\prec y)\prec(a+x\prec b+y)\\(a\prec b)\times(x\prec y)\prec(a\times x\prec b\times y)\end{array}\right\}$ (Peirce, 1870) [12]

se demuestran fácilmente a partir de [2] y de [4].

J) $(a\prec(b+x)\times(a\times x\prec b)=(a\prec b).$ [13]

Esta es una generalización de un teorema de Grassmann. Al establecerlo, él conecta erróneamente las dos proposiciones por $+$ en lugar de por $\times$.

Por [12], [5] y [8],

$$(a\prec b+x)\prec\{a\prec(a\times b)+(a\times x)\}$$
$$(a\times x\prec b)\prec\{(a+b)\times(x+b)\prec b\}$$

Pero por [4]

$$a \prec a+b \qquad a \times b \prec b.$$

Por consiguiente, por [2] queda fuera de toda duda que

$$(a \prec b+x) \times (a \times x \prec b) \prec (a \prec b).$$

La demostración de la conversa es obvia.
De [2] y [3] se derivan de forma inmediata

K) $$\begin{aligned} &(a+b \prec c) = (a \prec c) \times (b \prec c) \\ &(c \prec a \times b) = (c \prec a) \times (c \prec b) \end{aligned}$$ [14]

L) $$\begin{aligned} &(c \prec a+b) = \Sigma\{(p \prec a) \times (q \prec b)\}, \quad \text{donde } p+q=c \\ &(a \times b) \prec c = \Sigma\{(a \prec p) \times (b \prec q)\}, \quad \text{donde } c=p \times q \end{aligned}$$ [15]

Las proposiciones [15] son nuevas. Por [12]

$$\begin{aligned} &\{(p \prec a) \times (q \prec b)\} \prec (c \prec a+b), \quad \text{donde } p+q=c \\ &\{(a \prec p) \times (b \prec q)\} \prec (a \times b \prec c), \quad \text{donde } c=p \times q. \end{aligned}$$

Y, como estas son verdaderas para cualquier conjunto de valores de p y de q, tenemos por [2]

$$\begin{aligned} &\Sigma\{(p \prec a) \times (q \prec b)\} \prec (c \prec a+b), \quad \text{donde } p+q=c \\ &\Sigma\{(a \prec p) \times (b \prec q)\} \prec (a \times b \prec c), \quad \text{donde } c=p \times q. \end{aligned}$$

Por [4] y [8] tenemos

$$\begin{aligned} &(c \prec a+b) \prec \{(a \times c)+(b \times c)=c\} \\ &(a \times b \prec c) \prec \{(c+a) \times (c+b)=c\} \end{aligned}$$

De ahí que escribiendo

$$\begin{aligned} &a \times c = p \quad b \times c = q, \quad \text{donde } p+q=c \\ &a+c = p \quad b+c = q, \quad \text{donde } p \times q = c, \end{aligned}$$

tengamos

$$(c \prec a+b) \prec (p \prec a) \times (q \prec b), \qquad \text{donde } p+q=c$$
$$(a \times b \prec c) \prec (a \prec p) \times (b \prec q), \qquad \text{donde } c=p \times q,$$

por lo que, por [4]

$$(c \prec a+b) \prec \Sigma\{(p \prec a) \times (q \prec b)\}, \qquad \text{donde } p+q=c$$
$$(a \times b \prec c) \prec \Sigma\{(a \prec p) \times (b \prec q)\}, \qquad \text{donde } c=p \times q,$$

Más adelante, [35], se hallará una fórmula análoga a [15].

De [1], [2] y [4] se sigue

$$x+0=x \qquad x=x \times \infty. \qquad [16]$$

De [1] y [4],

$$x+\infty=\infty \qquad 0=x+0. \qquad [17]$$

La definición de la negación tiene, como hemos visto, tres cláusulas: primera, que a es de la forma $a \prec x$; segunda, que $a \prec \bar{\bar{a}}$ y tercera que $\bar{\bar{a}} \prec a$.

De la primera se sigue que si

$$\begin{array}{l} c \;\; a \\ \therefore \; b \end{array}$$

es válida, entonces

$$\begin{array}{l} c \;\; \bar{b} \\ \therefore \; \bar{a} \end{array}$$

también lo es, o lo que es lo mismo, que

$$(c \times a \prec b) \prec (c \times \bar{b} \prec \bar{a}). \qquad [18]$$

También se sigue que si

$$\begin{array}{l} b \\ \therefore \; \text{O} \; c \quad \text{o} \quad a \end{array}$$

es válida, entonces

$$\begin{array}{l} \bar{a} \\ \therefore \text{O } c \quad \text{o} \quad \bar{b}. \end{array}$$

también lo es, esto es, que

$$(b \prec c+a) \prec (\bar{a} \prec c+\bar{b}). \qquad [19]$$

Combinando [18] y [19], tenemos

$$(a \times b \prec c+d) \prec (a \times \bar{d} \prec c+\bar{b}). \qquad [20]$$

Por los principios de contradicción y tercio excluso, esto nos da

$$(a \times \bar{d} \prec c+\bar{b}) \prec (a \times b \prec c+d). \qquad [21]$$

Por tanto, la fórmula

$$(a \times b \prec c+d = (a \times \bar{d} \prec c+\bar{b}) \qquad [22]$$

encierra la esencia de la negación.

Si en [22] escribimos, primero, $a=d$, $b=c=0$, y luego $a=d=\infty$, $b=c$, de la fórmula de la identidad se sigue

$$a \times \bar{a} = \text{O} \qquad a+\bar{a} = \infty. \qquad [23]$$

Por [23] y el principio distributivo tenemos

$$p=(p \times x)+(p \times \bar{x}) \qquad p=(p+x) \times (p \times \bar{x}), \qquad [24]$$

Si escribimos

$$i=p+(a+\bar{x}) \quad j=p+(b \times x) \quad k=p \times (c+x) \quad l=p \times (d+\bar{x})$$

tenemos igualmente

$$p=(i \times x)+(j \times \bar{x}) \qquad p=(l+x) \times (k+\bar{x}). \qquad [25]$$

Ahora bien, p puede ser una función de x, y a a, b, c, d se les podrían asignar quizás unos valores tales que i, j, k, l estuvieran libres de x. Es evidente que éste es el caso, si la función es resultado de una complicación de las operaciones $+$ y $\times$. Suponiendo entonces que i, j, k, l son constantes, escribiendo sucesivamente ∞ y 0 en lugar de x tenemos

$$\phi\infty = i = k$$
$$\phi 0 = j = l$$

de suerte que

$$\phi x = (\phi\infty \times x) + (\phi 0 \times \bar{x})$$
$$\phi x = (\phi 0 + x) \times (\phi\infty + x) \qquad [26]$$

La primera de estas fórmulas la dio ya Boole para su adición. En 1867 he mostrado que ambas valen para la adición modificada. Tales fórmulas son completamente análogas a desarrollos matemáticos, pero en la práctica no resultan convenientes. Su conexión sugiere la fórmula general

$$(a + x) \times (b + \bar{x}) = (a \times \bar{x}) + (b \times x), \qquad [27]$$

una fórmula de frecuente utilidad.

El principio distributivo y [3] aplicados a [26] dan

$$\phi 0 \times \phi\infty \prec \phi x \qquad \phi x \prec \phi\infty + \phi 0. \qquad [28]$$

Por lo que

$$(\phi x = 0) \prec (\phi 0 \times \phi\infty = \mathrm{O})$$
$$(\phi x = \infty) \prec (\phi 0 + \phi\infty = \infty). \qquad [29]$$

Boole formuló la primera y yo (1867) la segunda. Tales fórmulas no son convenientes para la eliminación.

