Hacia una concepción peirceana de la infinitud

y continuidad cantoriana en matemáticas

Miguel Ariza

RESUMEN

En 1892, en el artículo “La ley de la mente”, tercero de una serie de cinco para la revista *The Monist*, Peirce refuta las concepciones kantiana y cantoriana sobre el continuo matemático. Para Peirce la noción de continuo desarrollada por Cantor no agota en toda su amplitud la idea de continuidad; Sin embargo puede afirmarse que el continuo cantoriano es el “primer embrión” del continuo peirceano (Zalamea 2006). Y es posible dar cuenta de dicha noción de continuidad a través del sistema ‘semiótico’ peirceano tomando como eje articulador sus tres categorías ontológicas. Dejar claramente establecido lo anterior es el propósito de la presente ponencia.

A mediados del siglo XIX, el matemático inglés George Boole publica uno de los textos más importantes en la historia de las matemáticas modernas: *Un análisis matemático de la lógica* (1847). En este artículo queda prefigurado un proyecto de carácter algebraico, que posteriormente fue complementado y enriquecido entre otros por De Morgan, Jevons, Veen, Schröder y Peirce. Este proyecto de álgebra lógica tuvo una importante influencia en el desarrollo de la matemática y la lógica subsiguientes.

Se ha llegado a afirmar que “la matemática pura fue descubierta por Boole” (Russell, *apud* Couturat, 1985, p.129) y que este pensador es el fundador del proyecto ‘Logístico’, dando lugar, debido a las aportaciones de Dedekind, Frege, Russell y Peano entre otros, a lo que hoy conocemos como ‘Lógica Matemática’. Sin embargo también se puede afirmar que Boole es el iniciador de otra tradición a la que el historiador de las matemáticas Ivor Grattan-Guinness denomina ‘lógica algebraica’, siendo esta lógica una modalidad del estudio entre el todo y la parte. En su artículo *Peirce: entre la lógica y la matemática*, Grattan-Guinness, establece grandes diferencias entre ambas tradiciones colocando a Peirce dentro de la segunda (Grattan-Guinnes 1992, pp.55-72). Pero, más allá de ello, Peirce enriquece y a la vez exhibe, a través de sus contribuciones, una ruptura con las concepciones de Boole y de De Morgan (Zalamea, 1993, p.392). Lo que realiza Peirce es una ‘transfiguración dinámica de la lógica’ (Mier, 2006, pp.71-98) ya que sus ideas sobre la lógica y la matemática nunca estuvieron desvinculadas de su sistema filosófico y de su ‘semiótica’, en la que todo proceso de conocimiento es un proceso de semiosis, cuyo despliegue transita de la multiplicidad a la unidad.

Con todo, Peirce estuvo en constante diálogo y debate con los matemáticos más notables de su tiempo. Conocía las ideas de Cauchy sobre el “análisis matemático”, los trabajos de Peano y de Dedekind, así como los más importantes trabajos de Cantor sobre teoría de conjuntos.

En 1881 Peirce publica en la *Revista Americana de Matemáticas* su artículo *Sobre la lógica del número* en el que caracteriza la diferencia entre los conjuntos finitos e infinitos, sietes años antes de que lo hiciera Dedekind en su artículo *¿Qué son y para que sirven los números?* Peirce siempre aseveró que el artículo de Dedekind estaba indudablemente influenciado por el suyo, ya que le había enviado una copia de éste al matemático alemán (Dauben, 1986, 200). Sin embargo, Peirce reconoce que varias de las ideas contenidas en su artículo *Sobre la lógica del número* ya habían sido ampliamente anticipadas por Cantor (Peirce, 1902(c)). Peirce a diferencia de Dedekind y en concordancia con Cantor inicia su axiomatización de la aritmética a través del concepto de “multitud”, o de número cardinal cómo lo denomina Cantor (erróneamente según Peirce). Pero sería igualmente correcto, o quizás preferible según Peirce, comenzar con el número ordinal como lo hace Dedekind.

El objetivo de Peirce, en *Sobre la lógica del numero*, es (como ya se ha señalado) “axiomatizar la aritmética”, es decir, mostrar que las propiedades elementales concernientes al número son “consecuencias estrictamente silogísticas de unas cuantas proposiciones primarias” (Peirce, 1881). Para este fin, postula lo que él llama “un término relativo”, que da lugar a un “sistema de cantidad”. En términos actuales se trata de una relación de orden (reflexiva, antisimétrica y transitiva) que da lugar a un orden parcial amplio o “reflexivo” (al parecer esta es la primera vez en la historia de las matemáticas que aparecen juntas estas famosas definiciones (Bedoya, 2003), anticipando cerca de 20 años las ideas de Russell contenidas en su artículo *La lógica de las relaciones* de 1901). Recordemos que toda relación de orden parcial (reflexiva) es isomorfa con la relación de inclusión de la teoría de conjuntos, por lo que la axiomatización de Peirce queda enmarcada en la “teoría de parte-todo”, una concepción esencialmente extensionalista que se basa en una relación isomorfa a la de subconjuntos (Grattan-Guinnes, 1992, p.61).

