MS 1061

# Sur la Flexion des pieds des pendules.

Par, C. S. Peirce, Assistant U. S. Coast Survey. 1061

Lorsque j'étais chargé des études du Coast Survey sur la pesanteur, j'ai commandé des Messieurs Repsold un pendule à reversion qui doit être copie de celui de l'Institut géodesique de la Prusse. Mais ces méchaniciens étaient dans ce temps-là si occupés des instruments pour le passage de Venus, que le pendule n'était fini qu'au printemps de 1875. Alors, je me suis rendu à Hambourg pour le recevoir; et de Hambourg j'ai allé à Berlin, où j'ai trouvé Son Exc. M. le Général Baeyer pas ~~tres~~ tout-à-fait ~~m~~content des résultats obtenus avec son l'instrument. Il s'est plaint surtout de ~~la~~ flexibilité de la pied, une source d'erreur qui n'a certainement jamais échappé à l'attention des observateurs du pendule.* L'appareil de pendule que j'ai ~~porté~~ apporté ~~avec moi~~ ~~en Europe~~ de l'Amérique était

* Le Docteur Young dans son Article sur les marées dans l'Encyclopédie Brittanique ~~fa~~ a fait quelques ~~remarques~~ observations sur ce sujet. ~~Bessel~~ Aussi, Bessel dans sa grande mémoire sur la pesanteur à Königsberg, fait remarquer que cette cause exerce la même influence sur [illegible]

esque abîmé par le transport. Ainsi je me suis
ivé forcé de faire usage de l'appareil, que le Génér
aeyer avait trouvé si défectueux, ~~bien que~~ ~~tout le~~ malgré
~~ivail était d'une~~ la perfection (du travail) qui fait honneur même
l'atelier célèbre des Messieurs Repsold. Voilà
moment, j'ai été amené à faire quelques tentatifs à
éstimer et corriger l'effet de cette flexion.

On peut concevoir un pied ~~de pendule~~ dont les parties sont disloqués, de ~~d'une~~
à ce ~~la~~ façon, que le pendule, ~~en~~ oscillant de l'un côté à
'autre, jette ~~une pièce du pendule~~ la tête du support ~~pied~~ d'une position
un autre, sans ~~trouvant~~, jusqu' ~~à un certain point~~ aux points d'arrêt,
'autre résistance que de l'inertie et de la friction. Un tel
u n'existe point dans les supports dont j'ai fait usage,
que j'ai verifié en observant avec un microscope fort
s'ils retournent toujours ~~au~~ à la position de repos après ~~la moindre~~
une flexion, ~~soit~~ si petite ~~ou soit~~ ou si grande que ce soit.

---

r des pendules, ~~montrent une~~ surtout de celui du Capitaine
eservi, montrent une appréciation juste de cette erreur.

1061 00002

Ainsi, ce qu'il ~~y a~~ arrive en effet, c'est une flexion oscillatoire d'un corps élastique

L'amplitude de cette oscillation est à peu près, en raison d'une ~~une~~ cinq mill

partie ~~de~~ à celui du couteau ~~d'en bas~~ inférieur du pendule; c'est pourquoi

nous pouvons négliger le carré de cette fraction.

La langue sur laquelle repose le couteau ~~du pendule~~

est courbé ~~un peu~~ sans doute par le mouvement du pendule; mai

je néglige cette effet en me bornant à considérer le

mouvement ~~de la partie du milieu de cette~~ de cette partie de la langue où

se trouve le milieu du couteau. ~~Cette pa~~ Quand on ap-

plique à cette partie une force horizontale, il fait un

mouvement de revolution ~~entre~~ autour d'une axe qui est derriè

et au dessus du pieds à une distance d'un mètre en-

viron. Mais on peut négliger la difference entre une telle

révolution par un arc de quelques secondes et une tran-

lation horizontale perpendiculaire au couteau. Il y a

une certaine ~~excessivement petite~~ variation minime dan

la pression verticale du pendule sur le support, mais c'e

evidemment loin d'~~être sens~~ d'avoir un effet sensible sur

le période d'oscillation.

Nommons

$x$, la distance d'une particule du couteau;

$m$, la masse de cette particule;

$\omega$, l'angle entre la verticale et la [illegible]

$h$, la distance entre le centre de masse et le couteau,

$l$, la longueur du ~~simple~~ pendule simple d'un période égal à celui du pendule actuel;

$g$, l'accélération de la pésanteur;

$c$, l'élasticité du pied;

~~$t$, $t$~~

$t_0$ le temps

$\varphi$, l'angle au temps $\underline{t}$ ~~de~~ entre la position du pendule et celle de repos;

$S$, l'écartement horizontal, au temps, $\underline{t}$, de la position du centre du couteau de celle de repos.

Alors la vitesse horizontale d'une particule sera

$$r\cos(\varphi+\omega)D_t\varphi + D_t s;$$

~~et~~ la vitesse verticale de la même particule sera

$$r\sin(\varphi+\omega)D_t\varphi;$$

et l'énergie actuelle de la particule sera

$$\tfrac{1}{2}mr^2(D_t\varphi)^2 + mr\cos(\varphi+\omega)D_t\varphi . D_t s + \tfrac{1}{2}m(D_t s)^2;$$

et l'énergie actuelle du pendule sera

$$\tfrac{1}{2}Mlh\,(D_t\varphi)^2 + Mh\cos\varphi(D_t\varphi)(D_t s) + \tfrac{1}{2}M\,(D_t s)^2.$$

Quant à l'énergie du mouvement du pied, nous ~~pa~~ la pourrons négliger, puisque elle se compose d'un petit moment d'inertie multiplié par le carré d'une vitesse très petite.

La différentielle de l'énergie potentielle est

$$-Mgh\sin\varphi . d\varphi - cs . ds$$

$$\left(l+\frac{Mgh}{cl}\right)\varphi + \left(1+\frac{Mg}{cl}\right)s = A_1 \cos\left(\sqrt{\frac{g}{l+\frac{Mgh}{cl}}}\cdot t + \eta_1\right)$$

$$\left(\frac{Mg}{c}-\frac{Mgl}{cl}\right)\varphi + \left(1-\frac{l}{h}+\frac{Mg}{ch}-\frac{Mg}{cl}\right)s = A_2 \cos\left(\sqrt{\frac{cl}{M(l-h)}}\cdot t + \eta_2\right)$$

~~La solution de ces équations est~~

~~Voici la solution de ces équations:~~ D'où on tire

$$\varphi = -\frac{l-h}{h}A_1 \cos\left(\sqrt{\frac{g}{l+\frac{Mgh}{cl}}}\cdot t + \eta_1\right) - A_2 \cos\left(\sqrt{\frac{cl}{M(l-h)}}\cdot t + \eta_2\right)$$

$$s = -\frac{Mg}{c}\,\frac{l-h}{l}A_1 \cos\left(\sqrt{\frac{g}{l+\frac{Mgh}{cl}}}\cdot t + \eta_1\right) + lA_2 \cos\left(\sqrt{\frac{cl}{M(l-h)}}\cdot t + \eta_2\right)$$