Las siguientes fórmulas (probablemente ofrecidas por De Morgan) son de gran importancia:

$$\overline{a \times b} = \bar{a} + \bar{b} \qquad \overline{a + b} = \bar{a} \times \bar{b} \qquad [30]$$

Por [23] tenemos

$$(a \times b) \times \overline{(a \times b)} \prec 0 \qquad \infty \prec (a+b) + \overline{(a+b)},$$

por lo que, por [22] y el principio asociativo

$$\begin{aligned} b \times \overline{(a \times b)} &\prec \bar{a} & \bar{a} &\prec b + \overline{(a+b)} \\ \overline{a \times b} &\prec \bar{a} + \bar{b} & \bar{a} \times \bar{b} &\prec \overline{a+b}. \end{aligned}$$

Por [4] y [22]

$$\begin{aligned} \bar{a} &\prec \overline{a \times b} & \overline{a+b} &\prec \bar{a} \\ \bar{b} &\prec \overline{a \times b} & \overline{a+b} &\prec \bar{b}, \end{aligned}$$

por lo que, por [2]

$$\bar{a} + \bar{b} \prec \overline{a+b} \qquad \overline{a+b} \prec \bar{a} \times \bar{b}.$$

La aplicación de [22] nos da a partir de [11]

$$b \barwedge (a \times b) = (a + b \barwedge a); \tag{31}$$

a partir de [12]

$$\begin{aligned} &(a + x \barwedge b + y) \prec (a \barwedge b) + (x \barwedge y) \\ &(a \times x \barwedge b \times y) \prec (a \barwedge b) + (x \barwedge y); \end{aligned} \tag{32}$$

a partir de [13]

$$(a + b \barwedge b) = (a \barwedge b + x) + (a \times x \barwedge b) \tag{33}$$

de [14]

$$\begin{aligned} &(a + b \barwedge c) = (a \barwedge c) + (b \barwedge c); \\ &(c \barwedge a \times b) = (c \barwedge a) + (c \barwedge b); \end{aligned} \tag{34}$$

de [15]

$$\begin{aligned}(c\overline{\prec}a+b)&=\Pi\{(p\overline{\prec}a)+(q\overline{\prec}b)\} \quad \text{donde } p+q=c\\ (a\times b\overline{\prec}c)&=\Pi\{(a\overline{\prec}p)+(b\overline{\prec}q)\} \quad \text{donde } p\times q=c;\end{aligned} \qquad [35]$$

de [22]

$$(a\times b\overline{\prec}c+d)=(a\times\bar{d}\overline{\prec}c+\bar{b}). \qquad [36]$$

2. La resolución de problemas en la lógica no-relativa

Hay ya cuatro métodos algebraicos distintos para resolver problemas en la lógica de los términos no-relativos que han sido propuestos por Boole, Jevons, Schröder y McColl. Aquí propongo un quinto método que tal vez sea más simple y que desde luego es más natural que cualquiera de los otros. Entraña los siguientes pasos.

Primer paso. Exprésense todas las premisas con las cópulas $\prec$ y $\overline{\prec}$ recordando que $A=B$ es equivalente a $A\prec B$ y $B\prec A$.

Segundo paso. Descompóngase todo predicado en tantos factores y todo sujeto en tantos términos componentes como sea posible sin incrementar el número de letras distintas empleadas en sujeto o predicado.

Una expresión podría descomponerse en factores o componentes semejantes (denominémoslos factores *primos* y componentes *últimos*) mediante alguna de las siguientes fórmulas

$$\begin{aligned}\phi x&=(\phi\infty\times x)+(\phi 0\times\bar{x})\\ \phi x&=(\phi\infty\times\bar{x})\times(\phi 0+x)\end{aligned}$$

Pero el método más fácil es el siguiente: para descomponer una expresión en sus $\left\{\begin{matrix}\text{componentes últimos}\\ \text{factores primos}\end{matrix}\right\}$ tomemos el $\left\{\begin{matrix}\text{producto}\\ \text{suma}\end{matrix}\right\}$ de las distintas letras de la expresión, tomando cada una

positiva o negativamente (es decir, con una raya encima). Por medio de las fórmulas fundamentales

$$X+Y \prec Y \prec Y+Z,$$

miremos a ver si el {producto / suma} considerado es un {sujeto / predicado} de cada {factor / componente} de la expresión dada. Si lo es, es un {componente último / factor primo} de dicha expresión; en caso contrario, no. Procedamos de este modo hasta hallar tantos {componentes últimos / factores primos} como la expresión posea. Este número se averigua en el caso de un {producto de sumas / suma de productos} de letras del siguiente modo. Sea m el número de letras *distintas* de la expresión (no considerándose distintas una letra y su negación); sea n el número total de letras, sea el mismo o distinto y sea p el número de {factores / términos}. Entonces el número de {componentes últimos / factores primos} es

$$2^m+n-mp-p.$$

Supongamos, por ejemplo, que se trata de descomponer $x+(y\times z)$ en sus factores primos. Aquí $m=3$, $n=3$, $p=2$. Por consiguiente, el número de factores es tres. Considerando $x+y+z$, tenemos

$$x \prec x+y+z, \qquad y\times z \prec x+y+z,$$

de forma que éste es un factor. Considerando $x+y+\bar{z}$, tenemos

$$x \prec x+y+\bar{z}, \qquad y\times z \prec x+y+\bar{z},$$

de forma que éste es otro factor. Es obvio también que $x+\bar{y}+z$ es el tercer factor. En consecuencia, tenemos

$$x+(y\times z)=(x+y+z)\times(x+y+\bar{z})\times(x+\bar{y}+z).$$

Desarrollemos de nuevo la expresión

$$(\bar{a}+b+c)\times(a+\bar{b}+\bar{c}),\qquad (a+b+c).$$

Aquí $m=3$, $n=9$, $p=3$, por lo que el número de componentes últimos es cinco. Por tanto, de los ocho posibles productos de tres letras, sólo quedan excluidos tres, a saber: $(a\times\bar{b}\times\bar{c})$, $(\bar{a}\times b\times c)$ y $(\bar{a}\times\bar{b}\times\bar{c})$. Tenemos por tanto,

$$(\bar{a}+b+c)\times(a+\bar{b}+\bar{c})\times(a+b+c)=$$
$$(a\times b\times c)+(a\times b\times\bar{c})+(a\times\bar{b}\times c)+(\bar{a}\times b\times\bar{c})+(\bar{a}\times\bar{\beta}\times c).$$

Tercer paso. Descompónganse todas las proposiciones complejas en proposiciones simples por medio de las siguientes fórmulas de las definiciones de + y ×:

$$(\mathrm{X}+\mathrm{Y}\prec\mathrm{Z})=(\mathrm{X}\prec\mathrm{Z})\times(\mathrm{Y}\prec\mathrm{Z})$$
$$(\mathrm{X}\prec\mathrm{Y}\times\mathrm{Z})=(\mathrm{X}\prec\mathrm{Y})\times(\mathrm{X}\prec\mathrm{Z})$$
$$(\mathrm{X}+\mathrm{Y}\precsim\mathrm{Z})=(\mathrm{X}\precsim\mathrm{Z})+(\mathrm{Y}\precsim\mathrm{Z})$$
$$(\mathrm{X}\precsim\mathrm{Y}\times\mathrm{Z})=(\mathrm{X}\precsim\mathrm{Y})+(\mathrm{X}\precsim\mathrm{Z})$$

En la práctica, las tres primeras operaciones se realizarán, en general, directamente al escribir las premisas.

Cuarto paso. Si hemos llegado a dos proposiciones, una de las cuales tiene alguna de las formas

$$a\prec b+x,\qquad a\times\bar{x}\prec b,$$

y la otra alguna de las formas

$$c\prec d+\bar{x},\qquad c\times x\prec d,$$

por la transitividad de la cópula podemos eliminar x y llegar de este modo a

$$a \times c \prec b + d.$$

Quinto paso. Podemos transponer cualquier término del sujeto al predicado o a la inversa, cambiándolo de positivo a negativo o a la inversa, y cambiando al mismo tiempo su modo de composición de adición a multiplicación o viceversa. Así:

$$(x \times y \prec z) = (x \prec \bar{y} + z).$$

De este modo podemos conseguir todos los sujetos y predicados de una letra, o concentrar todas las letras en el sujeto, en este caso el pedicado es 0, o todas en el predicado, en cuyo caso el sujeto será ∞.

Sexto paso. Un número cualquiera de proposiciones que tengan un $\left\{\begin{matrix}\text{sujeto}\\ \text{predicado}\end{matrix}\right\}$ común, tomadas conjuntamente, son equivalentes a su $\left\{\begin{matrix}\text{producto}\\ \text{suma}\end{matrix}\right\}$.