Imbuido en este enfoque relacional, Peirce demostró (de manera totalmente independiente de Cantor) que la potencia del conjunto de todos los subconjuntos de un conjunto dado es siempre mayor que la potencia del conjunto original. Este resultado es cierto, tanto para conjuntos finitos como para conjuntos infinitos.

Aunque no está claro cuándo Peirce hizo por primera vez dicha demostración, podemos visualizar el problema a la luz de sus tres categorías ontológicas:

-Desde una perspectiva peirceana es posible concebir a todo entramado matemático, en primera instancia, como una multiplicidad, potencialmente infinita, de entidades puestas en situación sin más ordenamiento que el de las posibles trazas de sus manifestaciones. En este primer momento nos encontramos ante un entramado totalmente heterogéneo, cuyo advenimiento procede de todas partes, es una multiplicidad inconsistente, una multiplicidad no pensada como un hecho real, sino simplemente como una cualidad, como una simple posibilidad positiva de aparición.

-Es en un plano segundo cuando el entramado matemático comienza a configurarse como una entidad relacional, a través de un mecanismo de discernimiento existencial. Esta oposición es la que permitirá dar a las entidades sometidas a indagación calidad de existentes dentro del entramado matemático. Será en este proceso relacional donde los objetos ocupan una posición definida con respecto al todo y entre ellos mismos. Cada objeto, entonces, toma una localización definida dentro del entramado y con respecto a todos los demás objetos inmersos en éste.

Postular una existencia implica, en tal caso, la distinción de un objeto con respecto a los de su misma especie, a través de la designación de una ‘membresía’.

De lo anterior se desprende que en este contexto, un objeto matemático no es una entidad definible apriorísticamente, sino un objeto que se construye a través de un proceso de configuración. En este sentido el entramado matemático se revela como una ‘red de identidades y diferencias' producto de un quehacer diagramático, que da lugar a esquemas conceptuales de sentido, a través de expresiones matemáticas de carácter abstracto, es decir de carácter algebraico.

Para Peirce, el razonamiento diagramático es una forma de razonamiento profundamente fecundo. De hecho, dentro del pensamiento matemático, a cada proceso de formación de diagramas, le llamó un *álgebra*, ya que en la actividad matemática intervienen diagramas mentales complejos (Peirce 1906, *apud* Oostra, 2003, p.8):

> Pues el razonamiento matemático consiste en construir un diagrama de acuerdo con un precepto general, en observar ciertas relaciones entre partes de ese diagrama —[relaciones] que no están requeridas de manera explícita por el precepto—, en mostrar que estas relaciones valdrían para todos los diagramas tales, y en formular esta conclusión en términos generales. Todo razonamiento necesario válido es entonces, de hecho, diagramático. (Peirce 1892, *apud* Oostra, 2003, p.8)

Esta naturaleza sintética, esquemática y no lingüística de los diagramas, así como el carácter diagramático de la matemática, nos permiten dilucidar conjuntos de regularidades, de los diversos procesos sígnicos de carácter matemático.

---Tomemos como dominio de partida el conjunto finito:

$$P = \{\perp, \#, +, \text{x}, *, \blacklozenge\}$$

Supongamos que queremos calcular el número de subconjuntos del conjunto *P*. Entonces podemos visualizar el problema como una configuración diagramática de puntos en el plano.

En primera instancia el problema se nos presenta como un ámbito potencial. Una posibilidad positiva simple, de la cual solo podemos extraer una 'situación abstracta' que eventualmente se convertirá en un entramado diagramático, que al ser sometido a diversas interpretaciones configuracionales nos permitirá determinar el número de elementos del conjunto de todos los subconjuntos [P (P)] del conjunto dado.