Maintenant, il s'agit de déterminer les constantes arbitraires. ~~Nous devons, donc,~~ On doit donc considérer qu'en mettant en mouvement le pendule ~~nous le tirons~~ on le pousse à l'un côté, en appliquant le doigt près du couteau inférieur, et alors ~~nous laissons~~ on le laisse aller. Ainsi quand $t$ est nul, $D_t\varphi$ et $D_t s$ sont aussi nuls; c'est pourquoi $\eta_1$ et $\eta_2$ sont nuls. ~~A l'instant~~ Au premier instant, la force horizontale sur le couteau est

$$\frac{Mgh}{l}\varphi_0 = cs_0$$

ce qui donne en substituant les valeurs de $\varphi$ et de $s$ ~~Ainsi, nous avons~~

$$\frac{Mgh}{l}(1+x_2)A_1 - \frac{Mgh}{l}(1+x_1)A_2 = -c(l+hx_2)A_1 + c(l+hx_1)A_2$$

on a donc ~~ou enfin~~

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{\frac{Mgh}{l}(1+x_2)+c(l+hx_2)}{\frac{Mgh}{l}(1+x_1)+c(l+hx_2)} = \frac{M^2g^2(l-h)}{c^2l^3}$$

~~Ainsi~~ Ainsi en écrivant $A = (l-h)A_1$, on a ~~nous avons~~,

$$\varphi = -\frac{A}{h}\cos\left(\sqrt{\frac{g}{l+\frac{Mgh}{\alpha l}}}\,t\right) - \frac{M^2g^2}{\alpha^2 l^3}A\cos\left(\sqrt{\frac{\alpha l}{M(l-h)}}.t\right)$$

$$\xi = -\frac{Mg}{\alpha l}A\cos\left(\sqrt{\frac{g}{l+\frac{Mgh}{\alpha l}}}.t\right) + \frac{M^2g^2}{\alpha^2 l^2}A\cos\left(\sqrt{\frac{\alpha l}{M(l-h)}}.t\right)$$

Le deuxième terme de $\varphi$, n'est pas le $\frac{1}{300,000}$ partie du premier,

ainsi on peut le négliger.

On mésure $\alpha$ ~~en appliquant au pieds~~ observant la déflection (S) du pieds produite par une force horizontale égale à l'unité de poids. ~~et en appl~~ ~~Ainsi nous~~ ce qui s'écrit

nous

$$\alpha = \frac{g}{S}$$

En ~~substituant~~ on concluant cette valeur, ~~nous obtenons~~ enfin

$$\varphi = \frac{A}{h}\cos\left(\sqrt{\frac{g}{l+MS\frac{h}{l}}}.t\right).$$

En regardant attentivement ces équations, nous ~~apercevons~~ apercevons que les oscillations du pieds ont deux constituents. L'un d'eux a le période qui appartient à un pendule d'une longueur plus grande que celle ~~du pendule actuel par~~ $MS\frac{h}{l}$; tandis que l

Ainsi, ~~le~~ l'effet sur le pendule c'est de lui donner une longueur virtuelle plus grande que la longueur actuelle par $MS\frac{h}{l}$.

Il y a ~~toujours~~
Il doit être un troisième terme qui dépend sur la friction
internelle des parties du pieds. Mais je crois que l'on peut ~~nous pouvons~~
négliger cette terme dont l'effet doit être inconsidérable
et dont le coëfficient est inconnu.

~~Des~~ Les expressions ~~de~~ pour l'energie actuelle et potentielle
on dérive ~~nous dériverons~~ les équations differentielles,

$$l.D_t^2\varphi + \cancel{D_t^2 s}\cos\varphi.D_t^2 s + \sin\varphi.D_t\varphi.D_t s = -\cancel{M}g\cancel{M}\sin\varphi$$

$$h\cos\varphi D_t^2\varphi + D_t^2 s = -\frac{c}{M}s$$

~~But the amplitude of $s$ is so small that when multiplied by the square of the amplitude of $\varphi$, the product is insensible compared with $h$ term in~~

Mais l'amplitude de $s$ ~~est si petit~~, que quand il est multiplié par ~~le carré de~~ celui de $\varphi$, ~~le produit est négligible~~ est un nombre trop petit à considérer,
et divisé by $h$, ~~le resultat est insensible~~. Aussi, l'effet
d'une variation de l'amplitude de $\varphi$ doit être insensible
sur la correction pour la flexion. C'est pourquoi nous on
peut ~~pouvons~~ écrire,

$$l.D_t^2\varphi + D_t^2 s = -\cancel{M}g\varphi,$$

$$h.D_t^2\varphi + D_t^2 s = -\frac{c}{M}s.$$

Pour résoudre ces equations, on multiplie ~~multiplions~~ la seconde par
$x$ et l'on ajoute ~~ajoutons~~ à la première. ~~Nous obtenons~~ On obtient,

Et ~~Maintenant~~, ~~si nous supposons que~~ en supposant

$$\frac{\alpha x(l+hx)}{Mg} = 1+x,$$

~~cette équation se réduit à la forme~~

$$\cancel{D_t^2\{(l+hx)\varphi}$$

et si nous nommons

$$\chi = (l+hx)\varphi + (1+x)s,$$

l'équation se réduit à la forme

$$D_t^2\chi = -\frac{g}{l+hx}\chi\ ;$$

dont l'intégrale est

$$\chi = A\cos\left(\sqrt{\frac{g}{l+hx}}\cdot t\right) = (l+hx)\varphi+(1+x)s$$

L'équation pour déterminer $x$ donne

$$x = -\frac{1}{2}\frac{\alpha l - gM}{\alpha h} \pm \frac{1}{2}\frac{l}{h}\sqrt{4\frac{Mgh}{\alpha l^2}+\left(1-\frac{Mg}{\alpha l}\right)^2}$$

ou à peu près

$$x = -\frac{1}{2}\frac{l}{h} + \frac{1}{2}\frac{Mg}{\alpha h} \pm \left(\frac{1}{2}\frac{l}{h} - \frac{1}{2}\frac{Mg}{\alpha h} + \frac{Mg}{\alpha l}\right);$$

ainsi les deux valeurs de $x$ sont,

$$x_1 = \frac{Mg}{\alpha l},$$

$$x_2 = -\frac{l}{h} + \frac{Mg}{\alpha h} - \frac{Mg}{\alpha l}$$

En substituant ces deux valeurs dans l'équation intégra et l'énergie actuelle du pendule sera,

$$\tfrac{1}{2}\mathfrak{M}\, l h\, (D_t\varphi)^2 + \mathfrak{M} h \cos\varphi\, (D_t\varphi)(D_t s) + \tfrac{1}{2}\mathfrak{M}\,(D_t s)^2 .$$

Quant à l'énergie du mouvement du pied, ~~nous~~ on la peut négliger, puisque elle se compose d'un ~~petit~~ moment d'inertie petit multiplié par le carré d'une vitesse très petite. La différentielle de l'énergie potentielle est

$$-\mathfrak{M} g h \sin\varphi . d\varphi - a s . ds$$

Il y a toujours un troisième terme qui dépend sur la friction entre les molécules du pieds. Mais je crois que l'on peut négliger cette terme dont l'effet doit être inconsidérable et dont le coëfficient est en tout cas inconnu.