Como ejemplo de este método, podemos considerar un conocido problema expuesto por Boole. Los datos son los siguientes

$$\bar{x} \times \bar{z} \prec v \times (y \times \bar{w} + \bar{y} \times w)$$
$$\bar{v} \times x \times w \prec (y \times z) + (\bar{y} \times \bar{z})$$
$$(x \times y) + (v \times x \times \bar{y}) = (z \times \bar{w}) + (\bar{z} \times w).$$

Lo que se busca es, primero, hallar aquellos predicados de x que sólo entrañan y, z y w; segundo, hallar las relaciones que puedan mediar entre y, z, w; tercero, hallar los predicados de y; cuarto, hallar las relaciones que puedan mediar entre x, z y w. Mediante los primeros tres pasos, realizados mentalmente, resolvemos las premisas del siguiente modo: la primera en

$$\bar{x} \times \bar{z} \prec v$$
$$\bar{x} \times \bar{z} \prec y + w$$
$$\bar{x} \times \bar{z} \prec \bar{y} + \bar{w};$$

la segunda en

$$\bar{v} \times x \times w \prec y + \bar{z}$$
$$\bar{v} \times x \times w \prec \bar{y} + z;$$

la tercera en

$$x \times y \prec z + w$$
$$x \times y \prec \bar{z} + \bar{w}$$
$$v \times x \times \bar{y} \prec \bar{z} + w$$
$$v \times x \times \bar{y} \prec \bar{z} + \bar{w}$$
$$z \times \bar{w} \prec x$$
$$\bar{z} \times w \prec v + y$$
$$z \times \bar{w} \prec x$$
$$z \times w \prec v + y.$$

Lo primero que tenemos que hacer es eliminar v, de la que no nos interesa saber nada. Tenemos entonces de un lado las proposiciones

$$v \times x \times \bar{y} \prec z + w$$
$$v \times x \times \bar{y} \prec \bar{z} + \bar{w};$$

y, de otro, las proposiciones

$$\bar{x} \times \bar{z} \prec v$$
$$\bar{v} \times x \times w \prec y + \bar{z}$$
$$\bar{v} \times x \times w \prec \bar{y} + z$$
$$z \times \bar{w} \prec v + y$$
$$\bar{z} \times w \prec v + y.$$

Las conclusiones de tales proposiciones se obtienen tomando una de cada conjunto, multiplicando sus sujetos, añadiendo sus predicados y omitiendo v. El resultado será simplemente una proposición vacía si se encuentra en el predicado y en el sujeto la misma letra con la misma cualidad positiva o negativa o si se la encuentra dos veces con cualidades opuestas en el sujeto o en el predicado. Así, no servirá de nada combinar la proposición $v \times x \times \bar{y} \prec z + w$ con una que contenga $\bar{x}$, y, z o w en el sujeto. Pero todas las del segundo conjunto lo hacen, por lo que

de esta proposición no se puede inferir nada. Tampoco servirá de nada combinar $v \times x \times \bar{y} \prec \bar{z} + \bar{w}$ con alguna que contenga $\bar{x}$, y, $\bar{z}$, $\bar{w}$ en el sujeto o z en el predicado. Esto excluye toda proposición del segundo conjunto salvo $\bar{v} \times x \times w \prec y + \bar{z}$, que, combinada con la proposición que estamos analizando, nos da

$$x \times w \prec y + \bar{z} + \bar{w}$$

esto es

$$x \times w \prec y + \bar{z},$$

de la que hemos de servirnos, por tanto, en lugar de todas las premisas que contienen v.

Una de las otras proposiciones, a saber, $\bar{x} \times \bar{z} \prec \bar{y} + \bar{w}$ está claramente contenida en otra, a saber, $\bar{z} \times w \prec x$. Dejándola de lado, nuestras premisas se reducen a las seis siguientes:

$$\bar{x} \times \bar{z} \prec y + w$$
$$x \times y \prec z + w$$
$$x \times y \prec \bar{z} + \bar{w}$$
$$z \times \bar{w} \prec x$$
$$\bar{z} \times w \prec x$$
$$x \times w \prec y + \bar{z}$$

La segunda, tercera y sexta nos dan los predicados de x. Su producto es

$$x \prec (\bar{y} + z + w) \times (\bar{y} + \bar{z} + \bar{w}) \times (y + \bar{z} + \bar{w})$$

o, lo que es lo mismo

$$x \prec y \times z \times \bar{w} + y \times \bar{z} \times w + \bar{y} \times z \times \bar{w} + \bar{y} \times \bar{z} \times w + \bar{y} \times \bar{z} \times \bar{w}$$

esto es,

$$x \prec z \times \bar{w} + \bar{z} \times w + \bar{y} \times \bar{z} \times \bar{w}.$$

Para averiguar si mediante la eliminación de x se puede obtener alguna relación entre y, z y w, hallamos los sujetos de x

combinando la primera, cuarta y quinta premisas. De este modo llegamos a

$$\bar{y} \times \bar{z} \times \bar{w} + z \times \bar{w} + \bar{z} \times w \prec x.$$

Es evidente que la conclusión de las dos últimas proposiciones es una proposición meramente idéntica y que, por consiguiente, entre y, z y w no hay implícita ninguna relación independiente.

Para hallar los predicados de y, combinamos las proposiciones segunda y tercera. Esto nos da

$$y \prec (\bar{x} + z + w) \times (\bar{x} + \bar{z} + \bar{w})$$

esto es,

$$y \prec x \times z \times \bar{w} + x \times \bar{z} \times w + \bar{x}.$$

En las premisas se dan dos relaciones entre x, z y w que son $z \times \bar{w} \prec x$ y $\bar{z} \times w \prec x$. Para averiguar si hay o no implícita alguna otra, eliminamos y entre la proposición anterior y las premisas primera y sexta. Esto nos da

$$\bar{x} \times \bar{z} \prec x \times z \times \bar{w} + w + \bar{x}$$
$$x \times w \prec x \times z \times \bar{w} + \bar{x} + \bar{z}.$$

La primera conclusión es vacía. La segunda es equivaente a $x \times w \prec \bar{z}$, que es una tercera relación entre x, z y w.

Todo lo implícito en las premisas relativo a las relaciones entre x, y, z, w se puede resumir en la proposición

$$\infty \prec x + z \times w + y \times \bar{z} \times \bar{w}.$$

Parte III. La lógica de relativos

1. Términos individuales y simples

De igual modo que hemos tenido que empezar el estudio de la adición y multiplicación lógicas considerando ∞ y 0, términos que hubiéramos podido introducir en el álgebra de la cópula, definiéndolos únicamente en términos de la cópula, sin el recur-

so de + o ×, pero que no lo hicimos por no tener allí ninguna aplicación, hemos de empezar el estudio de los relativos considerando la doctrina de los términos individuales y simples, una doctrina que sólo hace uso de los conceptos de la lógica no-relativa, pero que aunque carece por completo de utilidad en este apartado, es el fundamento del concepto de relativo y la base de la forma de operar con el álgebra de relativos.

El germen de la verdadera teoría de los términos individuales y simples se halla en la *Crítica de la razón pura* de Kant, «Apéndice a la dialéctica transcendental», donde él la establece como un principio regulativo, según el cual, si

$$a \prec b \qquad b \bar{\prec} a,$$

entonces siempre es posible hallar un término x tal que

$$a \prec x \qquad x \prec b$$
$$x \bar{\prec} a \qquad b \bar{\prec} x.$$

La distinción kantiana entre principio regulativo y principio constitutivo carece de fundamento, pero esta *ley de continuidad,* como él la llama, debe ser aceptada como un hecho. La demostración de la misma, que he ofrecido en otra parte, se basa en la continuidad del espacio, el tiempo y la intensidad de las cualidades que entran en la definición de un término. Si, por ejemplo, decimos que Europa, Asia, Africa y Norteamérica son continentes, pero no todos los continentes, sólo queda fuera Suramérica. Pero podemos distinguir entre Suramérica tal y como ahora existe y Suramérica en las primeras épocas geológicas; podemos por tanto, considerar que x incluye Europa, Asia, Africa, Norteamérica y Suramérica tal como es ahora, en cuyo caso todo x es un continente, pero no todo continente es x.

De igual modo que en matemáticas hablamos de infinitésimos y de infinitos, que son límites ficticios de la cantidad continua, y todo enunciado que incluya tales expresiones tiene su interpretación en la doctrina de los límites, en lógica podemos definir un *individuo*, A, como un término tal que

$$A \bar{\prec} O,$$

pero tal que si

$$x < \mathrm{A}$$

entonces

$$x \prec 0.$$

Y del mismo modo, podemos definir el término *simple*, *a*, como aquel término tal que

$$\infty \overline{\prec} a,$$

pero tal que si

$$a < x$$

entonces

$$\infty \prec x.$$

Los términos individual y simple, tal y como han sido definidos aquí, son límites ideales y todo enunciado acerca de uno u otro ha de interpretarse con ayuda de la doctrina de los límites.