Conforme vamos razonando el problema, nos percatamos de la existencia de una entidad paradigmática que está delimitada por los elementos limítrofes del conjunto P (P). El subconjunto de cardinalidad mínima (el conjunto vacío) y el subconjunto de cardinalidad máxima (el conjunto *P*):

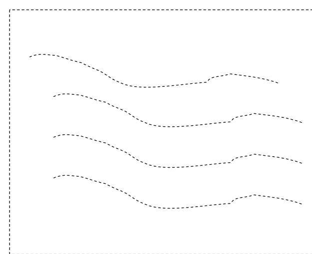
$$\varnothing \longrightarrow \boldsymbol{P}$$

Entre ambos extremos se encuentran todas las configuraciones composicionales generadas por todos los subconjuntos de *P*. Todos los subconjuntos de 0, 1, 2, 3, 4, 5 y 6 elementos.

Diagramáticamente, podemos visualizar el problema como un entramado formado por configuraciones de puntos en el plano.

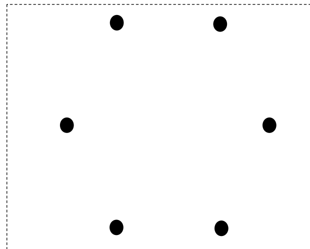
-1) De esta manera podemos visualizar nuestra configuración mínima de la siguiente forma:

$\varnothing$



-2) Geométricamente la configuración de todos los subconjuntos unitarios se presenta de este modo:

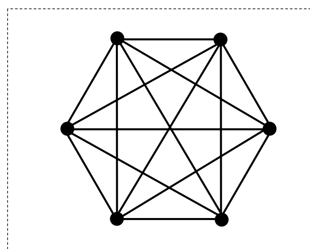
{⊥}, {#}, {+}, {x}, {∗}, {♦}



Podemos representar a cada uno de los subconjuntos unitarios de *P* como un punto en el plano, así su número será igual a 6, i.e. N(1)=6.

-3) Si representamos a través de un segmento de recta la unión entre cualquier par de conjuntos unitarios, obtenemos la siguiente configuración:

$\{x\} \cup \{y\}= \{x, y\};$

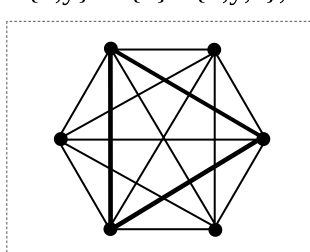


De esta forma calcular el número de subconjuntos de dos elementos equivale a contar el número segmentos de recta de la configuración:

Sabemos que cada uno de los puntos está conectado con cada uno de los 5 puntos restantes y cada uno de los segmentos de recta une 2 puntos, por lo tanto: N(2)= $\frac{6x5}{2}$ = 15.

-4) Si a cada uno de los subconjuntos de dos elementos le unimos un conjunto unitario obtenemos cada uno de los subconjuntos con tres elementos. Esto es equivalente a relacionar cada una de las duplas, delimitadas por un segmento de recta, con un punto de la configuración. Entonces el problema equivale a contar el número de triángulos generados en la configuración.

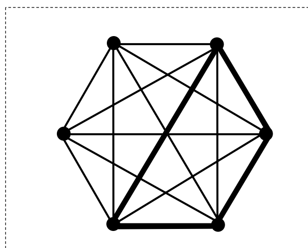
$\{x,y\} \cup \{z\}= \{x,y,z\};$



Cada una de las duplas está asociada con 4 de los puntos restantes y cada triángulo está generado por tres duplas distintas. Por lo tanto: N(3) = $\frac{15x4}{3}$ = 20.

-5) Ahora bien, continuando con nuestro razonamiento, a cada uno de los triángulos le podemos asociar un cuarto punto. Y el problema de contar todos los subconjuntos de 4 elementos es equivalente a contar cada uno de los cuadriláteros generados por los triángulos:

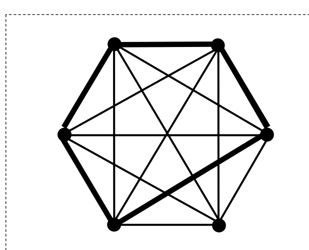
$\{x,y,z\} \cup \{w\}= \{x,y,z,w\}$



Cada cuadrilátero es generado por 4 triángulos distintos al asociarle a cada uno de ellos, uno de los 3 puntos restantes, por lo tanto: N(4)= $\frac{20x3}{4}$ = 15.

-6) Si a cada uno de los cuadriláteros le asociamos un quinto punto, obtenemos pentágonos cuyo número corresponde al de todos los subconjuntos de 5 elementos del conjunto P, cada cuadrilátero está conectado con uno de los dos puntos restantes en la configuración y cada pentágono está generado por 5 cuadriláteros distintos, entonces necesariamente: N(5)= $\frac{15x2}{5}$ = 6.