Des expressions pour l'énergie actuelle et potentielle, on dérive les équations différentielles

$$l D_t^2\varphi + \cos\varphi . D_t^2 s + \sin\varphi . D_t\varphi . D_t s = -g \sin\varphi$$

$$h \cos\varphi\, D_t^2\varphi + D_t^2 s = -\frac{a}{\mathfrak{M}} s$$

Mais l'amplitude de $s$ multiplié par celui du $\varphi$ et divisé ~~par~~ $\frac{1}{h}$ est un nombre trop petit à considérer. Aussi, l'effet ~~l'effet~~ d'une variation de l'amplitude de $\varphi$ doit êt on peut écrire

$$l D_t^2 \varphi + D_t^2 s = -g\varphi$$

$$h D_t^2 \varphi + D_t^2 s = -\frac{e}{M} s$$

Pour résoudre ces équations, on multiplie la seconde par $x$ et l'on ajoute à la première. On obtient

$$D_t^2 \{(l+hx)\varphi + (1+x)s\} = -\frac{g}{l+hx}\left\{(l+hx)\varphi + \frac{ex(l+hx)}{mg} s\right\};$$

et, en ~~exposant~~ posant,

$$\frac{ex(l+hx)}{Mg} = 1+x$$

l'équation se réduit à la forme

$$D_t^2 \chi = -\frac{g}{l+hx}\chi;$$

dont l'intégrale est

$$(l+hx)\varphi + (1+x)s = \chi = A\cos\left(\sqrt{\frac{g}{l+hx}}\cdot t + \eta\right).$$

L'équation pour déterminer $x$ donne

$$x = -\frac{1}{2}\frac{el - Mg}{eh} \pm \frac{1}{2}\frac{l}{h}\sqrt{4\frac{Mgh}{el^2} + \left(1 - \frac{Mg}{el}\right)^2}$$

ou, à peu près,

$$x = \frac{1}{2}\frac{l}{h} + \frac{1}{2}\frac{Mg}{eh} \pm \left(\frac{1}{2}\frac{l}{h} - \frac{1}{2}\frac{Mg}{eh} + \frac{Mg}{el}\right);$$

ainsi les deux valeurs de $x$ sont

Ce qui arrive, en effet, c'est une flexion oscillatoire d'un corps élastique. L'amplitude de cette oscillation est à peu près en raison d'une cinq millième à celui du couteau inférieur du pendule; c'est pourquoi nous pouvons négliger le carré de cette fraction.

La langue sur laquelle repose le couteau est courbée sans doute par le mouvement du pendule; mais je néglige cette effect, en me bornant à considérer le mouvement de cette partie de la langue où se trouve le milieu du couteau. Quand on applique à cette partie une force horizontale, ~~il~~ elle fait un mouvement de révolution autour d'une axe qui est en arrière et au dessus du pieds à une distance d'un mètre environ. Mais on peut négliger la différence entre une telle révolution par un arc de quelques secondes et une translation horizontale perpendiculaire au couteau. Il y a une certaine variation minime dans la pression verticale du pendule sur le support, mais c'est évidement loin d'avoir un effect sensible sur la durée d'une oscillation.

Nommons,

$r$, la distance d'une particule du couteau;

$m$, la masse de cette particule;

$\omega$, l'angle entre la verticale et la perpendiculaire de la particule au couteau;

$M$, la masse du pendule;

$h$, la distance entre le centre de masse et le couteau;

$l$, la longueur du pendule simple ~~dont~~ ayant un période égal à celui du pendule actuel;

$g$, l'accélération de la pésanteur;

$e$, l'élasticité du pied;

$t$, le temps;

$\varphi$, l'angle, au temps, $t$, entre la position du pendule et celle de repos;

$s$, l'écartement horizontale, au temps $t$, de la position du centre du couteau de celle de repos;

Alors, la vitesse horizontale d'une particule sera

$$r \cos(\varphi+\omega) D_t\varphi + D_t s\,;$$

la vitesse verticale de la même particule sera

$$r \sin(\varphi+\omega) D_t\varphi\,;$$

l'énergie actuelle de la particule sera

$$\tfrac{1}{2} m r^2 (D_t\varphi)^2 + m r \cos(\varphi+\omega) D_t\varphi D_t s + \tfrac{1}{2} m (D_t s)^2\,;$$

$$\tfrac{1}{2} m r^2 (D_t\varphi)^2 + m r \cos(\varphi+\omega)(D_t\varphi)(D_t s) + \tfrac{1}{2} m (D_t s)^2;$$

et l'énergie actuelle du pendule sera

$$\tfrac{1}{2} M l h\, (D_t\varphi)^2 + M h \cos\varphi\, (D_t\varphi)(D_t s) + \tfrac{1}{2} M (D_t s)^2.$$

Quant à l'énergie du mouvement du pied, on la peut négliger, puisque elle se compose d'un moment d'inertie petit multiplié par le carré d'une vitesse très petite. La différentielle de l'énergie potentielle est

$$-M g h \sin\varphi .\, d\varphi - e\, s .\, ds.$$

Il y a, c'est vrai, un troisième terme qui dépend ~~du~~ de la friction entre les molécules du pied. Mais je crois que l'on peut négliger ce terme, dont l'effet doit être inconsidérable et dont le coëfficient est, en tout cas, inconnu.

On dérive, des expressions pour l'énergie actuelle et potentielle, les équations différentielles

$$l D_t^2\varphi + \cos\varphi . D_t^2 s + \sin\varphi . D_t\varphi . D_t s = -g \sin\varphi$$

$$h \cos\varphi . D_t^2\varphi + D_t^2 s = -\frac{e}{M} s.$$

Mais l'amplitude de $s$ multipliée par celle de $\varphi$, et divisée par $h$, ~~est~~ donne un nombre trop petit à considérer. ~~Aussi~~ De plus, l'effet d'une variation de l'amplitude de $\varphi$

doit être insensible sur la correction pour la flexion

C'est pourquoi l'on peut écrire

$$\underline{l}\, D_t^2\varphi + D_t^2\underline{s} = -g\varphi$$
$$\underline{h}\, D_t^2\varphi + D_t^2\underline{s} = -\frac{a}{M}\underline{s}\,.$$

Pour résoudre ces équations, on multiplie la seconde par $\underline{x}$, et l'on l'ajoute à la première. On obtient

$$D_t^2\left\{(\underline{l}+\underline{h}\underline{x})\varphi + (1+\underline{x})\underline{s}\right\} = -\frac{g}{\underline{l}+\underline{h}\underline{x}}\left\{(\underline{l}+\underline{h}\underline{x})\varphi + \frac{a\underline{x}(\underline{l}+\underline{h}\underline{x}}{Mg}\right.$$

et, en posant,

$$\frac{a\underline{x}(\underline{l}+\underline{h}\underline{x})}{Mg} = 1+\underline{x}$$

l'équation se réduit à la forme

$$D_t^2\chi = -\frac{g}{\underline{l}+\underline{h}\underline{x}}\chi\;;$$

dont l'intégrale est

$$(\underline{l}+\underline{h}\underline{x})\varphi + (1+\underline{x})\underline{s} = \chi = A\cos\left(\sqrt{\frac{g}{\underline{l}+\underline{x}\underline{h}}}\cdot \underline{t} + \eta\right).$$