Todo término puede ser considerado como una suma lógica ilimitada de individuos o como un producto ilimitado de simples; del siguiente modo,

$$a = \mathrm{A}_1 + \mathrm{A}_2 + \mathrm{A}_3 + \mathrm{A}_4 + \mathrm{A}_5 + \text{ etc.}$$
$$\bar{a} = \bar{\mathrm{A}}_1 \times \bar{\mathrm{A}}_2 \times \bar{\mathrm{A}}_3 \times \bar{\mathrm{A}}_4 \times \bar{\mathrm{A}}_5 \times \text{ etc.}$$

Vemos, pues, que un término simple es la negación de uno individual.

2. Relativos

Un *relativo* es un término cuya definición describe qué tipo de sistema de objetos es aquel cuyo primer miembro (que se

llama *relato*) es denotado por el término, siendo lo normal que se asignen nombres a los otros miembros del sistema (que se llaman *correlatos*) para limitar aún más la denotación. En tales sistemas el orden entre los miembros es esencial, de suerte que (A, B, C) y (A, C, B) constituyen sistemas distintos. Pongamos como ejemplo de relativo 'comprador de — — — por — — — — *a*'; podemos adjuntar a éste tres correlatos del siguiente modo 'comprador de todo caballo de cierta clase por un buen precio a su propietario'.

A un relativo de un solo correlato, tal que el sistema que presupone sea un par, se le puede dar el nombre de relativo *dual*; a uno de más de un correlato, el de relativo *plural*. De un término no-relativo se puede decir que es un término de *referencia singular*.

Todo relativo, como todo término de referencia singular, es general; su definición describe un sistema en términos generales y, en tanto que general, puede ser considerado como una suma lógica de relativos individuales o como un producto lógico de relativos simples[23]. Un relativo simple se refiere a un sistema cuyos miembros son todos ellos individuales. Las expresiones

(A : B) (A : B : C)

pueden designar relativos individuales. Tomando, por ejemplo, relativos individuales duales, podemos disponerlos a todos en un cuadro infinito del siguiente modo

A : A	A : B	A : C	A : D	A : E	etc.
B : A	B : B	B : C	B : D	B : E	etc.
C : A	C : B	C : C	C : D	C : E	etc.
D : A	D : B	D : C	D : D	D : E	etc.
E : A	E : B	E : C	E : D	E : E	etc.
etc.	etc.	etc.	etc.	etc.	

Del mismo modo, los relativos individuales triples se pueden disponer en un cubo, y así sucesivamente. La suma lógica de

[23] En mi *Logic of Relatives* (1870) he usado esta expresión ('relativos simples') para designar lo que ahora llamo *relativos duales*.

todos los relativos de este cuadro infinito constituirá el universo relativo, ∞, en el que

$$x \prec \infty,$$

cualquiera que sea el relativo dual x. No es preciso distinguir el universo dual, el universo triple, etc., porque, añadiendo al sistema un miembro adicional completamente indefinido, se puede convertir un relativo dual en un relativo triple, etc. Así, por ejemplo, en lugar de *amante de una mujer* podemos escribir *amante de una mujer coexistente con algo*. Del mismo modo, un término de referencia única es equivalente a un relativo con un correlato indefinido. Así, *mujer* es equivalente a *mujer coexistente con algo*. Por consiguiente, tendremos:

$$\begin{aligned} A &= A:A + A:B + A:C + A:D + A:E + \text{etc.} \\ A:B &= A:B:A + A:B:B + A:B:C + A:B:D + \text{etc.} \end{aligned}$$

De la definición de un término simple dada en la última sección se deduce que todo relativo simple es la negación de un término individual. Pero mientras que en la lógica no-relativa la negación divide el universo únicamente en dos partes, en la lógica relativa la misma operación divide el universo en 2^n partes, donde n es el número de objetos del sistema supuesto por el relativo; así pues

$$\begin{aligned} \infty &= A + \bar{A} \\ \infty &= A:B + \bar{A}:B + A:\bar{B} + \bar{A}:\bar{B} \\ \infty &= (A:B:C) + (\bar{A}:B:C) + (A:\bar{B}:C) + (A:B:\bar{C}) \\ &\quad + (\bar{A}:\bar{B}:\bar{C}) + (A:\bar{B}:\bar{C}) + (\bar{A}:B:\bar{C}) + (\bar{A}:\bar{B}:C). \end{aligned}$$

Tenemos aquí

$$\begin{aligned} A &= A:B + A:\bar{B};\ \bar{A} = \bar{A}:B + \bar{A}:\bar{B}; \\ A:B &= A:B:C + A:B:\bar{C};\ A:\bar{B} = A:\bar{B}:C + A:\bar{B}:\bar{C}; \\ \bar{A}:B &= \bar{A}:B:C + \bar{A}:B:\bar{C};\ \bar{A}:\bar{B} = \bar{A}:\bar{B}:C + \bar{A}:\bar{B}:\bar{C}. \end{aligned}$$

Se observará que un término que es individual cuando se lo considera n-ádico no lo es cuando se considera que es más que

n-ádico; pero un término *n*-ádico cuando se lo convierte en $(m+n)$-ádico es individual respecto a *n* miembros del sistema e indefinido respecto a *m* miembros.

En lugar de considerar el sistema de un relativo como ompuesto de individuos no-relativos, podemos concebirlo como compuesto de individuos relativos. Así, dado que

$$A = A:A + A:B + A:C + A:D + \text{etc.},$$

tenemos

$$A:B = (A:A):B + (A:B):B + (A:C):B + (A:D):B + \text{etc.}$$

Pero

$$B = B:A + B:B + B:C + B:D + \text{etc.};$$

de suerte que

$$A:B = A:(B:A) + A:(B:B) + A:(B:C) + A:(B:D) + \text{etc.}$$

3. Relativos conectados por transposición de relato y correlato

A todo relativo dual tal como

$$l = \Sigma(A:B) = \Pi(\alpha:\beta),$$

corresponde otro que se denomina su *converso*,

$$k - l = \Sigma(B:A) = \Pi(\beta:\alpha),$$

en el que relato y correlato han sufrido una transposición. El converso, *k*, es a su vez un relativo, siendo

$$k = \Sigma[(A:B):(B:A)];$$

es decir, se trata del primero de un par que abarca dos relativos duales individuales, cada uno de los cuales es el converso del

otro. La conversa de la conversa es la propia relación, esto es,

$$k-k-l=l,$$

o, lo que es lo mismo,

$$kk=1.$$

Tenemos también

$$k-\bar{l}=\overline{k-l}$$
$$k\Sigma=\Sigma k$$
$$k\Pi=\Pi k.$$

En el caso de los relativos triples hay cinco transposiciones posibles. Así, si

$$b=\Sigma[(\mathrm{A}:\mathrm{B}):\mathrm{C}]$$

podemos escribir:

$$\mathrm{I}b=\Sigma[(\mathrm{B}:\mathrm{A}):\mathrm{C}]$$
$$\mathrm{J}b\ \Sigma[(\mathrm{A}:\mathrm{C}):\mathrm{B}]$$
$$\mathrm{K}b=\Sigma[(\mathrm{C}:\mathrm{B}):\mathrm{A}]$$
$$\mathrm{L}b=\Sigma[(\mathrm{C}:\mathrm{A}):\mathrm{B}]$$
$$\mathrm{M}b=\Sigma[(\mathrm{B}:\mathrm{C}):\mathrm{A}].$$

Tenemos aquí:

$$\mathrm{LM}=\mathrm{ML}=1$$
$$\mathrm{II}=\mathrm{JJ}=\mathrm{KK}=1$$
$$\mathrm{IJ}=\mathrm{JK}=\mathrm{KI}=\mathrm{L}$$
$$\mathrm{JI}=\mathrm{KJ}=\mathrm{IK}=\mathrm{M}$$
$$\mathrm{IL}=\mathrm{MI}=\mathrm{J}=\mathrm{KM}=\mathrm{LK}$$
$$\mathrm{JL}=\mathrm{MJ}=\mathrm{K}=\mathrm{IM}=\mathrm{LI}$$
$$\mathrm{KL}=\mathrm{MK}=\mathrm{I}=\mathrm{JM}=\mathrm{LJ}.$$

Si escribimos $a:b$ para expresar la operación consistente en poner A en lugar de B en el relativo original

$$b=\Sigma[(A:B):C]$$

entonces tenemos

$$\begin{aligned}
I &= a:b+b:a+c:c \\
J &= a:a+b:c+c:b \\
K &= a:c+b:b+c:a \\
L &= a:b+b:c+c:a \\
M &= a:c+b:a+c:b \\
1 &= a:a+b:b+c:c.
\end{aligned}$$

En este caso tenemos

$$I+J+K=1+L+M,$$

que no implica

$$(I+J+K)l=(1+L+M)l.$$

De modo similar, el relativo n-ádico tendrá $(n!-1)$ funciones de transposición.