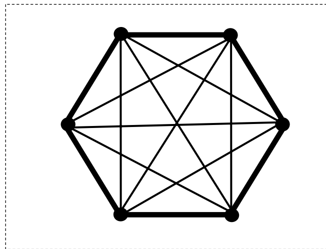
$\{x,y,z,w\}\cup \{s\}=\{x,y,z,w,s\}$



-7) Por último cada uno de los 6 pentágonos genera un único hexágono al conectarse con el sexto punto restante de la configuración, entonces el número de subconjuntos con 6 elementos es:

{x,y,z,w,s}∪{t}={x,y,z,w,s,t}

N(6)= $\frac{6x1}{6}$ = 1.



Así pues, a partir de una misma configuración de puntos hemos obtenido diversos entramados matemáticos que surgen de un proceso de interpretación signica. Obtenemos entonces: la configuración vacía, configuraciones de puntos, de rectas, de triángulos, cuadriláteros, pentágonos y hexágonos.

Asimismo, al sumar los correlatos numéricos de cada uno de las configuraciones, obtenemos:

$$N(0)+N(1)+N(2)+N(3)+N(4)+N(5)+N(6) = 1+\frac{1x6}{1}+\frac{6x5}{2}+\frac{15x4}{3}+\frac{20x3}{4}+\frac{15x2}{5}+\frac{6x1}{6}=$$

$$1+6+15+20+15+6+1=\binom{6}{0}+\binom{6}{1}+\binom{6}{2}+\binom{6}{3}+\binom{6}{4}+\binom{6}{5}+\binom{6}{6}= (1+1)^6=2^6=64.$$

De esta manera podemos obtener una expresión general, de carácter recursivo, inédita en la bibliografía matemática, para números combinatorios:

$$\binom{n}{0}=1;\ \binom{n}{k}=\frac{[n-(k-1)]\binom{n}{k-1}}{k} \Rightarrow \binom{n}{k+1}=\frac{[n-k]\binom{n}{k}}{k+1}.$$

El anterior esquema conceptual de sentido ha surgido de los diversos despliegues de nuestra configuración de puntos.

En general, para un conjunto P con ‘n’ elementos tendremos una configuración de ‘n’ puntos en el plano que formarán un eneágono con ‘n+1’ despliegues configuracionales distintos.

Si el conjunto P fuera infinito “numerable”, (es decir cualquier conjunto de objetos susceptible de ser alineado en una serie, que aunque puede ser interminable, puede numerarse de tal manera que cada miembro de la misma reciba un número natural definido [Peirce, 1902(b)]) procedemos exactamente de la misma forma.

A cada uno de los subconjuntos unitarios de nuestro conjunto podemos representarlo con un punto en el plano. Si unimos cada uno de estos puntos por medio de un segmento de recta obtendremos una retícula infinita que podemos inscribir en una circunferencia. Obtenemos de esta manera un polígono infinito, inscrito en la circunferencia, con todas sus diagonales, del cual al reunir todos los puntos, rectas, triángulos, cuadriláteros,… eneágonos etc. generados en la configuración y en conjunción con el conjunto vacío y el conjunto P, obtenemos un conjunto que posee la potencia del continuo cantoriano. Si a cada uno de los objetos de esta configuración poligonal infinita (el conjunto vacío, puntos, rectas, triángulos, cuadriláteros,…, eneágonos etc.) le asociamos un punto dentro de un segmento rectilíneo, agotaremos (cantorianamente) todo el segmento sin dejar ni un solo agujero[*].

Por consiguiente, el proceso de constituir el conjunto de todos los subconjuntos de un conjunto infinito genera una cadena infinita de conjuntos crecientes, infinitos y no equivalentes. El conjunto de los números reales comprendía lo que Peirce denominaba el primer ‘abnúmeral’ o la multitud ‘primopostnumeral’. El conjunto de todos los subconjuntos generado por el conjunto de los números reales producirá el ‘segundo abnumeral’ o la multitud ‘secundo-postnúmeral’ y así sucesivamente hasta alcanzar un encadenamiento infinito de multitudes postnumerales. Sin embargo, el continuo Peirceano es mayor en potencia que cualquier multitud postnumeral (Dauben, 1986, pp.202-203).

