

Descripción de una notación para la lógica de los relativos, resultante de una ampliación de los conceptos del Cálculo Lógico de Boole¹

Los términos relativos, habitualmente, reciben un tratamiento algo ligero en las obras sobre lógica, sin embargo, la única investigación destacable de las leyes formales que los gobiernan se contiene en un valioso ensayo del Sr. De Morgan en el volumen décimo de las *Transacciones Filosóficas de Cambridge*². Él utiliza allí una notación algebraica conveniente, que se forma al añadir a los bien conocidos *spiculae*³ de ese escritor los signos utilizados en los ejemplos siguientes.

$X \dots LY$ significa que X es alguno de los objetos del conocimiento que están con Y en la relación L, o que es uno de los Ls de Y.

$X \dots LMY$ significa que X no es un L de un M de Y.

$X \dots (L,M)Y$ significa que X es o bien un L o bien un M de Y.

LM' un L de todo M. L, M un L solamente de los Ms.

$L^{[-1]}$ Y algo para lo que Y es L. l (L minúscula) no-L.

Este sistema deja aún algo que desear. Además, el álgebra lógico de Boole tiene una belleza tan singular, hasta donde llega, que es interesante investigar si no pudiera extenderse a todo el ámbito de la lógica formal, en vez de estar restringida a la más simple y menos útil parte del tema, la lógica de los términos absolutos que, cuando él escribía, era la única lógica formal conocida. El objeto de este ensayo es mostrar que se puede dar una respuesta afirmativa a esta cuestión. Pienso que no puede haber duda de que un *calculus*, o arte de extraer inferencias, basado en la notación que voy a describir, sería perfectamente posible, e incluso prácticamente útil, en algunos casos difíciles y particularmente en la *investigación* de la lógica. Lamento no estar en una situación que me permita realizar este trabajo, pero la relación que se da aquí de la notación misma proporcionará el fundamento de un juicio respecto a su probable utilidad.

Al extender el uso de viejos símbolos a nuevos temas, debemos, claro está, guiarnos por ciertos principios de la analogía, los cuales, cuando se formulan, se

¹ W2: P52, 359-429. Presentado en la *American Academy of Arts and Sciences* el 26 de enero de 1870. Publicado en los Anales de la misma Academia, 9 (1873): 317-78. Traducción de Miguel Ángel Fernández Pérez (2015).

² Parte de una memoria en cuatro partes dedicada al silogismo y publicada en los volúmenes IX y X de las citadas Transacciones. Esta parte se refiere a la lógica de las relaciones.

³ Fue Sir William Hamilton el que denominó ‘*spiculae*’ a algunos de los símbolos propuestos por Augustus De Morgan.

convierten en definiciones nuevas y más amplias de estos símbolos. Puesto que vamos a emplear los signos algebraicos habituales tanto como sea posible, es apropiado comenzar sentando las definiciones de las diversas relaciones y operaciones algebraicas. Lo siguiente, quizás, no encontrará objeciones.

DEFINICIONES GENERALES DE LOS SIGNOS ALGEBRAICOS

Estar incluido en o ser tan pequeño como es una relación *transitiva*. La consecuencia sostiene que⁴

$$\begin{array}{ll} \text{Si} & x \prec y, \\ \text{e} & y \prec z, \\ \text{entonces} & x \prec z. \end{array}$$

La *igualdad* es la conjunción de ser tan pequeño como y su inverso. Decir que $x = y$ es decir que $x \prec y$ e $y \prec x$.

Ser menor que es ser tan pequeño como, con la exclusión de su inverso. Decir que $x < y$ es decir que $x \prec y$, y que no es verdadero que $y \prec x$.

Ser mayor que es el inverso de ser menor que. Decir que $x > y$ es decir que $y < x$.

La ADICIÓN es una operación *asociativa*. Eso es decir⁵,

$$(x +, y) +, z = x +, (y +, z).$$

La adición es una operación *conmutativa*. Esto es,

$$x +, y = y +, x.$$

La *adición invertible* es la adición cuyo inverso correspondiente es determinante. Las últimas dos fórmulas son válidas para ella y, también, la consecuencia que

$$\begin{array}{ll} \text{Si} & x + y = z, \\ \text{y} & x + y' = z, \\ \text{entonces} & y = y'. \end{array}$$

⁴ Utilizo el signo $\prec$ en lugar de $\leq$. Mis razones para desechar este último signo es que no puede escribirse con la rapidez suficiente, y que parece representar la relación que expresa como compuesta de otras dos que en realidad son complicaciones de esto. Se admite universalmente que un concepto más elevado es lógicamente más simple que uno más bajo que está incluido en él. De lo que se sigue, a partir de las relaciones de extensión y comprensión, que en cualquier estado de información un concepto más amplio es más simple que otro más estrecho que esté incluido en él. Ahora bien, toda igualdad es inclusión, pero lo inverso no es verdad; de ahí que la inclusión sea un concepto más amplio que la igualdad y, en consecuencia, lógicamente más simple. Por el mismo principio, la inclusión es, también, más simple que ser menos que. El signo $\leq$ parece implicar una definición por enumeración; y una definición así contraviene las leyes de la definición. [Nota de Peirce].

⁵ Escribo una coma bajo el signo de adición, excepto cuando (como en el caso del álgebra ordinario) la correspondiente operación inversa (la sustracción) es determinante. [Nota de Peirce].