4. Clasificación de relativos

Los relativos individuales son de alguna de las dos formas siguientes:

$$A:A \qquad A:B$$

y los simples son negaciones de alguna de estas dos formas.

Hay una infinidad de formas de relativo general, pero las más destacables son especialmente las que se enumeran a continuación.

Los relativos se pueden dividir en aquellos cuyos componentes individuales son todos de la forma A : A y aquellos otros que contienen términos individuales de la forma A : B. A los primeros se les puede llamar *concurrentes*, a los segundos, *oponentes*. Los concurrentes expresan una mera concordancia entre objetos. Tal es, por ejemplo, el caso del relativo '*hombre que es* — —', pudiendo formarse a partir de cualquier término de referencia singular relativos similares. Podemos representar este tipo de relativo por medio del signo empleado para representar el término de referencia singular seguido de una coma; así, si (*m*) significa 'hombre', (*m*,) significará 'hombre que es —'. Del mismo modo, una coma asociada a un relativo *n*-ádico convertirá a éste en un relativo $(n+1)$-ádico. Así, siendo (*l*) 'amante de —', (*l*,) será 'amante que es — de —'.

La negación de un relativo concurrente será un relativo cada uno de cuyos componentes simples es de la forma $\overline{A:A}$ y la negación de un relativo oponente será un relativo cuyos componentes son de la forma $\overline{A:B}$.

También podemos dividir los relativos en aquellos que contienen componentes individuales de la forma A : A y aquellos que sólo contienen componentes de la forma A : B. A los primeros se les puede llamar *auto-relativos*, a los segundos *alio-relativos*. También tenemos negaciones de auto-relativos y negaciones de alio-relativos.

Estas distintas clases mantienen entre sí las siguientes relaciones. Toda negación de un concurrente y todo alio-relativo es a la vez un oponente y la negación de un alio-relativo. Todo concurrente y toda negación de un alio-relativo es a la vez un auto-relativo y la negación de un oponente. No hay más que un relativo que sea concurrente y a la vez la negación de un alio-relativo; es 'idéntico a — —'. No hay más que un relativo que sea alio-relativo y a la vez la negación de un concurrente; es la negación de aquél, esto es, 'otro que — —'[24]. Los siguientes pares de clases son mutuamente excluyentes y se reparten entre sí el conjunto de los relativos:

[24] El relativo 0 debe ser considerado como un concurrente y un alio-relativo a la vez, y el relativo ∞ como la negación de un concurrente y de un alio-relativo. Las enunciaciones del texto necesitan ser modificadas hasta este punto.

alio-relativos y auto-relativos;
concurrentes y oponentes;
negaciones de concurrentes y negaciones de oponentes;
negaciones de alio-relativos y negaciones de auto-relativos.

Ningún relativo puede ser a la vez un alio-relativo o la negación de un concurrente y, al mismo tiempo, un concurrente o la negación de un alio-relativo.

Podemos añadir un punto y coma al símbolo de un relativo para convertirlo en un alio-relativo de un orden superior. Así, (1;) significará 'amante de — que no es — —'.

Esto completa la clasificación de los relativos duales basada en la distinción entre las formas fundamentales: A:A y A:B. Consideraciones similares aplicadas a los relativos triples darían lugar a un desarrollo enormemente complicado, por cuanto que aquí tenemos no menos de cinco formas fundamentales de individuos, a saber,

$$(A:A):A \quad (A:A):B \quad (A:B):A \quad (B:A):A \quad (A:B):C.$$

El número de formas individuales para el relativo $(n+2)$-ádico es:

$$2+(2^n-1)\cdot 3+\frac{1}{2!}\{(3^n-1)-2(2^n-1)\}\cdot 4+\frac{1}{3!}\{(4^n-1)$$
$$-3(3^n-1)+3(2^n-1)\}\cdot 5+\frac{1}{4!}\{(5^n-1)-4(4^n-1)$$
$$-6(3^n-1)-4(2^n-1)\}\cdot 6+\frac{1}{5!}\{(6^n-1)-5(5^n-1)$$
$$+10(4^n-1)-10(3^n-1)+5(2^n-1)\}\cdot 7+\text{etc.}$$

Si llamamos a este número fn tenemos

$$\Delta^n f0=f(n-1)$$
$$f0=1.$$

La forma de calcularlo es

1					
2	1				
5	3	2			
15	10	7	5		
52	37	27	20	15	
203	151	114	87	67	52

donde la línea diagonal es una copia número a número de la línea vertical, hasta donde se ha computado ésta[25].

Los relativos también pueden clasificarse conforme al grado general de compleción del cuadro anteriormente mencionado, cubo, etc., que presenten. En primer lugar, tenemos aquellos relativos en cuyo cuadrado, cubo, etc., toda línea de una cierta dirección en la que hay un solo individuo está completamente llena. Tales relativos pueden denominarse *completos respecto al relato* o al primer, segundo, tercer, etc. correlato. Los relativos duales que equivalen a términos de referencia singular son completos respecto a su correlato.

Un relativo puede ser incompleto con relación a cierto correlato o a su relato y, no obstante esto, puede ocurrir que todo individuo del universo entre de algún modo en dicho correlato o relato. Un relativo así se puede decir que es *ilimitado* en relación al correlato o relato en cuestión. Así, el relativo

$$A:A+A:B+C:C+C:D+E:E+E:F+G:G+G:H, \text{ etc.}$$

es ilimitado respecto a su correlato. La negación de un relativo ilimitado será ilimitada salvo que el relativo tenga como componente un relativo que sea completo respecto de cualquier otro relato y correlato distinto de aquel respecto al cual el relativo en cuestión es ilimitado.

Un relativo totalmente ilimitado es aquel que es ilimitado respecto al relato y a todos los correlatos. Un relativo totalmente ilimitado en el que cada letra entra sólo una vez en el relato y una vez en el correlato recibe el nombre de *sustitución*.

---

[25] Tales números son cada quinto de la serie siguiente: $\bar{1}^*$, -7, 10, -3, $\bar{2}^*$, -5, 5, 2, 3, $\bar{5}^*$, 0, 5, 7, 10, $\bar{15}^*$, 15, 20, 27, 37, $\bar{52}^*$, donde $u_x+u_{x+3}=u_{x+4}$. Pero sólo llega hasta el 203, careciendo por tanto de valor.

Ciertas clases de relativos se caracterizan por la presencia o no presenca de ciertos componentes individuales relacionados de una forma determinada con otros que son instancias. Se puede denominar *ciclo* a un conjunto de relativos duales individuales, cada uno de los cuales tiene por relato el correlato del último, siendo considerado el último de todos como precedente del primero de todos. Si en el ciclo hay n términos individuales, se puede decir que es un ciclo de n^{simo} orden. Así, por ejemplo,

$$A:B \qquad B:C \qquad C:D \qquad D:E \qquad E:A$$

puede decirse que es un ciclo de quinto orden. Ahora bien, si un relativo es de tal naturaleza que de un ciclo de n^{simo} orden del que contiene m términos, también contiene los $(n-m)$ restantes, se puede decir que es un relativo cíclico de n^{simo} orden y m^{simo} grado. En cambio, si de un ciclo de n^{simo} orden del que contiene m términos faltan los $(n-m)$ restantes el relativo puede decirse que es un relativo anticíclico de n^{simo} orden y m^{simo} grado.

Todos los componentes individuales de un relativo cíclico de primer orden y primer grado son de la forma A:A. El relativo cíclico de segundo orden y primer grado se denomina *equiparante*, en tanto que contrapuesto al *disquiparante*.

Una clase de relativos enormemente importante es la de los transitivos, es decir, la de aquellos relativos en los que para cada par de términos individuales de las formas (A:B) y (B:C) siempre se da un término de la forma (A:C).

5. La composición de relativos

Supongamos un par de relativos, bien individuales, bien simples, en los que el relato o correlato del primero sea idéntico al relato o correlato del segundo o de su negación. Este par de relativos sería entonces de alguna de las dieciséis formas siguientes:

$(A:B)(B:C)$	$(\overline{A:B})(B:C)$	$(A:B)(\overline{B:C})$	$(\overline{A:B})(\overline{B:C})$
$(A:B)(C:B)$	$(\overline{A:B})(C:B)$	$(A:B)(\overline{C:B})$	$(\overline{A:B})(\overline{C:B})$
$(B:A)(B:C)$	$(\overline{B:A})(B:C)$	$(B:A)(\overline{B:C})$	$(\overline{B:A})(\overline{B:C})$
$(B:A)(C:B)$	$(\overline{B:A})(C:B)$	$(B:A)(\overline{C:B})$	$(\overline{B:A})(\overline{C:B})$

Ahora bien, sobre cada uno de esos dieciséis pares de relativos, podemos concebir una operación de tal naturaleza que genere alguna de las cuatro formas (A : C), $\overline{(A : C)}$, (C : A), $\overline{(C : A)}$. Por tanto, tendremos en total sesenta y cuatro operaciones.