Para Peirce, la idea de continuidad supone la existencia de cantidades infinitesimales, es decir, “cantidades más pequeñas que cualquier cantidad positiva finita”, y afirmó que no había nada contradictorio en la idea de tales cantidades, por lo cual no había razón para no incluirlas en las matemáticas (Peirce, 1902(b)). Está teoría del continuo basada en la existencia de infinitesimales,

[*] La demostración formal de las anteriores aseveraciones empleando teoría de categorías aparecerá en Ariza (2008), “construcciones diagramáticas”, artículo en preparación.

fue llevada por Peirce hasta sus últimas consecuencias, desde un punto de vista lógico-filosófico. Desde un punto de vista matemático sus intuiciones fueron justificadas en el siglo XX, con la creación y el desarrollo del análisis no estándar, por matemáticos como Robinson y Luxemburg entre otros (Dauben, 1986, p.211).

El continuo Peirceano a diferencia del Cantoriano tiene un carácter sintético y no analítico, anticipando el despliegue de áreas de las matemáticas, hoy en franco desarrollo, como la teoría de continuos en la topología, la teoría de categorías, la teoría de modelos en lógica intuicionista, la teoría de topos y de cuantificadores generalizados.

Las intuiciones de Peirce sobre el continuo y sus contribuciones en lógica relacional son un gran aporte para tratar de dilucidar una cuestión de gran interés a lo largo de la historia de las matemáticas, cómo poder dar cuenta de una manera consistente de la naturaleza de lo múltiple, de la relación entre el todo y sus partes componentes. Y sobre todo, dilucidar cuáles son las leyes del pensamiento humano que nos permitan esclarecer cuáles son los procesos de interacción entre lenguaje y pensamiento, que por lo menos evoquen certidumbres consistentes sobre el incierto enigma de lo múltiple.

REFERENCIAS

ÁBREGO, Bernardo. 1997. 'Problemas combinatorios sobre conjuntos finitos de puntos'. *Aportaciones Matemáticas* **19**. México: Sociedad Matemática Mexicana.

ANDERSON, Ian. 2002. *Combinatorics of finite Sets*. New York: Dover

ARIZA, Miguel. 2007. 'Teoría semántica y matemáticas'. *Mathesis* **III 2_1**: 73-97.

___ 2007. 'Hacia una interpretación semiótica de los signos matemáticos'. *Mathesis* **III 2_2**: 1-25

BEDOYA, Lina María. 2003. 'Peano, Lawvere, Peirce: tres axiomatizaciones de los números naturales'. *Tesis de Licenciatura*. Colombia: Facultad de ciencias de la Universidad del Tolima.

COUTURAT, Louis. 1985. 'La filosofía de las matemáticas en Kant'. *Mathesis* **1_1**

DAUBEN, Joseph W. 'La filosofía de C. S. Peirce sobre los conjuntos infinitos'. *Mathesis* **2_2**: 191-211

GUITART, René. 1999. *La pulsation mathématique*. París: L'Harmattan.

GRATTAN-GUINNESS, Ivor. *1992*. 'Peirce: entre la lógica y la matemática'. *Mathesis* **8_1**: *55-72.*

MIER, Raymundo. 2006. 'Charles S. Peirce: la semiosis y la transfiguración dinámica de la lógica', *Semiótica, lógica y conocimiento. Homenaje a Charles Sanders Peirce*. México: UACM: 71-98

OOSTRA, Arnold. 2001. 'Los diagramas de la matemática y la matemática de los diagramas'. *Boletín de Matemáticas - Nueva Serie* **8**: 1–7. Colombia: Facultad de ciencias de la Universidad del Tolima.

PEIRCE, Charles S. 1867. 'Sobre una nueva lista de categorías'. http://www.unav.es/gep/

__ 1896. 'La Lógica de las Matemáticas: Un intento de desarrollar mis categorías desde dentro'. http://www.unav.es/gep/

___1902(a). 'La esencia de las Matemáticas'. http://www.unav.es/gep/

___1902(b). 'La ley de la mente'. http://www.unav.es/gep/

___1902(c). 'La lógica considerada como semiótica'. http://www.unav.es/gep/

ZALAMEA, Fernando. 1993. 'Una Jabalina lanzada hacia el futuro: anticipos y aportes de Charles S. Peirce a la lógica matemática del siglo XX'. *Mathesis* **9_4**: 391-404

___1997. 'Pragmaticismo, tríadas y continuidad: aspectos globales y locales de la lógica matemática contemporánea desde perspectivas peirceanas'. *Mathesis* **13**: 147-156.

___2006. 'Signos Triádicos. Lógicas, literaturas, artes. Nueve cruces latinoamericanos '. *Mathesis* **III 1_1**: 1-164.

___2007. ‘Javier de Lorenzo: Por una filosofía dinámica de la praxis matemática’. *Mathesis* **III** $\mathbf{2_1}$: 1-35