L'équation pour déterminer $\underline{x}$ donne

$$\underline{x} = -\frac{1}{2}\,\frac{a\underline{l}-Mg}{a\underline{h}} \pm \frac{1}{2}\,\frac{\underline{l}}{\underline{h}}\sqrt{4\frac{Mg\underline{h}}{a\underline{l}^2} + \left(1-\frac{Mg}{a\underline{l}}\right)^2}$$

ou, à peu près,

$$\underline{x} = -\frac{1}{2}\,\frac{\underline{l}}{\underline{h}} + \frac{1}{2}\,\frac{Mg}{a\underline{h}} \pm \left(\frac{1}{2}\,\frac{\underline{l}}{\underline{h}} - \frac{1}{2}\,\frac{Mg}{a\underline{h}} + \frac{Mg}{a\underline{l}}\right);$$

ainsi les deux valeurs de $\underline{x}$ sont instant, la force horizontale sur le couteau est

$$\frac{Mgh}{l}\varphi_0 = c\,s_0$$

ce qui donne, en substituant les valeurs de $\varphi$ et de $s$.

$$\frac{Mgh}{l}(1+x_2)A_1 - \frac{Mgh}{l}(1+x_1)A_2 = -c(l+hx_2)A_1 + c(l+hx_1)$$

On a, donc,

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{\frac{Mgh}{l}(1+x_1)+c(l+hx_2)}{\frac{Mgh}{l}(1+x_1)+c(l+hx_1)} = \frac{M^2g^2(l-h)}{c^2\,l^3}.$$

ainsi, en écrivant $A_1 = (l-h)A$, on aura

$$\varphi = -\frac{A}{h}\cos\left(\sqrt{\frac{g}{l+\frac{Mgh}{cl}}}\cdot t\right) - \frac{M^2g^2}{c^2\,l^3}A\cos\left(\sqrt{\frac{cl}{M(l-h)}}\cdot t\right)$$

$$s = -\frac{Mg}{cl}A\cos\left(\sqrt{\frac{g}{l+\frac{Mgh}{cl}}}\cdot t\right) + \frac{M^2g^2}{c^2\,l^2}A\cos\left(\sqrt{\frac{cl}{M(l-h)}}\cdot t\right).$$

Le deuxième terme de $\varphi$ n'est que la $\frac{1}{300,000}$ du premier

ainsi on peut le négliger.

On mesure $c$ en observant la déflection, $S$, du pied ~~provenant d'~~ produite par une force horizontale égale à l'unité de poids; ce qui s'écrit

$$c = \frac{g}{S}.$$

En substituant cette valeur, on conclut, enfin

$$x_1 = \frac{Mg}{al}$$

$$x_2 = -\frac{l}{h} + \frac{Mg}{ah} - \frac{Mg}{al}$$

En substituant ces deux valeurs dans l'équation in-tégrale, on aura deux équations entre $\varphi$ et $s$. Les voici

$$\cancel{\varphi = -\frac{l-h}{h} A_1 \cos(}$$

$$\left(l + \frac{Mgh}{al}\right)\varphi + \left(1 + \frac{Mg}{al}\right)s = A_1 \cos\left(\sqrt{\frac{g}{l + \frac{Mgh}{al}}}\cdot t + \eta_1\right)$$

$$\left(\frac{Mg}{a} - \frac{Mgh}{al}\right)\varphi + \left(1 - \frac{l}{h} + \frac{Mg}{ah} - \frac{Mg}{al}\right)s = A_2 \cos\left(\sqrt{\frac{al}{M(l-h)}}\cdot t + \eta_2\right)$$

d'où l'on tire

$$\varphi = -\frac{l-h}{h} A_1 \cos\left(\sqrt{\frac{g}{l + \frac{Mgh}{al}}}\cdot t + \eta_1\right) - A_2 \cos\left(\sqrt{\frac{al}{M(l-h)}}\cdot t + \eta_2\right)$$

$$s = -\frac{Mg}{a}\,\frac{l-h}{l} A_1 \cos\left(\sqrt{\frac{g}{l + \frac{Mgh}{al}}}\cdot t + \eta_1\right) + l A_2 \cos\left(\sqrt{\frac{al}{M(l-h)}}\, t +\right.$$

~~Maintenant~~ Or, il s'agit de déterminer les constantes arbitrai
On doit considérer, donc, qu'en mettant en mouvement l
pendule, on le pousse à ~~[illegible]~~ côté, en appliquant l
doigt auprès du couteau inférieur, et alors on le laiss
aller. Ainsi, ~~quand~~ lorsque $t$ est nul, $D_t\varphi$ et $D_t s$ sont aussi

C'était attachée 70 mm en avance de l'axe du pendule, ce qui donne une correction à S de +.001 mm. Si $\Phi$ est l'arc d'oscillation du pendule, l'amplitude d'oscillation de l'échelle doit être

$$\cancel{M \frac{L}{l}}$$

$$2\,M\,(S + .0019)\,\frac{L}{l}\,\Phi$$

et $M = 6.59$. C'est ~~par~~ ce formule dont je me suis servi en calculant les quantités en bas.

Hoboken, 20 Mars, 1877

Bout pesant du pendule en bas.

| Arc du Pendule | Amplitude d'oscillation de l'échelle Observé | Calculé |
|---|---|---|
| 2° 20′ | 2.2 | 2.1 |
| 2 18 | 2.1 | 2.1 |
| 2 12 | 2.0 | 2.0 |
| 2 10 | 1.9 | 2.0 |
| 2 8 | 1.9 | 1.9 |
| 2 7 | 1.95 | 1.9 |
| 1 30 | 1.5 | 1.4 |
| 35 | 0.8 | 0.5 |

apporté de l'Amérique était presque abîmé dans le transport. Ainsi, je me ~~suis~~ trouvé forcé de faire usage de l'appareil que la grande autorité ~~grande~~ du ~~le~~ Général Baeyer avait prononcé ~~trouvé~~ ~~sic~~ défectueux, malgré la perfection du travail qui fait honneur même à l'atelier célèbre d'où il vient. Voilà comment j'ai été amené à faire quelques essais à mésurer et à tenir compte de ~~corriger~~ ~~le~~ l'effect de ce défaut.

On peut s'imaginer ~~se figurer~~ ~~concevoir~~ un support ~~dont les parties sont~~ si disloquée~~s~~, que le pendule, en oscillant de l'un côté à l'autre, jette la pièce sur laquelle ~~le plan de suspen~~ il repose ~~sion~~ d'une position dans une autre, sans rencontrant, jusqu'au points d'arrêt, d'autre résistance que de l'inertie et de la friction. Un tel jeu n'existe point dans les supports que je connais, ce que j'ai vérifié en les observant avec un microscope

---

l'Encyclopédie Britannique y a fait allusion. Bessel, dans son grand mémoire sur la pésanteur à Königsberg fait remarquer que cette cause exerce la même influence ~~sur~~ sur pendule long que sur le court; et c'est pourquoi l'effet s'élimine. La construction de plusieurs supports ~~montre~~ pour les pendules, surtout celui du Capitaine Basevi, montre une appréciation juste de cette

Lorsque ~~j'étais chargé~~ j'ai reçu charge des études du Coast Survey sur la pésanteur, j'ai commandé au MM. Repsold un pendule à réversion, qui ~~doit~~ devrait être une copie de celui de l'Institut géodésique de la Prusse. Mais les méchaniciens étaient, ~~dans ce temps-là~~, si occupés pour lors des instruments pour le passage de Vénus, que le pendule n'était fini qu'au printemps de 1875. Alors, je me suis rendu à Hambourg pour le recevoir, et de Hambourg j'allais à Berlin, où j'ai trouvé Son Exc. M. le Général Baeyer pas tout-à-fait content des résultats obtenus avec son instrument semblable. Il s'est plaint surtout de la flexibilité du pied, une source d'erreur, du reste, qui n'a assurément jamais échappé à l'attention des observateurs du pendule.* L'appareil de pendule que j'av

* Le docteur [illegible] dans un article [illegible]

la durée d'une oscillation.