La MULTIPLICACIÓN es una operación *doblemente distributiva con respecto a la adición*. Esto es,

$$x(y +, z) = x y +, x z ,$$

$$(x +, y) z = x z +, y z .$$

La multiplicación es casi invariablemente una operación *asociativa*.

$$(x y) z = x (y z) .$$

La multiplicación no es, por lo general, conmutativa. Si escribimos la multiplicación conmutativa con una coma, tenemos

$$x , y = y , x .$$

La *multiplicación invertible* es aquella cuya correspondiente operación inversa (la división) es determinante. Podemos indicar esto con un punto; y, entonces, la consecuencia sostiene que

Si	$x . y = z ,$
y	$x . y' = z ,$
entonces	$y = y' .$

La *multiplicación funcional* es la aplicación de una operación a una función. Puede escribirse como la multiplicación ordinaria; pero, entonces, habrá generalmente ciertos puntos donde el principio asociativo no se sostiene. De esta manera, si escribimos (sen *abc*) *def*, hay uno de estos puntos. Si escribimos (log_(base *abc*)*def*) *ghi*, hay dos de estos puntos. El número de estos puntos depende de la naturaleza del símbolo de la operación, y es necesariamente finito. Si hubiera muchos de estos puntos, en cualquier caso, sería necesario adoptar un modo de escritura diferente de estas funciones del que se emplea, ahora, habitualmente. Podríamos, por ejemplo, dar a 'log' un significado tal que lo siguiente hasta un cierto punto indicado por una † denotaría la base del sistema, lo que siguiera a eso hasta el punto indicado por un ‡ sería la función sobre la que se operase, y lo que siguiera a eso estaría fuera de la influencia del signo 'log'. De esta manera, log *abc* † *def* ‡ *ghi* sería (log *abc*) *ghi*, siendo la base *def*. En este escrito adoptaré una notación muy parecida a esta, que se describirá más convenientemente más adelante.

La operación de INVOLUCIÓN obedece a la formula⁶

⁶ En la notación de los cuaternios, (William Howard) Hamilton ha asumido $(xy)z = x(yz)$, en vez de $(xy)z = x(yz)$, aunque parece haber muy poca diferencia en lo que adopta. Quizás deberíamos asumir dos

$$(x^y)^z = x^{yz} \quad (x^y)^z = x^{(zy)}$$

La involución, también, sigue el *principio indicial*.

$$x^{y^+, z} = x^y, x^z.$$

La involución, también, satisface el *teorema del binomio*.

$$(x +, y)^z = x^z +, \Sigma_p x^{z-p}, y^p +, y^z,$$

donde Σ denota que p debe tener todo valor menor que z , y debe ser extraído de z de todas las maneras posibles, y que debe adoptarse la suma de todos los términos así obtenidos de la forma x^{z-p}, y^p . Entonces tendremos que

$$(x -, y) +, y = x ,$$

$$(x - y) + y = x ,$$

$$(x + y) - y = x .$$

La DIVISIÓN es la operación inversa a la multiplicación. Puesto que la multiplicación no es, por lo general, conmutativa es necesario tener dos signos para la división. Adoptaré

$$(x : y) y = x ,$$

$$x^{y^-} = y .$$

La división inversa a la multiplicación que se indica con una coma puede indicarse con un punto y coma. De forma que

$$(x ; y) , y = x .$$

La EVOLUCIÓN y ADOPTAR EL LOGARITMO son las operaciones inversas a la involución.

$$(\sqrt[x]{y})^x = y ,$$

$$x^{\log x y} = y .$$

A estas condiciones debe considerárseles imperativas. Pero adicionalmente a ellas hay otros caracteres determinados que es muy deseable que debieran poseer las relaciones y las operaciones, si se les van a aplicar los signos ordinarios del álgebra. Me esforzaré en enumerarlos aquí.

involuciones, de forma que $(xy)z = x(yz)$,
primera de estas. [Nota de Peirce].

$z(yx) = (zy)x$. Pero en este escrito solo se requiere la

1. Es un motivo adicional para utilizar un signo matemático para significar una operación o relación determinada que el concepto general de esta operación o relación se pareciese al de la operación o relación significada habitualmente con el mismo signo. En particular, estará bien que la relación expresada con $\subset$ implicase el concepto de que un miembro está dentro de otro; la adición, el de que se adoptan juntos; la multiplicación, el de que un factor se adopta relativamente al otro (como escribimos 2×3 para una *trio de pares*, y D_ϕ para la derivada de ϕ); y la involución, el de que la base se adopte para toda unidad del exponente.

2. En segundo lugar, es deseable que, en ciertas circunstancias generales, los números determinados puedan sustituirse por las letras con las que se opera, y que cuando así sustituidos las ecuaciones se sostengan bien cuando se interpreten de acuerdo con las definiciones ordinarias de los signos, de forma que el álgebra aritmética se incluyese en la notación empleada como un caso especial de la misma. Con este fin, debiera haber un número conocido o desconocido que se sustituya apropiadamente, en ciertos casos, por cada una, al menos, de alguna clase de letras.

3. En tercer lugar, es prácticamente esencial para la aplicabilidad de los signos de adición y de multiplicación, que sean posibles un *cero* y una *unidad*. Con *cero* significo un término tal que

$$x + 0 = x,$$

sea cual sea la significación de x ; y con una *unidad* un término para el que la fórmula general correspondiente

$$x \cdot 1 = x$$

se sostenga bien. Por otro lado, no debiera haber ningún término a tal que $a^x = x$, independientemente del valor de x .