Podemos simbolizarlas de la siguiente forma. Supongamos que

$$A : B\ (|||)\ B : C = A : C;$$

esto es, que (|||) representa una operación tal que esta fórmula vale necesariamente. Las tres líneas del signo que simboliza esta operación se refieren respectivamente al primer relativo sobre el que se ha operado, al segundo, y al resultado. Cuando alguna de estas líneas es reemplazada por un guión (−), la operación simbolizada es tal que en la fórmula anterior se debe escribir la negación del relativo correspondiente. Así, por ejemplo

$$\overline{A : B}\ (-||)\ B : C = A : C.$$

Del mismo modo podemos suponer que un semicírculo (∪) significa que se ha de tomar el converso del relativo correspondiente. El guión y el semicírculo se pueden emplear a la vez. Por consiguiente, si escribimos el símbolo de un relativo con un semicírculo o curva sobre él para representar el converso de dicho relativo, tendremos, por ejemplo

$$A : B\ (\cup||)\ B : C = A : C.$$

Una combinación de relativos *a* y *e*, tomados en este orden, es equivalente a otras formadas a partir de ésta por medio de la introducción de alguno de los siguientes cambios:

Primero. Poner una raya recta o curva sobre *a* y trocar el primer grafismo del signo de operación del modo correspondiente, que no es sino el siguiente:

para $\breve{a}$, | por ∪ o − por ⊍ o conversamente,
para $\bar{a}$, | por − o ∪ por ⊍ o conversamente,
para $\bar{a}$, | por ⊍ o − por ∪ o conversamente.

Segundo. Introducir modificaciones simultáneas similares en *e* y en el segundo grafismo.

Tercero. Trocar el tercer grafismo de | por — y ∪ por ⊍ o conversamente y, simultáneamente, escribir el símbolo de negación sobre la expresión total.

Cuarto. Trocar el tercer grafismo de | por ∪ o de — por ⊍ o conversamente e intercambiar *a* y *e* y también el primer y segundo grafismos.

Hasta ahora sólo hemos definido el resultado de las sesenta y cuatro operaciones cuando ciertos miembros de los relativos individuales sobre los que se opera son idénticos. Cuando tales miembros no son idénticos, podemos suponer que la operación ||| da lugar, bien al primer relativo, bien al segundo, bien a 0. No podemos suponer que da lugar a ∞ por una razón que se verá más adelante. Elijamos la fórmula

$$A:B\ (|||)\ C:D=0.$$

Las otras operaciones que quedan excluidas se incluirán de un modo que luego veremos. Por medio de las reglas de equivalencia, de esta fórmula se deducirá que todas las operaciones en cuyo símbolo no figure un guión en el tercer lugar también darán lugar a 0 en idénticas circunstancias, en tanto que todas las demás darán como resultado $\bar{0}$ o ∞.

Hasta ahora sólo hemos definido el resultado de las sesenta y cuatro operaciones sobre términos individuales o simples. Para ampliar las definiciones a otros casos, supongamos en primer lugar que las reglas de equivalencia tienen una validez general y, en segundo lugar, que

$$\text{Si } a\prec b \quad \text{y} \quad c\prec d \quad \text{entonces} \quad a\,(|||)\,c\prec b\,(|||)\,d$$

o que

$$(a\prec b)\times(c\prec d)\prec\{a\,(|||)\,c\prec b\,(|||)\,d\}.$$

Entonces, esta regla regirá en todas las operaciones en cuyos símbolos el primer y segundo lugares concuerden con el tercero

en cuanto a tener o no tener guiones. Para el caso de aquellas operaciones en cuyos símbolos el $\left\{\begin{matrix}\text{primer}\\\text{segundo}\end{matrix}\right\}$ símbolo no concuerda con el tercero hemos de escribir $\left\{\begin{matrix}b\prec a\\d\prec c\end{matrix}\right\}$ en lugar de la expresión $\left\{\begin{matrix}a\prec b\\c\prec d\end{matrix}\right\}$ de esta regla. De este modo, las sesenta y cuatro operaciones se pueden dividir en cuatro clases según la regla que sigan de las cuatro así producidas.

Se ve ahora que los guiones son los únicos signos que tienen relavancia en relación con la regla que sigue una operación. En consecuencia, hemos de rechazar todas aquellas operaciones cuyos símolos contengan señales curvas, con lo que sólo quedarán ocho. Para esas ocho valen las siguientes fórmulas:

$$\begin{array}{llll}
A:B\ (|||)\ B:C=A:C & & A:B\ (||-)\ B:C=\overline{A:C} & \\
\overline{A:B}\ (-||)\ B:C=A:C & & \overline{A:B}\ (-|-)\ B:C=\overline{A:C} & \\
A:B\ (|-|)\ \overline{B:C}=A:C & & A:B\ (|--)\ \overline{B:C}=\overline{A:C} & \\
\overline{A:B}(--|)\overline{B:C}=A:C & & \overline{A:B}(---)\overline{B:C}=\overline{A:C} & \\
A:B\ (|||)\ C:D=0 & & A:B\ (||-)\ C:D=\infty & \\
\overline{A:B}\ (-||)\ C:D=0 & & \overline{A:B}\ (-|-)\ C:D=\infty & \\
A:B\ (|-|)\ \overline{C:D}=0 & & A:B\ (|--)\ \overline{C:D}=\infty & \\
\overline{A:B}(--|)\overline{C:D}=0 & & \overline{A:B}(---)\overline{C:D}=\infty &
\end{array}$$

$$\begin{array}{llllll}
(a\prec b)\times(c\prec d)\prec\{a & (|||) & c\prec b & (|||) & d\} & \\
(a\prec b)\times(c\prec d)\prec\{a(---)c\prec b(---)d\} & & & & & \\
(b\prec a)\times(c\prec d)\prec\{a & (-||) & c\prec b & (-||) & d\} & \\
(b\prec a)\times(c\prec d)\prec\{a & (|--) & c\prec b & (|--) & d\} & \\
(a\prec b)\times(d\prec c)\prec\{a & (|-|) & c\prec b & (|-|) & d\} & \\
(a\prec b)\times(d\prec c)\prec\{a & (-|-) & c\prec b & (-|-) & d\} & \\
(b\prec a)\times(d\prec c)\prec\{a & (--|) & c\prec b & (--|) & d\} & \\
(b\prec a)\times(d\prec c)\prec\{a & (||-) & c\prec b & (||-) & d\}. &
\end{array}$$

Como considerar un número tan elevado de operaciones distintas puede resultar incómodo, podemos rechazar una de las mitades de éstas de forma que nos quedemos con una de cada

una de las cuatro reglas. Mantendremos, por tanto, cuatro, a las que podemos asignar los siguientes nombres y símbolos:

$a\ (|||)\ e = ae$ *Multiplicación externa o relativa.*
$a(|--)e = {}^{a}e$ *Involución regresiva.*
$a(-|-)e = a^{e}$ *Involución progresiva.*
$a(--|)e = a \circ e$ *Transadición*[26].

Tenemos entonces la siguiente tabla de equivalentes, negaciones y conversos[27]:

x	$\bar{x}$	$\breve{x}$	$\bar{\breve{x}}$
$ae = \bar{a} \circ \bar{e}$	$\bar{a}^{e} = {}^{a}\bar{e}$	$\breve{e}\breve{a} = \bar{e} \circ \bar{a}$	$\bar{e}^{a} = {}^{e}\bar{a}$
$a^{e} = {}^{a}\bar{e}$	$\bar{a}e = a \circ \bar{e}$	${}^{e}\breve{a} = \bar{e}^{a}$	$\breve{e}\bar{a} = \bar{e} \circ \breve{a}$
${}^{a}e = \bar{a}^{e}$	$a\bar{e} = \bar{a} \circ e$	$\breve{e}^{a} = {}^{e}\bar{a}$	$\bar{e}\breve{a} = \breve{e} \circ \bar{a}$
$a \circ e = \bar{a}\bar{e}$	$a^{e} = {}^{a}e$	$\breve{e} \circ \breve{a} = \bar{e}\bar{a}$	$\breve{e}^{a} = {}^{e}\breve{a}$

Si l representa 'amante' y s 'sirviente', entonces

l_s significa todo lo que es amante de un sirviente de $-$,

l^s todo lo que es amante de todo sirviente de $-$,

l_s todo lo que es en todos los respectos (en los que ama) amante de un sirviente,

$l \circ_s$ todo lo que no es un no-amante sólo de un sirviente de $--$
o todo lo que no es amante de nada salvo de los sirvientes de $--$
o todo lo que de algún modo es un no-amante de alguna cosa fuera de los sirvientes de $--$.