Nommons,

$m$, la masse d'une particule;

$r$, sa distance de la tranche du couteau;

$\omega$, l'angle entre la verticale dans la position d
repos et la perpendiculaire tirée de la particule au
couteau;

$M$, la masse du pendule;

$h$, la distance entre le centre de masse et la
tranche du couteau;

$l$, la ~~distance~~ longueur de pendule simple ay
le même période que le pendule actuel;

$g$, l'accélération de la pésanteur;

$e$, l'élasticité du pied;

$t$, le temps

$\varphi$, l'angle, au temps $t$, entre la position du
pendule et celle de repos;

$s$, l'écartement horizontale, au temps $t$, du cen
du couteau, de celle de repos.

Alors, la vitesse horizontale d'une particule sera

$$r \cos(\varphi+\omega) D_t\varphi + D_t s \;;$$

la vitesse verticale de la même particule sera

$$r \sin(\varphi+\omega) D_t\varphi \;;$$

et en reconnaissant
fort, qu'ils retournent toujours à la position de repos après toute flexion, si petite ou si grande que ce soit.

Ce qui arrive, en effet, c'est une flexion oscillatoire d'un corps élastique. L'amplitude de cette oscillation est à peu près en raison d'une cinq[…] millième ~~partie~~ à ~~celle~~ du couteau inférieur du pendule; c'est pourquoi on peut négliger le carré de cette fraction.

La langue sur laquelle repose le couteau est cou[r]bée, sans doute, par le mouvement du pendule; mais je néglige cet effet, en me bornant à considérer le mouvement de la partie au dessous du milieu du couteau. Quand on y applique une force horizontale perpendiculaire au couteau, ~~elle~~ cette p[…] fait un mouvement de révolution autour d'un axe ~~fixe~~ qui est en arrière et au dessus du p[…] à une distance d'un mètre environ. Mais on peut négliger la différence entre une telle révolut[ion] par quelques secondes d'arc et une translation. Il y a une certaine variation minime dans la pression […] du pendule sur le support, mais c'e[…]

fort qu'ils retournent toujours à la position de
repos après toute flexion, si petite ou si grande
que ce soit.

Ce qui arrive, en effet, c'est une flexion os-
cillatoire d'un corps élastique. L'amplitude de
cette oscillation est à peu près en raison
d'une cinq millième à celui du couteau in-
férieur du pendule; c'est pourquoi nous pouvons
négliger le carré de cette fraction.

La langue sur laquelle repose le couteau est
courbée sans doute par le mouvement du pen-
dule; mais je néglige cet effet, en me bornant
à considérer le mouvement ~~de~~ ~~cette~~ de la partie de
la langue ~~où se trouve~~ au-dessous le milieu du couteau.
Quand on y applique une force

Ainsi, l'effet sur le pendule, c'est de lui donner une longueur virtuelle plus grande que la longueur actuelle par $MS\frac{h}{l}$.

Indiquons la durée d'une oscillation par $T$, et les corrections provenant de la flexion par $\Delta$; alors, nous avons

$$T^2 = \frac{\pi^2 l}{g}$$

et

$$\Delta T^2 = \frac{\pi^2}{g} MS \frac{h}{l}.$$

~~Maintenant~~ Or, en distinguants par des chiffres subjacents les deux positions du pendule à réversion, la formule pour la réduction des résultats obtenus d'un tel pendule est

$$\frac{\pi^2}{g} l = \frac{T_1^2 h_1 - T_2^2 h_2}{h_1 - h_2},$$

d'où

$$\Delta\left(\frac{\pi^2}{g} l\right) = \frac{\pi^2}{g} MS \frac{h_1^2 - h_2^2}{l(h_1 - h_2)} = \frac{\pi^2}{g} MS,$$

ou bien

$$\Delta l = MS$$

) pour la longueur du pend

$$\Delta\lambda = MS\frac{\lambda}{\ell}.$$

Pour déterminer la quantité de la flexion, j'attache ~~à la par~~ dans la rainure de la langue au dessous du milieu du couteau, ~~et~~ une corde qui s'étend horizontalement ~~dans un sens~~ et perpendiculairement au couteau, qui passe sur la roue d'une machine Atwood (convenablement disposée dans ce but) et de l'extrémité de laquelle dépend un Kilogramme. Sur le bout de la langue, ou même sur un bras y arrêté, je colle une échelle micrométrique en ver placée dans un sens propre pour laisser mésurer la flexion à l'aide ~~par~~ d'un micromètre qui la regarde. Ceci se repose sur un support particulier et indépendan dont le montant se compose d'un tuyau à gaz d'un diamètre de 10 centimètres à peu près.

Voici, maintenant, les expériences que j'ai fait po déterminer la position de l'axe fixe autour de laque tourne le couteau.

de ceux que j'ai obtenus ~~avec~~ à l'aide des appareils

~~supérieurs~~. Voici les chiffres :

Le 18 Janvier, 1876, chez MM. Brunner (Temp. 1°C) $S = 0\overset{mm}{.}036$

Le 7 Mars, 1876, à l'Observatoire (Temp. 9°C.) $S = 0.037$

A Berlin, j'ai fait usage d'une roue très-délicate qui tourne sur des grandes roulettes pour diminuer la friction. Il appartient au cabinet de physique de l'Institut Technologique de Berlin, et a été placé à ma disposition par la bonté de M. le Professeur Paalz[ow]. Les lectures micrometriques étaient faites alternativement sans le poids et avec le poids, une seule lecture étant prise chaque fois, parceque le support du micromètre étant en bois, subissait ~~était~~ tout le temps ~~dans~~ un mouvement spontané. Au même gré ~~Pour la même raison~~, j'ai toujours fait onze lectures dans la disposition du poids avec laquelle j'ai commencé une série, en ne faisant que dix dans l'autre disposition, de sorte que le temps moyen fusse le même dans les deux dispositions. La valeur de la révolution de la vis micrometrique était mesurée séparément. Voici les résultats des différentes séries de mesures.

| | | |
|---|---|---|
| 24 Mai 1876 | A.M. | $S = 0\overset{mm}{.}0340$ |
| Temp 13°C | P.M | 339 |
| | | 340 |
| | | 341 |
| 25 Mai Temp 13°C | | 337 |
| | | 336 |

S = 0.0339

A Hoboken (New York) j'ai obtenu par la bienveillance
de M. le Professeur Morton une roue excellente qui
a été faite dans l'atelier du Stevens Institute of
Technology. J'ai toujours fait une lecture sur chaqu'une
de deux lignes de l'échelle avant changer la disposition
du poids. Chaque série se compose de cinq lectures sur
chaque ligne en chaque disposition du poids. Voici les
résultats des séries séparées.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 7 Mars, 1877. | Temp 15° C. | $S = 0^{mm}.0342$ | |
| 10 Mars | " 12° C. | 332 | |
| | | 337 | |
| | | 343 | |
| | | 342 | |
| | | 339 | |
| | | 334 | |
| | | 342 | Obs. de double poi |
| | | 342 | " " " " |

En moyen $S = 0.0340$

Voilà la valeur que je trouve la meilleure.