4. También será un motivo fuerte para adoptar una notación algebraica, si otras fórmulas que se sostienen bien en la aritmética, tales como

$$x^z, y^z = (x, y)^z,$$

$$1^x = x,$$

$$x^1 = x,$$

$$x^0 = 0,$$

continúan sosteniéndose bien; si, por ejemplo, el concepto de un diferencial es posible, y el Teorema de Taylor se sostiene, y $\mathbb{G}$ o $(1 + i)^{1/i}$ representa un papel importante en el sistema, si hubiera un término que tuviese las propiedades de $\mathbb{O}$ (3.14159), o propiedades parecidas a las del espacio debiera, por otra parte, mostrarse con la notación, o si hubiera una expresión absurda que tuviera las propiedades y usos de $\mathbb{J}$ o la raíz cuadrada del negativo.

APLICACIÓN DE LOS SIGNOS ALGEBRAICOS A LA LÓGICA

A la vez que nos sentimos libres para usar los signos del álgebra en cualquier sentido conforme con las anteriores condiciones absolutas, encontraremos conveniente restringirnos a una interpretación particular excepto cuando otra esté indicada. Procedo a describir la notación especial que se adopta en este escrito.

Uso de las letras

Las letras del alfabeto denotarán signos lógicos. Ahora bien, los términos lógicos son de tres grandes clases. La primera abarca a aquellos cuya forma lógica implica únicamente el concepto de cualidad y que, en consecuencia, representan a una cosa simplemente como ‘un _____’. Estos discriminan a los objetos de la manera más rudimentaria, que no implica ninguna conciencia de discriminación. Consideran un objeto como es en sí mismo como *tal (quale)*; por ejemplo, como caballo, árbol u hombre. Estos son *términos absolutos*. La segunda clase abarca a los términos cuya forma lógica implica el concepto de relación, y que necesitan la adición de otro término para completar la denotación. Estos discriminan a los objetos con una conciencia clara de discriminación. Consideran un objeto como frente a otro, eso es como relativo; como padre de, amante de, o sirviente de. Estos son los *términos relativos simples*. La tercera clase abarca a los términos cuya forma lógica implica el concepto de poner las cosas en relación, y que requieren la adición de más de un término para completar la denotación. No solo discriminan con conciencia de discriminación, sino con conciencia de su origen. Consideran un objeto como medio o tercero entre otros dos, eso es como *conjugativo*; como ‘donante de _____ a _____’, o ‘comprador de _____ a _____ para _____’. A estos puede denominárseles *términos conjugativos*. El término conjugativo implica el concepto de TERCERO, el relativo el de segundo u OTRO, el término absoluto simplemente considera UN objeto. No existe ninguna clase cuarta de

signos que implique el concepto de *cuarto*, porque cuando se introduce el de *tercero*, ya que implica el concepto de poner los objetos en relación, todos los números superiores se dan a la vez, en la medida que el concepto de poner los objetos en relación es independiente del número de miembros de la relación. Si esta *razón* para el hecho de que no haya ninguna cuarta clase de términos fundamentalmente diferente de la tercera es satisfactoria o no, el hecho mismo se hace perfectamente evidente con el estudio de la lógica de relativos. Denotaré los términos absolutos con el alfabeto latino, *a, b, c, d*, etc.; los términos relativos con la cursiva, *a, b, c, d*, etc.; y los términos conjugativos con una clase del tipo denominado Madisoniano, ***a, b, c, d***, etc.

Por lo común, denotaré los términos individuales con mayúsculas, y los generales con minúsculas. Los símbolos generales de los números se imprimirán en negrita, así, **a**, **b**, **c**, etc. Las letras griegas denotarán operaciones.

Para evitar repeticiones, doy aquí un catálogo de las letras que usaré en los ejemplos de este escrito, con las significaciones que les adscribo.

a. animal.	p. Presidente del Senado de los Estados Unidos.
b. negro.	r. persona rica.
f. Francés.	u. violinista.
h. caballo.	v. Vice-Presidente de los Estados Unidos.
m. hombre.	w. mujer.

<i>a.</i> enemigo.	<i>h.</i> marido.	<i>o.</i> propietario.
<i>b.</i> benefactor.	<i>l.</i> amante.	<i>s.</i> sirviente.
<i>c.</i> conquistador.	<i>m.</i> madre.	<i>w.</i> esposa.
<i>e.</i> emperador.	<i>n.</i> no.	

g. donante de ____ a ____ . ***b.*** traidor de ____ a ____ .
w. ganador de ____ para ____ . ***t.*** transferidor de ____ a ____ .

Números correspondientes a letras

Propongo utilizar el término ‘universo’ para denotar a aquella clase de individuos *acerca de* la que únicamente se entiende que versa todo el discurso. El universo, en

consecuencia, en este sentido, como en el del Sr. De Morgan, es diferente en ocasiones diferentes. En este sentido, además, el discurso puede versar sobre algo que no es una parte subjetiva del universo; por ejemplo, sobre las cualidades o las colecciones de los individuos que contiene.

Propongo asignar a todos los términos lógicos, números; a un término absoluto, el número de individuos que denota; a un término relativo, el número medio de las cosas así relacionadas con un individuo. De esta forma, en un universo de hombres perfectos, el número de ‘dientes de’ sería 32. El número de un relativo con dos correlatos sería el número medio de las cosas así relacionadas con un par de individuos; y así en adelante para los relativos con números mayores de correlatos. Propongo denotar el número de un término lógico poniendo el término entre corchetes, así, $[t]$.

