I Jornada “Peirce en Argentina”
10 de septiembre de 2004

LOS GRÁFICOS EXISTENCIALES DE PEIRCE EN LOS SISTEMAS ALFA^0

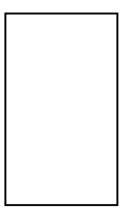
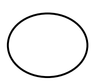
Yuri Alexander Poveda
yapoveda@hotmail.com

Las reglas deductivas de eliminación y de inserción propuestas para los gráficos existenciales Alfa de Peirce, son complejas para ser formalizadas en el Cálculo Proposicional Clásico (CPC). Las demostraciones de la validez de estas reglas en el CPC requieren inducción, debido a que dependen de la paridad de las cortaduras en cualquier fórmula.

El sistema Alfa^0 se caracteriza porque: 1) ninguna regla deductiva se define en función de la paridad de las cortaduras, 2) cada regla propuesta es una sub-regla de las reglas propuestas por Peirce para Alfa, 3) los sistemas son equivalentes a CPC, 4) Alfa^0 sin el teorema de la deducción no es equivalente a Alfa^{00}.

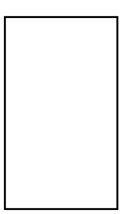
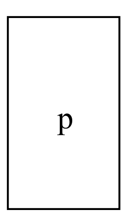
1. Sistema Alfa^0

Símbolos primitivos

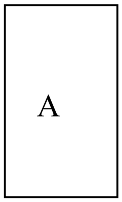
 ,  p, q, r,...Λ

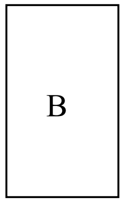
Notas: El símbolo Λ representa la letra vacía, las letras *p, q, r, ...* representan letras proposicionales, el rectángulo representa la hoja de aserción y la elipse representa una cortadura.

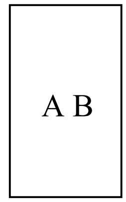
Gráficos Bien Hechos (gbh)

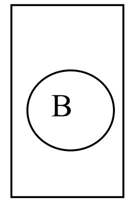
1)  es un gbh y 

es un gbh

2) Si 

y 

son gbh, entonces 

y 

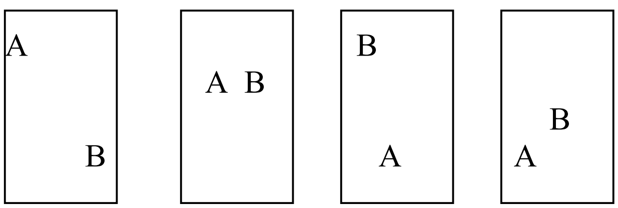
son gbh, siempre y cuando el dibujo A no intercepte el dibujo B

3) No son gbh aquellos construidos sin las reglas precedentes.

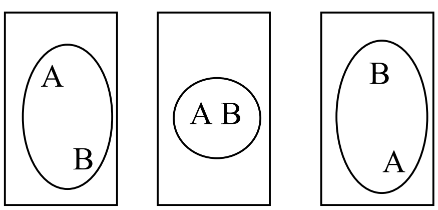
Nota: Las letras mayúsculas pertenecen al metalenguaje y representan contenidos posibles dentro de la hoja de aserción.

Isomorfismos entre gráficos

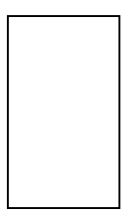
- Dos gráficos semejantes (la misma forma y diferente tamaño) son isomorfos.
- Si alguno de los siguientes gráficos es un gbh, entonces los demás son gbh isomorfos a él



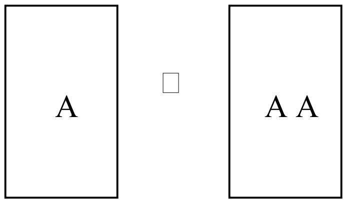
- Los siguientes gráficos son isomorfos

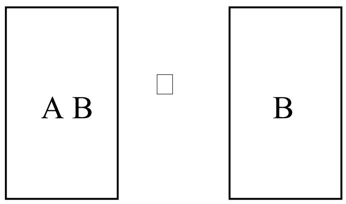


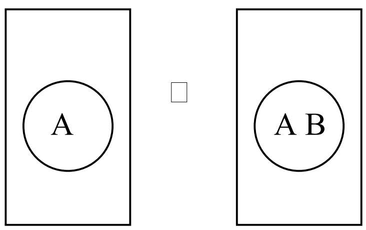
Axioma del sistema Alfa[0]