Il suit de la détermination de la position de l'axe
de rotation ci dessus décrite, que le bout antérieur
de la langue est éloigné de cette axe par $\sqrt{1.355 \times}$
$= 1^{m}.20$. En puis que le mouvement de ce bout avec le
poids d'un kilogramme est $S + 0^{m}.0008 = 0^{mm}.0348$, il sui
que la torsion du support sous cette force est $\frac{0^{mm}.0348}{1.20} =$
... rien de suspect

$$x_1 = \frac{Mg}{al}$$

$$x_2 = -\frac{l}{h} + \frac{Mg}{ah} - \frac{Mg}{al}$$

En substituant ces deux valeurs dans l'équation inté-grale on aura deux équations entre $\varphi$ et $s$. Les voici.

Il n'y a rien de surprenant en ce que l'axe in-
stantané est au-dessus du plan de suspension. Sup-
posons, en effet, que la flexion demeurait exclusivement ~~était entièrement~~
dans les trois pieds du support. En ce cas-là, le
mouvement du bout supérieur de chaque pied
serait perpendiculaire au sens général du pied,
et, en même temps, perpendiculaire au rayon du
cercle de révolution, de façon à ce que le pied se
dirigît ~~dirigerait~~ directement vers l'axe fixe. L'axe est
sans doute en arrière du support à cause de la flexion
de la langue même.

J'ai fait, à Genève, à Paris, à Berlin, et à New York
des expériences pour déterminer la valeur numérique
de S. L'expérience de Genève, faite le 13 Septembre
1875, n'était qu'un tentatif. Mais, j'avais une bonne
roue ~~et j'ai obtenu~~ que j'ai trouvée dans l'atelier de
la Société Genèvoise pour la Construction des Instru-
ments de Physique, et j'ai obtenu comme valeur
approximative

$$S = 0^{mm}.034.$$



La ~~roue~~ poulie dont je me suis servi à Paris, avait une
[illegible] considérable, à laquelle il faut attribuer

que j'avais apporté de l'Amérique, était presque abîmé dans le transport. Ainsi, je me suis trouvé forcé de faire usage de l'appareil que le Général Baey[er] avait trouvé si défectueux, malgré la perfection du travail qui fait honneur même à l'atelier célè[bre] dont il ~~sort~~ vient. Voilà comment j'ai été amené à faire quelques essais à mésurer et corriger l'eff[et] de ce défaut.

On peut concevoir un support dont les parties sont si disloquées que le pendule, en oscillant de l'un côté à l'autre, jette le plan de suspension d'u[ne] position dans une autre, sans rencontrant, jusqu'au[x] points d'arrêt, d'autre résistance que de l'inertie et de la friction. Un tel jeu n'existe point dans les supports dont j'ai fait usage, ce que j'ai vérifié en observant avec un microscope fort qu'ils retournen[t] toujours à la position de repos après toute flexion, si petite ou si grande que ce soit.

le court, et c'est pourquoi l'effet s'élimine. La construction d[e] plusieurs supports pour les pendules, surtout celui du Capi[-]taine Basevi, ~~montrent~~ montre une appréciation juste de cette

Lorsque j'étais chargé des études du Coast Survey sur la
pésanteur, j'ai commandé de MM. Repsold un pendule
à reversion, qui doit être une copie de celui de l'Insti-
tut géodésique de la Prusse. Mais les méchaniciens
étaient dans ce temps-là si occupés des instruments
pour le passage de Vénus, que le pendule n'était fini
qu'au printemps de 1875. Alors, je me ~~suis~~ suis rendu à
Hambourg pour le recevoir, et de Hambourg ~~j'ai~~ j'allais
~~allé~~ à Berlin, où j'ai trouvé Son Exc. M. le Général
Baeyer pas tout-à-fait content des résultats obtenus
avec son instrument semblable. Il s'est plaint sur-
tout de la flexibilité du pied, une source d'erreur
qui n'a assurément jamais échappé à l'attention
des observateurs du pendule.* L'appareil de pend

1061

---

* Le docteur Young dans ~~sont~~ son article sur les marées dans
l'Encyclopédie Britannique a fait quelques remarques sur
ce sujet. Aussi, Bessel dans sa grande mémoire sur la
pésanteur à Königsberg fait remarquer que cette

$0.0369$
$359$
$356$
$359$
$358$

Moyen $0.0360$

Pour le double de l'eff~~pet~~ de friction

ce qui fait $0\overset{mm}{.}0371$. ~~Il faut faire une correction~~

j'ai trouvé

$0\overset{mm}{.}0075$
$62$
$72$
$71$
$65$

Moyen $0.0070$

En ajoutant la moitié ~~de~~ de ceci, et en soustraisant $.0008$ pour la position de ~~l~~ l'échelle, on a

$$S = 0\overset{mm}{.}0398.$$

La température était 9°C.

J'ai cru que je doit rapporter ces résultats obtenus à Paris, bien qu'ils sont si mauvais. Si on fait omission de la correction pour la friction, qui est douteuse, on a

$S = 0\overset{mm}{.}0363$
$s = 0.0371$
Moyen $0.0367$

qui reste toujours beaucoup ~~plus~~ trop grande. Mais je ne crois pas que ces résultats obtenu à l'aide d'un appareil très défectueux doivent mettre en doute ~~les~~ valeur concordants qui résulte de l'expériences de Berlin et de New York.

J'ai toujours fait une lecture sur chaque de deux lignes avant changer ~~la~~ disposition des poids. Chaque séries se compose de cinq lectures ~~[illegible]~~ sur chaque ligne en chaque disposition du poids. Voici les resultats des séries separées.

~~[illegible]~~

| | | |
|---|---|---|
| 7 Mars 1877. Temp 15°C | S = 0.0342 mm | |
| 10 Mars Temp 12° | 332 | |
| | 337 | |
| | 343 | |
| | 342 | |
| | 339 | |
| | 334 | |
| | 342 | double poids |
| | 342 | " " |
| Moyen | S = 0.0340 | |

Voilà la valeur que je trouve la plus exacte.

Les expériences de Paris sont bien inférieures. D'abord, la poulie dont je me suis servi montrait une fraction considérable. Alors, la méthode de faire les observations n'était pas si bon qu'à Berlin et à Neufchâtel. ~~En effet,~~ j'ai ~~fait~~ toujours trois ~~[illegible]~~ lectures chaque sur trois lignes avant changer ~~le poids~~. Les premières expériences était faites le 18 Janv à l'atelier de MM. Brunner. J'ai fait toujours cinq lectures chaque sur deux lignes avant changer le poids. Voici les ~~moyens~~ lectures moyennes.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Avec poids | 0.598 mm | 2.512 | | |
| Sans " | | | 0.976 | 2.885 |
| Avec " | 0.607 | 2.512 | | |
| Sans " | | | 0.982 | 2.890 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1876 May 24 | $S = \overset{mm}{0.0358}$ | Temp $= 13^\circ$ C | |
| | 0.0357 | | |
| | 0.0358 | | |
| | 0.0359 | | |
| May 25 | 0.0355 | Temp $= 13^\circ$ C. | |
| | 0.0354 | | |
| Mean | $S = 0.0357$ | | |

At Hoboken, my observations although more accurate present greater discrepancies. I found as follows.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1877 March 7 | $S = [\overset{mm}{0.0352}]$ | Temp $= 59^\circ.15$ F | Möller's Scale |
| | 0.0350 | 59.24 ? | |
| March 8 | [0.0338] | 60.14 | Möller's Scale |
| Obs'ns by E. P. | 0.0345 | 60.41 | |
| | 0.0339 | 60.37 | |
| | 0.0337 | 60.52 | |
| | 0.0342 | 60.27 | |
| | 0.0340 | 60.23 | |
| | 0.0340 | 60.18 | |
| | 0.0337 | 60.04 | |
| March 10 | [0.0340 | 12.0 C | |
| | 0.0345 | 12.2 | Disturbance outside |
| | 0.0351 | 12.2 | |
| .03475 | 0.0350 | 12.6 | |
| | 0.0347 | 13.0 | |
| | 0.0347 | 13.0 | |
| | 0.0350 | 13.1 | Double wt |
| | 0.0350 | 13.1 | " " |
| March 12 | 0.0349 | 14.1 | |
| Obs E. P. | 0.0337 | 14.2 | All very poor |
| | 0.0342 | | |

M J. Pourtalai
14 E 238.