Los signos de inclusión, igualdad, etc.

Seguiré a Boole al adoptar el signo de igualdad con el significado de identidad. De esta manera, si v denota al Vice-Presidente de los Estados Unidos, y p al Presidente del Senado de los Estados Unidos,

$$v = p$$

significa que todo Vice-Presidente de los Estados Unidos es Presidente del Senado, y todo Presidente del Senado de los Estados Unidos es Vice-presidente⁷. El signo ‘menor que’ debe adoptarse de forma que

$$f < m$$

signifique todo francés es un hombre, pero hay más hombres aparte de los franceses. Drobisch ha utilizado este signo con el mismo sentido⁸. Se sigue a partir de estas significaciones de $=$ y $<$ que el signo $\prec$ (o $\leq$, ‘tan pequeño como’) significará ‘es’. De esta forma,

$$f \prec m$$

⁷ Compárese con Frege, *Sobre sentido y referencia*. Estos dos términos tendrían la misma referencia pero diferente sentido [Nota del traductor].

⁸ Según De Morgan, *Formal Logic*, p. 334. De Morgan se refiere a la primera edición de la *Lógica* de Drobisch. La tercera edición no contiene nada parecido [Nota de Peirce]. De Morgan, Augustus. *Formal Logic: or, The Calculus of Inference, Necessary and Probable*. London: Taylor and Walton, 1847. Drobisch, Moritz Wilhelm. *Neue Darstellung der Logik nach ihren einfachsten Verhältnissen: Mit Rücksicht auf Mathematic und Naturwissenschaft*. 3ª ed. Leipzig, Leopold Voss, 1863.

significará «todo francés es un hombre», sin decir si hay o no cualesquiera otros hombres. Así

$$m \rightarrow l$$

significará que toda madre de algo es amante de la misma cosa; aunque esta interpretación anticipa en algún grado una convención que se hará más adelante. Estas significaciones de $=$ y $<$ se conforman claramente con las condiciones indispensables. El silogismo depende del carácter transitivo de estas relaciones, puesto que, en virtud de este, a partir de

$$f \rightarrow m$$

y $m \rightarrow a$,
podemos inferir que $f \rightarrow a$;

esto es, de todo francés ser un hombre y de todo hombre ser un animal, que todo francés es un animal. Pero las significaciones de $=$ y $<$ aquí adoptadas no solo cumplen con todos los requisitos absolutos, sino que tienen la virtud supererogatoria de ser muy aproximadamente iguales a las significaciones comunes. La igualdad es, de hecho, nada salvo la identidad de dos números; los números que son iguales son aquellos que son predicables de las mismas colecciones, al igual que los términos que son idénticos son aquellos que son predicables de las mismas clases. Por ello, escribir $5 < 7$ es decir que 5 es una parte de 7, al igual que decir $f \rightarrow m$ es decir que los franceses son parte de los hombres. Verdaderamente, si $f < m$, entonces el número de franceses es menor que el número de hombres, y si $v = p$, entonces el número de Vice-Presidentes es igual al número de Presidentes del Senado; por lo que los números pueden ser siempre sustituidos por los términos mismos, en el caso que no se encuentre ningún signo de operación en las ecuaciones ni en las desigualdades.

Los signos de adición

Boole adopta el signo de adición, de forma que

$$x + y$$

denota todo lo que denota x y, además, todo lo que denota y . Por ello

$$m + w$$

denota a todos los hombres y, además, a todas las mujeres. Esta significación para este signo se necesita para conectar la notación de la lógica con la de la teoría de las

probabilidades. Pero si hay algo que se denota con ambos términos de la suma, el último no está ya más en lugar de cualquier término lógico en base a su implicación de que los objetos denotados con un término se deben adoptar, *además*, de los objetos denotados con el otro. Por ejemplo,

$$f + u$$

significa todos los franceses además de todos los violinistas y, en consecuencia, considerado como un término lógico, implica que todos los violinistas franceses son *además de sí mismos*. Por esta única razón, en un escrito publicado en las Actas de la Academia de Marzo de 1867⁹, preferí adoptar como adición regular de la lógica un proceso no-invertible, tal que

$$m +, b$$

está en lugar de todos los hombres y de todas las cosas negras, sin ninguna implicación de que las cosas negras deban adoptarse además de los hombres; y el estudio de la lógica de relativos me ha suplido con otras razones de peso para la misma determinación. Desde la publicación de aquel escrito, he encontrado que el Sr. W. Stanley Jevons, en un tratado llamado *Pure Logic, or the Logic of Quality*, se me había anticipado al sustituir la adición de Boole por la misma operación, aunque rechaza por completo la operación de Boole y escribe la nueva con el signo + a la vez que rehúsa darle el nombre de adición¹⁰. Es claro que tanto la adición regular no-invertible como la adición invertible satisfacen las condiciones absolutas. Pero la notación tiene otras recomendaciones. El concepto de *adoptar juntos* implicado en estos procesos es fuertemente análogo al de la suma, la suma de 2 y 5, por ejemplo, siendo el número de una colección que consiste en una colección de dos y en una colección de cinco. Cualquier ecuación o desigualdad lógica que no implica ninguna otra operación salvo la adición puede convertirse en una ecuación o desigualdad numérica al sustituir los términos mismos por los números de los diversos términos - siempre que todos los términos sumados sean mutuamente excluyentes. Al adoptar la adición en este sentido, no puede denotarse *nada* con el *cero*, porque entonces

$$x +, 0 = x,$$

⁹ «Sobre una mejora del cálculo lógico de Boole». *Proceedings of the American Academy of Arts and Sciences*, Marzo 1867. P30, W2: pp 12-23.