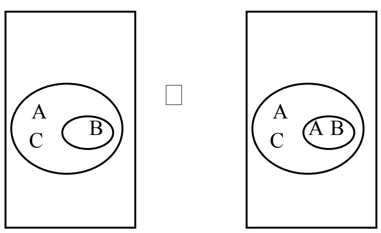


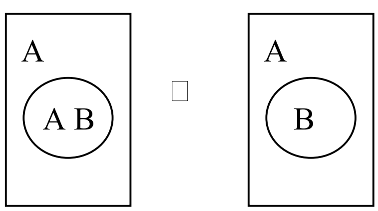
Reglas deductivas del sistema Alfa[0]

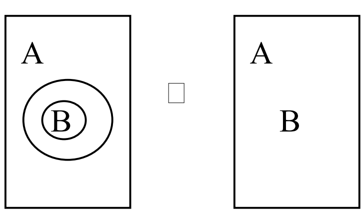
R1) 

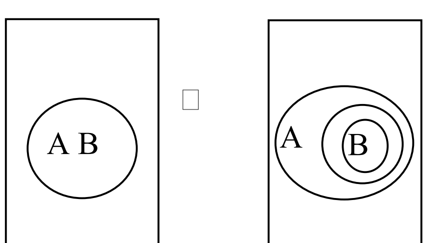
R2) 

R3) 

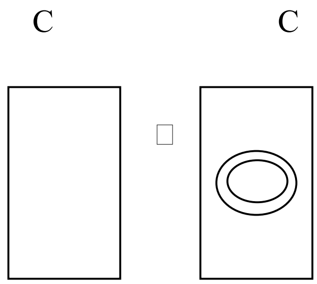
R4) 

R5) 

R6) 



R7)
R8)



Notas:

Las ocho reglas precedentes se dividen en dos clases, de eliminación y de inserción; las reglas de eliminación son: R2), R5), R6), las reglas de inserción son: R1), R3), R4), R7), R8).

Las reglas precedentes no son simétricas, incluso a nivel de eliminación y de inserción. Sin embargo, guardan relaciones interesantes entre ellas. Por ejemplo si se usa la regla 2 se obtiene la inversa de la regla 1, sin embargo de la regla 1 no se obtiene la regla inversa de la regla 2; si se usa la regla 3 se obtiene la opuesta de la regla 5; sin embargo de la regla 5 no se deduce la inversa de la regla 3; de la regla 6 se puede deducir la inversa de la regla 8; es decir, si primero aplicamos la regla 8 y luego aplicamos la regla 6, suponiendo $B = \Lambda$ obtenemos la hoja de aserción en blanco; sin embargo de la regla 8 no se puede deducir la inversa de la regla 6, para obtener la hipótesis de la regla 6 a partir de su deducción, es necesario aplicar las reglas 8, 3 y 5.

Ninguna de las reglas precedentes es la inversa de la otra, algunas reglas pueden deducir la inversa de otras, pero no simétricamente, como se describió, algunas inversas se deducen a partir de más de una de las otras reglas. Se puede demostrar que el sistema completo es simétrico, es decir, que todas las reglas son necesarias y suficientes, pero el sistema no es simétrico de entrada. Esta situación parece más ventajosa para estudiar ciertas lógicas intermedias, que no serían percibidas a partir de subsistemas simétricos.