~~Cette valeur en millimètres est $\overset{mm}{0.0394}$~~

Cette valeur doit être corrigée pour la friction de la corde sur la poulie. J'ai ~~me~~ mesuré cette effet en tirant la corde d'abord en un sens et alors en l'autre avec le poids suspendu. J'ai trouvé par ce moyen avec une seule lecture ~~chaque fois et~~ une seule changement chaque fois les valeurs que voici

$\overset{mm}{0.0030}$
25
10
16
36
29
24
21
19
25

Moyen 0.0024

Cela est la différence des lectures. La correction, donc, n'est que la moitié.

Ainsi ~~on~~ la valeur 0.376 révolutions ou $\overset{mm}{0.0394}$ il faut ajouter $\overset{mm}{0.0012}$, ~~ce qui~~ ce qui donne $\overset{mm}{0.0406}$. Mais l'échelle était 5 ~~centimètres~~ centimètres au-dessous du plan de suspension; ce qui produit une correction de $-0.0015$. Aussi, il était 31 millimètres en avance du centre du couteau, à cause duquel il faut appliquer $-0.0008$; ce qui reduit la valeur obtenue à

$$S = \overset{mm}{0.0383}$$

Le thermomètre a marqué 1°C.

J'ai fait une autre série d'expériences, le 2 Mars, à l'Observatoire de Paris. Je me suis servi de la même ... kilogramme; mais j'ai fait toujours trois à Genève, à Paris, à Berlin, et à New York

J'ai fait des ~~observations~~ expériences pour déterminer la quantité de flexion. L'expérience de Genève, faite le 13 Septembre 187[illegible] n'était qu'un tentatif. Elle a donné ~~la valeur~~ .

$$S = 0^{mm}.034$$

~~Les expériences~~ A Berlin, j'ai fait usage d'une roue très délicate supportée ~~sur~~ sur des grandes roulettes pour diminuer la friction. C'est M. le Professeur Paalzow qui ~~a eu~~ la complaisance ~~Voici la manière de faire~~ de me prêter cette roue qui appartient au cabinet de physique de l'Institut [illegible] à Berlin.

A Berlin, les lectures du micromètre ont été faites alternativement sans le poids et avec le poids. Une seule lecture a été prise chaque fois, parce que le support du micromètre était en bois et il ~~avait~~ était tout le temps dans un mouvement spontané. Pour la même raison, j'ai toujours fait onze lectures dans ce disposition du poids avec laquelle j'ai commencé en ne faisant que dix dans l'autre disposition, de façon à ce que le temps moyen était le même dans les deux dispositions. ~~Voici les~~ La valeur de la révolution de la vis micrométrique était mesuré séparément. ~~Voici les résultats obtenus~~

| | | |
|---|---|---|
| 24 Mai. 1876. A.M. | $S =$ | $0^{mm}.0340$ |
| Temp. 13°C. P.M. | | 339 |
| | | 340 |
| | | 341 |
| 25 Mai. | $S =$ | 0.0337 |
| | | 336 |
| Moyen | $S =$ | 0.0339 |

1061

(00[illegible]

A Hoboken (New York), j'ai obtenu par la bonté du Professeur Morton une roue excellente

Puisque j'ai trouvé que le bout antérieur de la langue est à 1ᵐ.355 en avance ~~du~~ point où l'axe fixe coupe le plan de suspension, et 1ᵐ.07 au dessous de la même axe dans une ligne verticale, il suit que ce bout de la langue est à une distance de $\sqrt{1^m.355 \times 1^m.07} = 1^m.20$ de l'axe. Et puisque la ~~flexion~~ mouvement de ce bout avec le poids d'un Kilogramme est $S + 0^{mm}.0008 = 0^{mm}.0347$ il suit que la torsion du support est $\frac{0^{mm}.0347}{1^m.20} = 0.0000289 = 5''.96$
Pour passer le temps, j'ai fixé un miroir sur le pied, et ~~avec~~ à l'aide d'un télescope j'ai observé la reflexion d'une échelle. J'ai obtenu 6'' pour la torsion, ce qui est peut-être digne de mention, bien que cette méthode ~~est~~ manque naturellement ~~avec~~ l'exactitude de l'autre.

Pour faire ~~une~~ une confirmation complète de la théorie de la flexion du pieds, en me servant d'un microscope puissant, j'ai fait les observations que voici sur la flexion du support produit par l'oscillation du pendule même, dans ces deux positions. L'échelle employé était fait par M. Rogers du ~~Cambr~~ Harvard College Observatory et était divisée en 1/4000 d'une pouce avait une exactitude extrême.
~~A. Bout pésant en bas~~
Hoboken, 20 Mars 1877

A. Bout pésant en bas

| Arc d'oscillation du pendule | Amplitude d'oscillation de l'échelle | Le même en millimètres |
|---|---|---|
| 2° 20' | 2.2 | |
| 2 18 | 2.1 | |
| 2 12 | 2.0 | |
| 2 18 | 1.9 | |
| 2 8 | 1.9 | |
| 2 8 | 1.9 | |
| 2 | 1.95 | |
| 2 7 | 1.8 | |

Indiquons ~~la période~~ la durée d'une oscillation par $T$ et les correc-
tions ~~by~~ $\Delta$ à cause de la flexion par $\Delta$; alors, nous avons

$$T^2 = \frac{\partial^2 l}{g}$$

et

$$\Delta(T^2) = \frac{\partial^2}{g} MS \frac{h}{l}$$

Maintenant, en distinguant ~~by~~ par des ~~nombres~~ chiffres subjacentes les deux positions du pendule à réversion, la formule de réduction des résultats ~~d'un~~ obtenus par d'un tel pendule est

$$\frac{\partial^2}{g} l = \frac{T_1^2 h_1 - T_2^2 h_2}{h_1 - h_2}$$

d'où ~~ainsi nous avons~~,

$$\Delta\left(\frac{\partial^2}{g} l\right) = \frac{\partial^2}{g} MS \frac{h_1^2 - h_2^2}{l_1 (h_1 - h_2)} = \frac{\partial^2}{g} MS,$$

ou bien

$$\Delta l = MS,$$

ou, ~~si~~ en appelant $\lambda$ ~~est~~ la longueur du pendule à secondes

$$\Delta \lambda = MS \frac{\lambda}{l}.$$

à bout de la langue, et à l'aide d'un télescope j'ai mésuré la torsion par la reflexion d'une échelle, en la trouvant 6". Cette méthode manque naturellement l'exactitude de l'autre.