¹⁰ En otro libro usa el signo . | . en vez de +.

sea lo que sea denotado por x ; y esta es la definición de *cero*. Boole da esta interpretación, y es muy nítida, respecto a la semejanza entre el concepto ordinario de *cero* y el de nada, y porque así tendremos

$$[0] = 0.$$

Los signos para la multiplicación

Adoptaré para el concepto de la multiplicación *la aplicación de una relación*, de manera que, por ejemplo, lw denotará a todo lo que sea amante de una mujer. Esta notación es la misma que la utilizada por el Sr. De Morgan aunque parece que él no tenía a la multiplicación en su mente. « $s(m +, w)$ » denotará, entonces, a todo lo que sea sirviente de algo compuesto de la clase compuesta por los hombres y las mujeres adoptados juntos. De forma que

$$s(m +, w) = s m +, s w.$$

$(l +, s) m$ denotará a todo lo que sea amante o sirviente de una mujer, y

$$(l +, s) w = l w +, s w.$$

$(sl) m$ denotará a todo lo que esté respecto a una mujer en la relación de sirviente de un amante, y

$$(sl) w = s(l w).$$

De esta manera se satisfacen todas las condiciones absolutas de la multiplicación.

El término ‘idéntico a _____’ es una unidad para esta multiplicación. Esto es decir, si denotamos ‘idéntico a _____’ con 1 tenemos

$$x 1 = x,$$

sea x el término relativo que pueda ser. Porque lo que es amante de algo idéntico a algo, es lo mismo que un amante de ese algo.

Un término conjugativo como *donante* requiere naturalmente dos correlatos, uno que denota a la cosa dada, el otro al receptor de lo dado. Debemos poder distinguir, con nuestra notación, al donante de A a B del donante a A de B y, en consecuencia, supongo que la significación de la letra equivalente a ese relativo distingue los correlatos como primero, segundo, tercero, etc., de forma que ‘donante de _____ a _____’ y ‘donante a _____ de _____’ se expresarán con letras diferentes. Que ***g*** denote al último de estos términos conjugativos. Entonces, los correlatos o multiplicandos de este multiplicador

no pueden estar directamente a continuación de este, como es habitual en la multiplicación, pero pueden estar dispuestos tras él en un orden regular, de forma que

$$g_{xy}$$

denotará al donante a x de y . Pero según la notación, aquí x multiplica y , por lo que si ponemos propietario (o) en vez de x , y caballo (h) en vez de y ,

$$g_{oh}$$

parece denotar al donante de un caballo al propietario de un caballo. Pero sean los caballos individuales $H, H', H'',$ etc. Entonces

$$h = H +, H' +, H'' +, \text{etc.}$$

$$g_{oh} = g_o (H +, H' +, H'' +, \text{etc.}) = g_o H +, g_o H' +, g_o H'' +, \text{etc.}$$

Ahora bien, este último miembro debe interpretarse como donante de un caballo al propietario de ese caballo y esta, en consecuencia, debe ser la interpretación de g_{oh} . Esto es muy importante siempre. *Un término multiplicado por dos relativos muestra que EL MISMO INDIVIDUO está en las dos relaciones.* Si intentamos expresar el donante de un caballo al amante de una mujer y, con ese propósito, escribimos

$$g_{lwh},$$

hemos escrito donante de una mujer a un amante de ella, y si añadimos paréntesis, de esta manera,

$$g(lw)h,$$

abandonamos el principio asociativo de la multiplicación. Un poco de reflexión mostrará que el principio asociativo debe, de una manera u otra, abandonarse llegados a este punto. Pero mientras que el principio, a veces, es falsado, más a menudo se sostiene, y debe adoptarse una notación que muestre esto cuando se sostiene. Ya hemos visto que no podemos expresar la multiplicación escribiendo el multiplicando directamente detrás del multiplicador; adjuntemos a las letras, entonces, números subyacentes para mostrar dónde deben encontrarse sus correlatos. El primer número denotará cuántos factores deben contarse de derecha a izquierda para llegar al primer correlato, el segundo cuántos *más* deben contarse para llegar al segundo, y así en adelante. Entonces el donante de un caballo a un amante de una mujer puede escribirse

$$g_{12}l_1 wh = g_{11}l_2 hw = g_{2-1}hl_1 w.$$

Claro que un número negativo indica que el correlato anterior sigue al posterior con el correspondiente número positivo. Un *cero* subyacente hace al término mismo el correlato. Así,

$$l_0$$

denota al amante de *ese* amante o al amante de sí mismo, igual que *goh* denota que se da el caballo al propietario del mismo, porque hacer de un término un correlato doblemente es, por el principio distributivo, hacer a cada individuo un correlato doblemente, de forma que

$$l_0 = L_0 +, L_0' +, L_0'' +, \text{etc.}$$

Un signo subyacente de infinitud puede indicar que el correlato es indeterminado, de forma que

$$l_\infty$$

denotará a un amante de algo. Tendremos una confirmación de esto ahora.

Si el último número subyacente es un *uno* puede omitirse. Por ello tendremos

$$l_1 = l,$$

y

$$g_{11} = g_1 = g.$$

Esto nos permite conservar nuestras expresiones anteriores *lw*, *goh*, etc.