---

[26] Las tres primeras fueron estudiadas por De Morgan («On the Syllogism», n.º IV); la última es nueva. Los nombres dados a las tres primeras (salvo el adjetivo *externa*, sugerido por la operación de Grassmann) se encuentran ya en mi *Logic of Relatives*.

[27] De Morgan ofrece una tabla similar a ésta. Naturalmente, la suya no tiene la simetría de ésta, al no conocer él la cuarta operación.

6. Métodos del álgebra de relativos

El método universal de esta álgebra es el método de los límites, consistente en sustituir ciertas letras por una suma de relativos individuales o producto de relativos simples infinitos; de este modo, resultan posibles ciertas transformaciones que de otro modo no podrían efectuarse.

Para la aplicación de este método resultan indispensables los siguientes teoremas:

Primero: $l^{A:B} = l(A:B) + k\bar{B}.$

Como $\bar{B}$ equivale al término relativo que comprende todos los relativos individuales cuyos relatos no son B, puede resultar útil emplear, como aquí se hace, $k\bar{B}$ para expresar el agregado de todos los relativos individuales cuyo correlato es $\bar{B}$. Para demostrar esta proposición, observamos que

$$l^{A:B} = \overline{\bar{l}(A:B)}.$$

Pero $\bar{l}(A:B)$ sólo contiene relativos individuales cuyo correlato es B, y, de entre ellos, aquellos que no están incluidos en $l(A:B)$. Por consiguiente la negación de $\bar{l}(A:B)$ contiene todos aquellos relativos individuales cuyos correlatos no son B, junto con todos los contenidos en $l(A:B)$. Q.E.D.

Segundo: ${}^{A:B}l = (A:B)l + \bar{A}.$

Aquí $\bar{A}$ se emplea para denotar el agregado de todos los relativos individuales cuyos relatos no son A. Esta proposición se demuestra como la anterior.

Tercero: $\overline{A:B^l} = (A:B)\bar{l} + \bar{A}.$

Esta se desprende de la segunda proposición, porque

$$\overline{A:B^l} = {}^{(A:B)}\bar{l}.$$

Cuarto: $\overline{{}^{l}\mathrm{A}:\mathrm{B}}=\bar{l}(\mathrm{A}:\mathrm{B})+k\bar{\mathrm{B}}.$

Otro método de operar con el álgebra es hacerlo por medio de negaciones. Este resulta completamente imprescindible cuando, como en este trabajo, las operaciones se definen mediante ellas.

Para ilustrar el uso de tales métodos, investiguemos las relaciones de ${}^{l}b$ y l^{b} con lb cuando l y b son relativos totalmente ilimitados. Escribamos

$$l=\Sigma_i(\mathrm{L}_i:\mathrm{M}_i) \qquad b=\Sigma_j(\mathrm{B}_j:\mathrm{C}_j).$$

Entonces, por las reglas de la última sección

$${}^{l}b\prec{}^{\mathrm{L}:\mathrm{M}}b \qquad l^{b}\prec l^{\mathrm{B}:\mathrm{C}};$$

por lo que, por las proposiciones anteriores segunda y tercera,

$${}^{l}b\prec(\mathrm{L}_i:\mathrm{M}_i)b+\bar{\mathrm{L}}_i \qquad l^{b}\prec l(\mathrm{B}_j:\mathrm{C}_j)+k\bar{\mathrm{B}}_j.$$

Pero, por la primera regla de la última sección,

$$(\mathrm{L}_i:\mathrm{M}_i)b\prec lb \qquad l(\mathrm{B}_j:\mathrm{C}_j)\prec lb;$$

de donde se deduce

$${}^{l}b\prec lb+\bar{\mathrm{L}}_i \qquad l^{b}\prec lb+k\bar{\mathrm{B}}_j.$$

Habrá proposiciones como éstas para los distintos valores de i y de j.

Tomando juntas las de los diferentes conjuntos, tenemos

$${}^{l}b\prec lb+\Pi_i\bar{\mathrm{L}}_i \qquad l^{b}\prec lb+\Pi_j k\bar{\mathrm{B}}_j.$$

Pero

$$\Pi_i\bar{\mathrm{L}}_i=\overline{\Sigma_i\mathrm{L}_i} \qquad \Pi_j k\bar{\mathrm{B}}_j=\overline{\Sigma_j k\mathrm{B}_j},$$

y como los relativos son ilimitados,

$$\Sigma_i L_i = \infty \qquad \Sigma_j k B_j = \infty$$
$$\overline{\Sigma_i L_i} = 0 \qquad \overline{\Sigma_j k B_j} = 0;$$

de donde se deduce

$$^l b \prec lb \qquad l^b \prec lb.$$

De igual modo, no es difícil mostrar que, si las negaciones de l y b son totalmente ilimitadas,

$$l^b \prec l \circ b \qquad ^l b \prec l \circ b.$$

7. Las fórmulas generales para los relativos

Las principales fórmulas de esta álgebra se pueden dividir en *fórmulas de distribución* y *fórmulas de asociación*. Las primeras son aquellas que nos ofrecen el equivalente de un relativo compuesto por una suma o producto de dos relativos en términos tales que separan estos dos relativos. Las fórmulas de asociación son aquellas que nos ofrecen el equivalente de un relativo A compuesto por un compuesto de B y C en términos de un compuesto de A y B compuesto con C.

I. FORMULAS DE DISTRIBUCION

1. AFIRMATIVAS

i. *Fórmulas simples*

$$(a+b)c = ac+bc \qquad a(b+c) = ab+ac$$
$$(a \times b)^c = a^c \times b^c \qquad a^{b+c} = a^b \times a^c$$
$$^{a+b}c = {}^a c \times {}^b c \qquad {}^a(b \times c) = {}^a b \times {}^a c$$
$$(a \times b) \circ c = (a \circ c)+(b \circ c) \qquad a \circ (b \times c) = (a \circ b)+(a \circ c)$$

ii. *Desarrollos*

$$
\begin{aligned}
(a\times b)c &= \Pi_p\{a(c\times p)+b(c\times \bar{p})\}\\
(a+b)^c &= \Sigma_p\{a^{c\times p}\times b^{c\times p}\}\\
{}^{(a\times b)}c &= \Sigma_p\{{}^a(c+p)\times {}^b(c+\bar{p})\}\\
(a+b)\circ c &= \Pi_p\{a\circ(c+p)+b\circ(c+\bar{p})\}\\
a(b\times c) &= \Pi_p\{(a\times p)b+(a\times \bar{p})c\}\\
a^{b\times c} &= \Sigma_p\{(a+p)^b\times(a+\bar{p})^c\}\\
{}^a(b+c) &= \Sigma_p\{{}^{a\times p}b\times {}^{a\times p}c\}\\
a\circ(b+c) &= \Pi_p\{(a+p)\circ b+(a+\bar{p})\circ c\}
\end{aligned}
$$

2. NEGATIVAS

i. *Fórmulas simples*

$$
\begin{aligned}
\overline{(a+b)c} &= \overline{ac}\times\overline{bc} & \overline{a(b+c)} &= \overline{ab}\times\overline{ac}\\
\overline{(a\times b)^c} &= \overline{a^c}+\overline{b^c} & \overline{a^{b+c}} &= \overline{a^b}+\overline{a^c}\\
\overline{{}^{a+b}c} &= \overline{{}^ac}+\overline{{}^bc} & \overline{{}^a(b\times c)} &= \overline{{}^ab}+\overline{{}^ac}\\
\overline{(a\times b)\circ c} &= \overline{a\circ c}\times\overline{b\circ c} & \overline{a\circ(b\times c)} &= \overline{a\circ b}\times\overline{a\circ c}
\end{aligned}
$$

ii. *Desarrollos*

$$
\begin{aligned}
\overline{(a\times b)c} &= \Sigma_p\{\overline{a(c\times p)}\times\overline{b(c\times\bar{p})}\}\\
\overline{(a+b)^c} &= \Pi_p\{\overline{a^{c\times p}}+\overline{b^{c\times p}}\}\\
\overline{{}^{(a\times b)}c} &= \Pi_p\{\overline{{}^a(c+p)}+\overline{{}^b(c+\bar{p})}\}\\
\overline{(a+b)\circ c} &= \Sigma_p\{\overline{a\circ(c+p)}\times\overline{b\circ(c+\bar{p})}\}\\
\overline{a(b\times c)} &= \Sigma_p\{\overline{(a\times p)b}\times\overline{(a\times\bar{p})c}\}\\
\overline{a^{b\times c}} &= \Pi_p\{\overline{(a+p)^b}+\overline{(a+\bar{p})^c}\}\\
\overline{{}^a(b+c)} &= \Pi_p\{\overline{{}^{a\times p}b}+\overline{{}^{a\times p}c}\}\\
\overline{a\circ(b+c)} &= \Xi_p\{\overline{(a+p)\circ b}\times\overline{(a+\bar{p})\circ c}\}
\end{aligned}
$$