Pour arriver à une dernière confirmation de la théorie ~~de la flexion du pied~~, j'ai fait les observations que voici sur la flexion produite par l'oscillation du pendule même, dans ses deux positions, en me servant d'un microscope puissant. L'échelle employée a été faite par M. Rogers de l'Observatoire de Harvard College. ~~et~~ Elle est divisée d'une exactitude extrême de quatre millième à quatre millième $\left(\frac{1}{4000}\right)$ d'une pouce. C'était attachée à 70 mm en avant ~~de l'axe de~~ du centre du couteau, ce qui donne une correction à $S$ de $+\overset{mm}{0.0019}$. Si $\Phi$ est l'arc d'oscillation du pendule, l'amplitude double de la vibration de l'échelle doit être

$$2M\left(S+\overset{mm}{0.0019}\right)\frac{h}{l}\,\Phi$$

et $M = 6.59$ C'est cette formule dont je me suis servi en calculant les quantités en bas.

C'était attaché 70 mm en avance de l'axe du pendule, ce qui donne une correction de $-0^{mm}.0019$. ~~pour obtenir~~ s.

Hoboken, 20 Mars 1877

Bout pésant du pendule en bas

| Quantités observées | | A calculé | | Amplitude sur l'échelle calculé | |
|---|---|---|---|---|---|
| Arc du pendule | Amplitude sur l'échelle | De l'arc du pendule | De l'amplitude | | |
| 2° 20' | 2.2 | $0^m.0284$ | 0.031 | ~~2.0~~ | 2.1 |
| 2 18 | 2.1 | 0.0279 | 0.030 | ~~2.0~~ | 2.1 |
| 2 12 | 2.0 | 0.0278 | 0.028 | ~~1.9~~ | 2.0 |
| 2 10 | 1.9 | 0.0263 | 0.027 | ~~1.9~~ | 2.0 |
| 2 8 | 1.9 | 0.0264 | 0.027 | ~~1.8~~ | 1.9 |
| 2 8 | 1.9 | 0.0269 | 0.027 | ~~1.8~~ | 1.9 |
| 2 7 | 1.95 | 0.0267 | 0.027 | ~~1.8~~ | 1.9 |
| 1 30 | 1.5 | 0.0183 | 0.021 | ~~1.3~~ | 1.4 |
| 35 | 0.8 | 0.0071 | 0.011 | | 0.5 |

nd the seconds pendulum being $\lambda$.

~~Correction of seconds pendulum~~ $\Delta\lambda = MS\dfrac{\lambda}{L}$.

Pour déterminer la quantité de la flexion j'attache ~~au la langue~~ cette partie de la langue où repose le milieu du couteau, une corde qui s'étend horizontalement ~~perpen~~ dans un sens perpendiculaire au ~~celui du~~ couteau ~~et~~ qui passe sur la roue ~~d'un Atwood~~ d'une machine Atwood et qui tient à son extrémité ~~support au bout~~ un Kilogramme. ~~Au~~ Sur bout de la langue ~~ou~~ même sur ~~un bras celui d'~~ un bras fixé à cette langue ~~et s'étendant~~ je colle une échelle micrometrique en verre ~~gravée sur le verre et disposée~~ placée dans d'un sens propre pour ~~mesur~~ laisser mesurer la flexion par un micromètre qui la regarde. ~~la ... repose sur~~ ~~Cette~~ Ce micromètre se repose sur un support particulier indépendant, dont le montant se compose d'un tuyau à gaz d'un diamètre de 10 centimètres à peu près.

Voici maintenant les expériences que j'ai fait pour déterminer la position de l'axe fixe autour ~~duquelle~~ de laquelle tourne le couteau sur l'influence d'une force horizontale perpendiculaire au couteau.

A. Expériences faites au niveau du couteau.

Hoboken. ~~1877~~ 10 Mars, 1877. Temp. 13°C.

| Distance de l'échelle en avance du bout antérieur de la langue | Flexion en revolutions de la vis micrometrique Observée | Calculée |
|---|---|---|
| $-0.496$ m | $+0.211$ | $+.209$ |
| $+0.053$ | $+0.356$ | $+.358$ |
| $+0.318$ | $+0.436$ | $+.43[illegible]$ |

$\frac{376}{63}$

Les quantités calculées supposent que l'axe coupe le niveau du couteau à une distance de 1ᵐ35 derrière le bout antérieur de la langue ~~du couteau~~.

B. Expériences faites dans la verticale du bout antérieur de la langue.

Hoboken. 12 Mars 1877. Temp 14°C Obs. M. le Sous-assistant Smith.

| Distance de l'échelle au dessous du couteau. | Flexion en revolutions de la vis micrométrique Observée | Calculée |
|---|---|---|
| $-0^m.44$ | +0.196 | +0.196 |
| 0.000 | +0.340 | +0.332 |
| +0.395 | +0.446 | +0.454 |

Les quantités calculées supposent que l'axe coupe la verticale du bout antérieur de la langue à une distance de $1^m.07$ au dessus du niveau du couteau.

Il ~~n'y~~ n'y a rien de surprenant dans ~~le fait~~ ce que l'axe instantanée est au dessus du couteau. Supposons, en effet, que ~~la~~ la flexion était entièrement due au trois pieds du support. En ces cas, le ~~bout~~ mouvement des bout superieur de chaque pied serait perpendiculaire au ~~p~~ sens général du pied, et en même temps perpendiculaire au rayon du cercle de ~~sa~~ revolution, de façon à ce que le pieds se dirigerait directement à l'axe fixe. Cette axe et en arrière du suppo sans doute à cause de la flexion de la langue même.

these last two sheets? wrote:

-ely. If it were not so small as it is, or if the accuracy
-n observations were greater, this would produce a sort
accidental error in the time of transit of the pendulum.
t in the existing case the only appreciable effect
the flexure of the stand on the motion of the pendulum
~~make~~ give it a virtual length equal to $L + MS\frac{h}{L}$. ~~The~~
~~-ost convenient mode of reducing the observations made~~
~~-ith a reversible pendulum is to calculate the~~ find ~~two~~
~~-ind square~~ for the two ~~ends up~~
~~-nd[?] Since the square of the time of oscillation is pro-~~
~~-rtional to the length of the pendulum, the correction of~~
~~$T^2$ is $MS\,h\frac{T^2}{L^2}$~~
If we denote the time of oscillation by $T$

$$T^2 = \partial^2 \frac{L}{g}$$

and ~~therefore the correction of $T$ is~~ denoting corrections by $\Delta$, we have

$$\Delta T^2 = \frac{\partial^2}{g} MS\frac{h}{L}.$$

Now distinguishing the two positions of the reversible pendulum by subjacent numbers, the formula for the reduction of the observations is

$$\frac{\partial^2}{g}(L) = \frac{T_1^2 h_1 - T_2^2 h_2}{h_1 - h_2}$$

and therefore

$$\Delta\left\{\frac{\partial^2}{g}(L)\right\} = \frac{\partial^2}{g} MS\frac{h_1^2 - h_2^2}{L\,h_1 - h_2} = \frac{\partial^2}{g} MS$$

and consequently $\Delta T_1 = MS$