El principio asociativo no se sostiene en esta cuenta de factores. Porque no se sostiene, estos números subyacentes no son, con frecuencia, convenientes en la práctica y, en consecuencia, también uso otro modo de mostrar dónde se pueda encontrar el correlato de un término. Esto es por mediación de las marcas de referencia, $\dagger \ddagger \parallel \S \P$, que se sitúan subyacentes al término relativo, y antes y arriba del correlato. Por ello, donante de un caballo a un amante de una mujer puede escribirse

$$g_{\dagger \ddagger} \dagger l_{\parallel} \parallel w^{\ddagger} h.$$

el asterisco lo uso exclusivamente para referir al último correlato del último relativo del término algebraico.

Ahora bien, considerando que el orden de la multiplicación es: un término, un correlato del mismo, un correlato de ese correlato, etc.; no hay ninguna violación del principio asociativo. Las únicas violaciones del mismo en este modo de notación son que, al pasar así del relativo al correlato, no saltamos los factores de una manera

irregular, y que no podemos sustituir en una expresión como **goh** ninguna letra por oh. Sugeriría que esta notación puede encontrarse útil al tratar otros casos de multiplicación no-asociativa. Al comparar esto con lo que se dijo anteriormente respecto a la multiplicación funcional, aparece que la multiplicación por un término conjugativo es funcional, y que la letra que denota a este término es un símbolo de operación. Estoy, en consecuencia, utilizando dos alfabetos, el griego y el madisoniano, donde solo era necesario uno. Pero es conveniente utilizar ambos.

Hasta ahora, hemos considerado solo la multiplicación de términos relativos. Puesto que nuestro concepto de la multiplicación es la aplicación de una relación, solo podemos multiplicar los términos absolutos al considerarlos como relativos. Ahora bien, el término absoluto ‘hombre’ es realmente equivalente exactamente al relativo ‘hombre que es ____’, y así con cualquier otro. Escribiré una coma tras cualquier término absoluto para mostrar que así se le considera como un término relativo. Entonces, el hombre que es negro se escribirá

m,b.

Pero no solo puede cualquier término absoluto considerarse así como un término relativo, sino que cualquier término relativo puede de la misma manera considerarse como un relativo con un correlato más. Es conveniente adoptar este correlato adicional como el primero. Entonces

l,sw

denotará a un amante de una mujer que es un sirviente de esa mujer. La coma tras la *l* aquí no debiera considerarse como que altera por completo el significado de *l*, sino solo como un signo subyacente, que sirve para alterar la disposición de los correlatos. De hecho, puesto que de esta manera se puede añadir una coma a cualquier término relativo, puede añadirse a uno de estos mismos relativos formados con una coma, y así con la adición de dos comas un término absoluto deviene un relativo de dos correlatos. Por lo que

m,,b,r ,

interpretado como

goh,

significa a un hombre que es un individuo rico, y que es un negro el que es ese individuo rico. Pero esto no tiene otro significado que

$$m,b,r ,$$

o un hombre que es un negro que es rico. Con lo que vemos que, tras añadir una coma, la adición de otra no cambia nada el significado, por lo que todo lo que tenga una coma detrás debe considerarse como que tiene un número infinito de comas. Si, en consecuencia, l,sw no es lo mismo que l,sw (y claramente no lo es, porque el último significa un amante y sirviente de una mujer, y el primero un amante y un sirviente de una mujer e igual a una mujer), esto es simplemente porque escribir la coma altera la disposición de los correlatos. Y si fuéramos a suponer que los términos absolutos son multiplicadores de alguna manera (como nos exige la generalidad matemática que debiéramos hacer), debemos considerar todo término como relativo que requiere un número infinito de correlatos para su infinita serie virtual ‘que es ____ y es ____ y es ____ etc.’ Ahora bien, un relativo formado con una coma por supuesto que recibe sus números subyacentes igual que cualquier relativo, pero la pregunta es, ¿Cuáles van a ser, para estos correlatos implicados, los números subyacentes implicados? Puede considerarse que cualquier término tiene un número infinito de factores, siendo los del final *unos*, por ello,

$$l,sw = l,sw,1,1,1,1,1,1, \text{ etc.}$$

Un número subyacente puede, en consecuencia, ser tan grande como queramos. Pero todos estos *unos* denotan al mismo individuo idéntico denotado con m ; entonces ¿Cuáles pueden ser los números subyacentes que se apliquen a s , por ejemplo, en base a sus infinitos de ‘*que es*’? ¿Qué número pueden separarlo de ser idéntico a w ? Solo hay dos. El primero es *cero*, que claramente neutraliza la coma por completo, ya que

$$s,0w = sw,$$

y el otro es el infinito; porque como 1^∞ es indeterminado en el álgebra ordinario, así se mostrará en adelante que lo es aquí, por lo que quitar el correlato con el producto de una serie infinita de *unos* es dejarlo indeterminado. De acuerdo con esto,

$$m,\infty$$

debiéra considerarse que expresa *algún* hombre. Entonces, cualquier término debe considerarse propiamente que tiene un número infinito de comas, algunas o todas de las cuales se neutralizan con ceros.

Entonces, ‘algo’ puede expresarse con

$$1_{\infty}.$$

En aras de la brevedad expresaré frecuentemente esto con una figura antigua del uno (1). ‘Cualquier cosa’ con

$$1_0.$$

También escribiré, a menudo, el 1 normal por *cualquier cosa*.