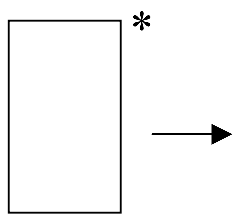
Equivalencia entre Alfa^0 y CPC

Proposición El sistema Alfa^0 es equivalente al CPC

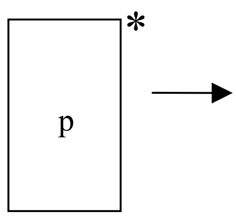
Demostración
Se realizará en tres pasos: 1. se establecerá una traducción entre los dos sistemas, 2. se deducirán los axiomas de Roser y el modus ponens del sistema Alfa^0, y 3. se deducirán las reglas del sistema Alfa^0 y su axioma, la hoja de aserción, a partir del CPC.

1. **Traducción:** Se define la traducción recursivamente sobre la complejidad de los gráficos

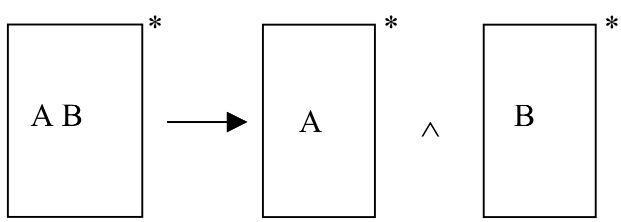
   G^* significa: *traducción del gráfico* G

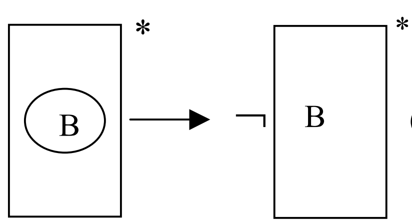


T (la verdad)



p (letra Proposicional de CPC)

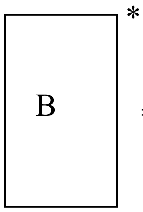




(la negación de la traducción del gráfico que contiene a B)

Afirmación La traducción de todo gráfico bien hecho es una fórmula bien formada.
Esta afirmación se deduce directamente de la función de traducción usando inducción en la complejidad de las fórmulas.

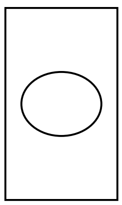
Afirmación La función de traducción no es sobreyectiva; sin embargo para toda α fórmula bien formada (fbf) del CPC, existe β fbf, equivalente a α y tal que



$= \beta$

Demostración Basta escribir α en términos de la conjunción y de la negación; lo cual siempre es posible, debido a que este conjunto de conectivos es completo para el CPC y toda fórmula escrita usando únicamente la conjunción y la negación posee un gráfico asociado.

Nota



$= \perp$ (lo falso)

Axiomas del Cálculo Proposicional Clásico

Existen varias axiomatizaciones para el CPC, en este trabajo utilizaremos la axiomatización de Rosser.

1) $\alpha \Rightarrow (\alpha \wedge \alpha)$
2) $(\alpha \wedge \beta) \Rightarrow \alpha$
3) $(\alpha \Rightarrow \beta) \Rightarrow (\neg(\beta \wedge \gamma) \Rightarrow \neg(\alpha \wedge \gamma))$
4) Modus Ponens

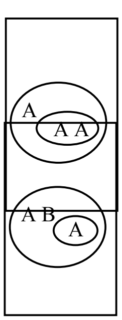
A continuación se expresarán los axiomas precedentes en términos de la conjunción y la negación

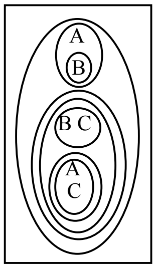
1) $\neg(\alpha \wedge \neg(\alpha \wedge \alpha))$
2) $\neg(\alpha \wedge \beta \wedge \neg\alpha)$
3) $\neg(\neg(\alpha \wedge \neg\beta) \wedge \neg(\neg(\neg(\beta \wedge \gamma) \wedge (\alpha \wedge \gamma))))$
4) $\alpha \wedge \neg(\alpha \wedge \neg\beta)$ □ β

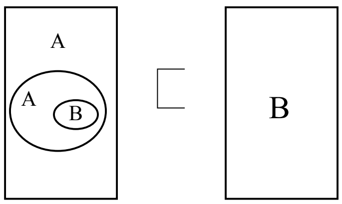
A continuación de escribirán las traducciones correspondientes del CPC al sistema Alfa^{0}.