II. FORMULAS DE ASOCIACION

1. AFIRMATIVAS

i. *Fórmulas simples*

$$\overline{{}^{a}(bc)} = a(bc) = (ab)c = \overline{(ab)^{c}}$$

$$\overline{a \circ (b \circ c)} = a^{(b \circ c)} = {}^{(a \circ b)}c = \overline{(a \circ b) \circ c}$$

$$\overline{a \circ (\overline{bc})} = a^{(bc)} = (a^{b})^{c} = \overline{(a^{b})c}$$

$$\overline{{}^{a}(b \circ c)} = a(b \circ c) = ({}^{a}b) \circ = \overline{{}^{(ab)}c}$$

$$\overline{a(b^{c})} = {}^{a}(b^{c}) = ({}^{a}b)^{c} = \overline{({}^{a}b)c}$$

$$\overline{a^{(bc)}} = a \circ ({}^{b}c) = (a^{b}) \circ c = \overline{{}^{(a^{b})}c}$$

$$\overline{a({}^{b}c)} = {}^{a}({}^{b}c) = {}^{(ab)}c = \overline{(ab) \circ c}$$

$$\overline{a^{(bc)}} = a \circ (b^{c}) = (a \circ b)c = \overline{(a \circ b)^{c}}$$

ii. *Desarrollos*

(A y E son componentes individuales y α y ε componentes simples de a y e. Las sumas y productos son relativos a tales elementos y componentes. Las fórmulas son de cuatro clases y para cualquier relativo c valen o bien todas las fórmulas de la clase 1 o bien todas las de la 2 y, así mismo, o todas las de la 3 o todas las de la 4.

CLASE 1.

$$\overline{a(bc)} = {}^{a}(bc) = \Pi\{({}^{A}b)c\} = \Pi\{\overline{({}^{A}b)^{c}}\}$$

$$\overline{a^{(bc)}} = a \circ (bc) = \Sigma\{(\alpha \circ b)^{c}\} = \Sigma\{\overline{(\alpha \circ b)c}\}$$

$$\overline{a \circ (b^{c})} = a^{(b^{c})} = \Pi\{\alpha^{b})c\} = \Pi\{\overline{(\alpha^{b})^{c}}\}$$

$$\overline{{}^{a}(b^{c})} = a(b^{c}) = \Sigma\{(Ab)^{c}\} = \Sigma\{\overline{(Ab)c}\}$$

CLASE 2.

$$\overline{(c\circ d)e}=(\circ d)^{e} \quad =\pi\{c\circ(d\mathrm{E})\} \quad =\Pi\{\overline{c^{(d\mathrm{E})}}\}$$

$$\overline{{}^{(c\circ d)}e} \quad =(c\circ d)\circ e=\Sigma\{c^{({}^{d}e)}\} \quad =\Sigma\{\overline{c\circ({}^{d}\varepsilon)}\}$$

$$\overline{(c^{d})\circ e} \quad ={}^{(c^{d})}e \quad =\Pi\{c\circ(d\circ\varepsilon)\}=\Pi\{\overline{c^{(d\circ\varepsilon)}}\}$$

$$\overline{(c^{d})^{e}} \quad =(c^{d})e \quad =\Sigma\{c^{(d^{\mathrm{E}})}\} \quad =\Sigma\{\overline{c\circ(d^{\mathrm{E}})}\}$$

CLASE 3.

$$\overline{a^{(b\circ c)}} \quad =a\circ(b\circ c)=\Sigma\{{}^{(a^{b})}c\} \quad =\Sigma\{\overline{(\alpha^{b})c}\}$$

$$\overline{a\,(b\circ c)}={}^{a}(b\circ c) \quad =\Pi\{(\mathrm{A}b)\circ c\}=\Pi\{\overline{{}^{(\mathrm{A}b)}c}\}$$

$$\overline{{}^{a}({}^{b}c)} \quad =a\,({}^{b}c) \quad =\Sigma\{{}^{(\mathrm{A}b)}c\} \quad =\Sigma\{\overline{({}^{\mathrm{A}}b)\circ c}\}$$

$$\overline{a\circ({}^{b}c)} \quad =a^{(bc)} \quad =\Pi\{\alpha\circ b)\circ c\}=\Pi\{\overline{{}^{(\alpha\circ b)}c}\}$$

CLASE 4.

$$\overline{{}^{(cd)}e} \quad =(cd)\circ e=\Sigma\{{}^{c}(d\circ\varepsilon)\}=\Sigma\{\overline{c\,(d\circ\varepsilon)}\}$$

$$\overline{(cd)e} \quad =(cd)^{e} \quad =\Pi\{c\,(d^{\mathrm{E}})\} \quad =\Pi\{\overline{{}^{c}(d^{\mathrm{E}})}\}$$

$$\overline{({}^{c}d)^{e}} \quad =({}^{c}d)e \quad =\Sigma\{{}^{c}(d\mathrm{E})\} \quad =\Sigma\{\overline{c\,(d\mathrm{E})}\}$$

$$\overline{({}^{c}d)\circ e}={}^{(cd)}e \quad =\Pi\{c\,({}^{d}\varepsilon)\} \quad =\Pi\{\overline{{}^{c}({}^{d}\varepsilon)}\}$$

Las fórmulas negativas se derivan de las afirmativas por el simple procedimiento de borrar o trazar líneas sobre todos y cada uno de los miembros de cada ecuación.

Para ver las reglas generales seguidas por estas fórmulas, es preciso que nos imaginemos las operaciones simbolizadas por tres grafismos, como al comienzo de esta parte. Podemos denominar a la operación que une las dos letras del interior del paréntesis operación *interior* y a la que une la totalidad del

paréntesis a la tercera letra, operación *exterior*. Por *grafismos-junctores* entenderemos, en el caso de que el paréntesis $\left\{\begin{matrix}\text{siga}\\\text{preceda}\end{matrix}\right\}$ a la tercera letra, el grafismo $\left\{\begin{matrix}\text{primero}\\\text{segundo}\end{matrix}\right\}$ del símbolo de la operación interior y el grafismo $\left\{\begin{matrix}\text{segundo}\\\text{primero}\end{matrix}\right\}$ del símbolo de la operación exterior. Sirviéndonos de tales expresiones, podemos decir que el grafismo-junctor exterior y el tercer grafismo de la operación interior siempre pueden intercambiarse. Cuando son idénticos, estamos ante una fórmula de asociación simple. Dicha fórmula consiste en la posibilidad de intercambiar simultáneamente los grafismos-junctores, los terceros y la exterioridad o interioridad de las dos operaciones. Cuando el grafismo-junctor exterior y el tercero de la operación interior son distintos, estamos ante una fórmula de asociación evolutiva. La expresión general de esta fórmula se obtiene haciendo los mismos intercambios que en las fórmulas simples y luego cambiando *a* por A en caso de que, tras esos intercambios, aparezcan *ab* o ${}^{a}b$ en el paréntesis, *a* por α, en caso de que aparezcan a^b o $a \circ b$, *e* por E en caso de que lo haga *de* o d^e, y *e* por ε si es ${}^{d}e$ o $d \circ e$ lo que aparece. Cuando el tercer grafismo del símbolo de operación exterior es afirmativo, el desarrollo es una suma; cuando es negativo, es un producto continuo.

En la primera mitad de las fórmulas, el segundo grafismo del signo de la operación interior es una línea en la clase 1 y un guión en la clase 3. En la segunda mitad, el primer grafismo del signo de la operación interior es un guión en la clase 2 y una línea en la clase 4.