Es obvio que la multiplicación en un multiplicando indicado con una coma es conmutativa¹¹, esto es,

$$s, l = l, s.$$

Esta multiplicación es efectivamente la misma que la de Boole en su cálculo lógico. La unidad de Boole es mi 1, esto es, denota a todo lo que es.

La suma $x + x$ no denota, por lo general, a ningún término lógico. Pero $x_{\infty} + x_{\infty}$ puede considerarse que denota a algunos dos xs. Es natural escribir

$$x + x = 2.x,$$

$$y \quad x_{\infty} + x_{\infty} = 2.x_{\infty},$$

donde el punto muestra que esta multiplicación es invertible. También podemos utilizar las formas antiguas de manera que

$$2.x_{\infty} = 2x,$$

$$\text{al igual que} \quad 1_{\infty} = 1.$$

Entonces el 2 solo denotará a algunas dos cosas. Pero esta multiplicación no es, por lo general, conmutativa, y solo resulta así cuando afecta a un relativo que imparte una relación tal que una cosa solo la mantiene con *una* cosa. Por ejemplo, los amantes de dos mujeres no es lo mismo que dos amantes de las mujeres, esto es,

¹¹ Será conveniente, a menudo, hablar de la operación completa de añadir una coma y, luego, multiplicar como de una multiplicación conmutativa, cuyo signo es la coma. Pero, aunque esto sea permisible, caeremos en la confusión de inmediato si alguna vez nos olvidamos de que, de hecho, no es una multiplicación diferente, solo es una multiplicación por un relativo cuyo significado – o, más bien, su sintaxis – ha sido ligeramente alterada; y que la coma es realmente el signo de esta modificación del término precedente. [Nota de Peirce].

$$1\ 2.\ w\ y\ 2.\ 1\ w$$

son desiguales; pero los maridos de dos mujeres es lo mismo que dos maridos de mujeres, esto es,

$$h\ 2.\ w = 2.\ h\ w,$$

y, en general, $x,\ 2.\ y = 2.\ x,\ y.$

El concepto de la multiplicación que hemos adoptado es el de la aplicación de una relación a otra. De forma que, siendo un cuaternio la relación de un vector con otro, la multiplicación de cuaternios es la aplicación de una relación tal a una segunda. Incluso la multiplicación numérica ordinaria implica la misma idea, puesto que 2×3 es un par de triples, y 3×2 es un triple de pares, donde ‘triple de’ y ‘par de’ son, evidentemente, relativos.

Si tenemos una ecuación de la forma

$$x\ y = z,$$

y hay justo tantas *xs* por *y* como hay cosas del universo *por* cosas, entonces, también, tenemos la ecuación aritmética,

$$[x][y] = [z].$$

Por ejemplo, si nuestro universo es el de los hombres perfectos, y un francés (perfecto, por supuesto) tiene tantos dientes como tiene cualquiera de este universo, entonces,

$$[t]\ [f] = [t\ f]$$

se sostiene aritméticamente. Por lo que si los hombres pueden ser negros como pueden serlo, en general, las cosas,

$$[m,]\ [b] = [m,\ b],$$

donde no debe obviarse la diferencia entre $[m]$ y $[m,]$. Se observa que

$$[1] = 1.$$

Boole fue el primero en mostrar esta conexión entre la lógica y las probabilidades. Sin embargo, él estaba restringido a los términos absolutos. No recuerdo haber visto ninguna extensión de la probabilidad a los relativos, excepto la teoría ordinaria de las *expectativas*.

Entonces, nuestra multiplicación lógica satisface las condiciones esenciales de la multiplicación, tiene una unidad, tiene un concepto semejante al de las multiplicaciones admitidas, y contiene la multiplicación numérica como un caso de ella.

El signo de involución

Adoptaré la involución en el sentido de que x^y denotará a todo lo que es una x para todo individuo de y . Así l^w será un amante de toda mujer. Entonces, $(s^l)^w$ denotará a todo lo que esté con toda y cada mujer en la relación de sirviente de todo amante de ella; y $s^{(l^w)}$ denotará a todo lo que sea un sirviente de todo lo que sea amante de una mujer. Por lo que

$$(s^l)^w = s^{(l^w)}.$$

Un sirviente de todo y cada hombre y de toda y cada mujer se denotará con $s^{m+,w}$, y s^m , s^w denotará a un sirviente de todo y cada hombre que es un sirviente de toda y cada mujer. Por lo que

$$s^{m+,w} = s^m, s^w.$$

Aquello que es emperador o conquistador de todo y cada francés se denotará con $(e+, c)^f$, y $e^f+, \sum_p e^{f-p}, c^p+, c^f$ denotará a todo lo que es emperador de todo y cada francés o emperador de algunos franceses y conquistador de todos los demás, o conquistador de todo y cada francés. Consecuentemente,

$$(e+, c)^f = e^f+, \sum_p e^{f-p}, c^p+, c^f.$$

Cierto que podemos escribir el teorema del binomio de forma que podemos conservar todos sus coeficientes habituales; porque tenemos

$$(e+, c)^f = e^f+, [f]. e^{f-\dagger 1}, c^{\dagger 1}+, [f].([f]-1)/2 . e^{f-\dagger 2}, c^{\dagger 2}+, \text{etc.}$$

Esto es decir, aquellas cosas cada una de las cuales es emperador o conquistador de todo francés constan, primero, de todos aquellos individuos cada uno de los cuales es un conquistador de todo francés; segundo, de un número de clases igual al número de franceses, consistiendo cada clase de todo lo que es un emperador de todo francés excepto uno y es un conquistador de ese uno; tercero, de un número de clases igual a la mitad del producto del número de franceses por uno menos que ese número, consistiendo cada una de estas clases de todo individuo que es un emperador de todo

francés excepto dos determinados, y es conquistador de esos dos, etc. Así mismo, este teorema se sostiene igualmente bien con la adición invertible, y cualquiera de los dos términos del binomio puede ser negativo siempre que asumamos

$$(-x)^y = (-)^{[y]}. x^y.$$

Adicionalmente a las ecuaciones anteriores que se requiere se sostengan bien con la definición de involución, la siguiente también se sostiene,

$$(s, l)^w = s^w, l^w,$$

al igual que lo hace en la aritmética.