1)

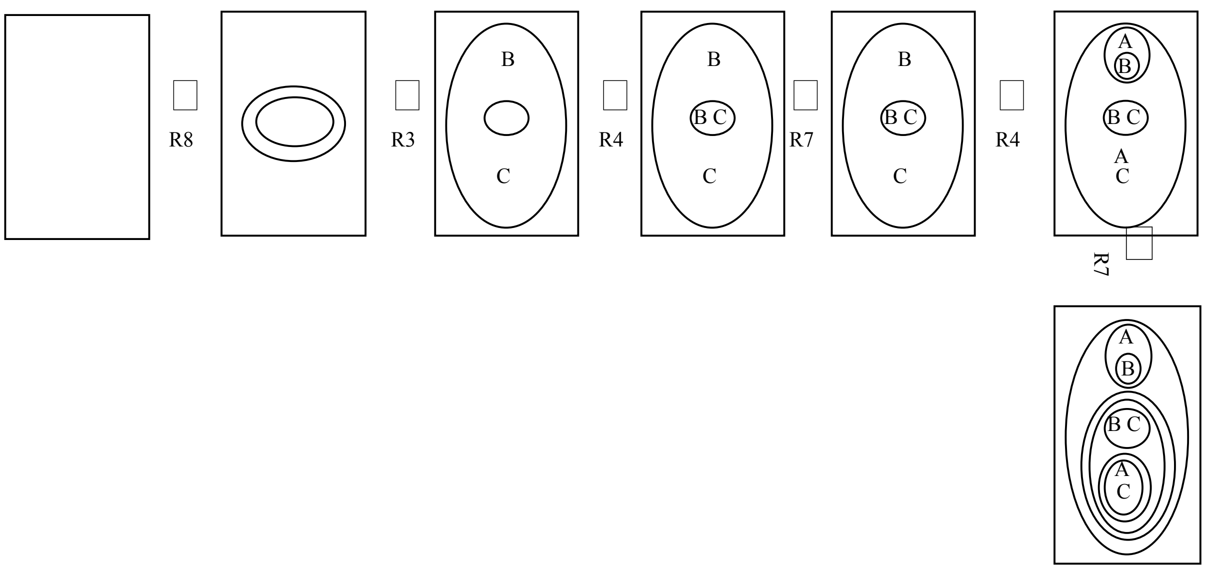
2)

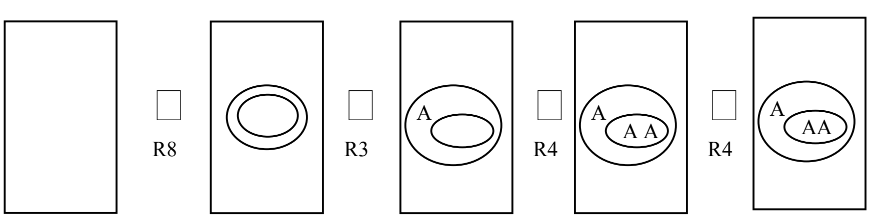


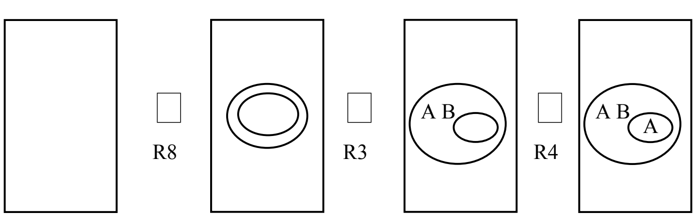
3) 

4) 

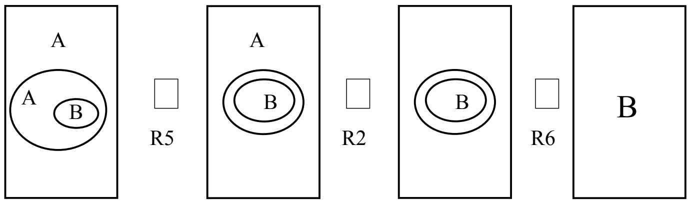
Del único axioma de Alfa^0 se deducirán los axiomas de Roser y el modus ponens.

A3) 

A1) 

2) 

4) Modus Ponens



Notas:

En las deducciones precedentes no se usó la regla uno: En la demostración de los axiomas de Rosser únicamente se usaron las reglas de inserción; en contraposición en la demostración del modus ponens solo se usaron reglas de eliminación.

¿Cuál es el papel que desempeña el modus ponens en el sistema de los gráficos existenciales? ¿Se pueden caracterizar los teoremas del CPC, que se deducen de las reglas del sistema Alfa^0 sin el modus ponens?

Las reglas del sistema Alfa^0 se deducen de los axiomas de Rosser

Se presentarán las traducciones del axioma y las reglas deductivas del sistema Alfa^0 en el lenguaje de CPC.

La traducción del axioma es la verdad, y por lo tanto es deducible pues equivale a cualquier tautología del CPC.

(R1)* = $\alpha \ \square\ \alpha \wedge \alpha$
(R2)* $\alpha \wedge \beta \ \square\ \alpha$
(R3)* $\neg\alpha \ \square\ \neg(\alpha \wedge \beta)$
(R4)* $\neg(\alpha \wedge \gamma \wedge \neg\beta) \ \square\ \alpha \wedge \gamma \wedge \neg(\beta \wedge \alpha)$
(R5)* $\alpha \wedge \neg(\alpha \wedge \beta) \ \square\ \alpha \wedge \neg\beta$
(R6)* $\alpha \wedge \neg\neg\beta \ \square\ \alpha \wedge \beta$
(R7)* $\neg(\alpha \wedge \beta) \ \square\ \neg(\alpha \wedge \neg\neg\beta)$
(R8)* $\square\ \square\ \neg\neg\square$

La traducción preserva la deducibilidad, es decir lo que es deducible en un en Alfa^0 es deducible en CPC. Consecuentemente los dos sistemas resultan equivalentes.

Comentarios finales

Cuando se estudian las reglas deductivas de los sistemas lógicos propuestos por Peirce, se deduce una creencia en la simetrías, por ejemplo cada una de las reglas propuestas tiene su opuesta; si se mira el desarrollo de los gráficos también se percibe la creencia de que solo conocemos mediante signos que se desatan de manera contextual en un vaivén de acciones y reacciones, como el mismo organismo vivo; también se percibe una postura nueva frente al racionalismo y al positivismo imperantes es su época, por ejemplo el cambio en los sistemas de muchos axiomas (imposiciones) por reglas contextuales muchos más sociales en el ámbito de los gráficos, el conocimiento de los objetos por contextos en lugar de un conocimiento de las partes del objeto es un cambio radical entra el pensamiento analítico por un pensamiento más sintético.

Sin embargo, hoy es contundente la asimetría de nuestro mundo y de nuestras percepciones, la aparición del estudio de lógicas intermedias nos hace pensar en la necesidad de reglas dirigidas en un solo sentido. El estudio de mundos contextuales se presenta mediante la teoría de categorías, ella es un complemento a la visión tradicional analítica de los conjuntos y la pertenencia.

El estudio de mundos posibles y lógica modal, es importante pero no lo suficiente como para invadir la actividad matemática tradicional, sin embargo, las reglas de la lógica modal y sus principales consecuencias han sido estudiadas exhaustivamente, la filosofía encontrará en ella abundante riqueza conceptual que apoya variadas hipótesis adecuadamente.

Referencias:

[1] X. Caicedo, *Elementos de Lógica y Calculabilidad,* Bogotá, Una empresa docente, 1980
[2] A. Tarski, *Introduction to Logic,* Nueva York, Dover, 1995.
[3] P. Thibaud, *La lógica de Charles Sanders Peirce,* Madrid, Paraninfo, 1982.
[4] D. Robers, *The Existencial Graphs of Charles S. Peirce,* Illinois, Universidad de Illinois, 1963.
[5] F. Zalamea, *Lógica Topológica: una introducción a los gráficos existenciales de Peirce,* Bogotá, XVI Coloquio Distrital de Matemáticas, 1997.