La aplicación de la involución a los términos conjugativos presenta poca dificultad tras las explicaciones que se han dado bajo el encabezamiento de la multiplicación. Es obvio que el traidor a todo enemigo debería escribirse

$$b^a,$$

al igual que el amante de toda mujer se escribe

$$l^w.$$

Pero $b = b_{11}$ y, en consecuencia, al contar hacia delante como indican los números subyacentes, contaríamos los exponentes, así como los factores, de la letra a la que los números subyacentes están adjuntos. Entonces, tendremos, en el caso de un relativo de dos correlatos, seis formas diferentes de unirle los correlatos, así,

- bam traidor de un hombre a un enemigo de él;
- $(b a)^m$ traidor de todo hombre a algún enemigo de él;
- $b a^m$ traidor de cada hombre a un enemigo de todo hombre;
- $b^a m$ traidor de un hombre a todos los enemigos de todos los hombres;
- $b^a m$ traidor de un hombre a todo enemigo de él;
- b^{am} traidor de todo hombre a todo enemigo de él.

Si los dos correlatos son términos absolutos, los casos son

- $b mw$ traidor de una mujer a un hombre;
- $(b m)^w$ traidor de cada mujer a algún hombre;
- $b m^w$ traidor de todas las mujeres a un hombre;
- $b^m w$ traidor de una mujer a todo hombre;

$b^m w$ traidor de una mujer a todos los hombres;
 b^{mw} traidor de toda mujer a todo hombre.

Estas interpretaciones no son obvias de ninguna manera, pero mostraré que son correctas más adelante.

Se percibirá que aún se sostiene aquí la regla que

$$(b^a)^m = b^{(am)},$$

lo que es decir que aquellos individuos que están para todo hombre en la relación de traidor a todo enemigo de él, son idénticos que aquellos individuos cada uno de los cuales es un traidor de ese hombre a todo enemigo de un hombre.

Si la proporción de amantes de cada mujer entre los amantes de otras mujeres es igual al número medio de amantes que tienen individuos singulares del universo completo, entonces

$$[I^w] = [I^{w'},] [I^{w''},] [I^{w'''},] \text{ etc.} = [I]^{[w]}.$$

De esta manera la involución aritmética se manifiesta como un caso especial de la involución lógica.

FÓRMULAS GENERALES

Las fórmulas que hemos obtenido de esta manera hasta ahora, exclusivas de las meras explicaciones de los signos y de las fórmulas relacionadas con los números de las clases, son:

- (1.) Si $x \prec y$ e $y \prec z$, entonces $x \prec z$.
- (2.) $(x +, y) +, z = x +, (y +, z)$. (Jevons.)
- (3.) $x +, y = y +, x$. (Jevons.)
- (4.) $(x +, y)z = xz +, yz$.
- (5.) $x(y +, z) = xy +, xz$.
- (6.) $(xy)z = x(yz)$.
- (7.) $x, (y +, z) = x, y +, x, z$. (Jevons.)
- (8.) $(x, y), z = x, (y, z)$. (Boole.)
- (9.) $x, y = y, x$. (Boole.)
- (10.) $(x^y)^z = x^{(y^z)}$.
- (11.) $x^{y^+, z} = x^y, x^z$.

$$(12.) (x +, y)^z = x^z +, \sum_p (x^{z-p}, y^p) +, y^z = x^z +, [z] \cdot x^{z-\dagger 1}, y^{\dagger 1} +, \\ [z].[z-1]/_2 \cdot x^{z-\ddagger 2}, y^{\ddagger 2} +, [z].[z-1].[z-2]/_{2-3} \cdot x^{z-\parallel 3}, y^{\parallel 3} +, \text{etc.}$$

$$(13.) (x, y)^z = x^z, y^z.$$

$$(14.) x + 0 = x. \quad (\text{Boole.})$$

$$(15.) x 1 = x.$$

$$(16.) (x + y) + z = x + (y + z). \quad (\text{Boole.})$$

$$(17.) x + y = y + x. \quad (\text{Boole.})$$

$$(18.) x + y - y = x. \quad (\text{Boole.})$$

$$(19.) x, (y + z) = x, y + x, z. \quad (\text{Boole.})$$

$$(20.) (x + y)^z = x^z + [z] \cdot x^{z-\dagger 1}, y^{\dagger 1} + \text{etc.}$$

También tenemos las siguientes, que están implícitamente implicadas en las explicaciones que se han dado.

$$(21.) x \prec x +, y.$$

Este, supongo, es el principio de identidad, porque de esto se sigue que $x = x$.

$$(22.) x +, x = x. \quad (\text{Jevons.})$$

$$(23.) x, x = x. \quad (\text{Boole.})$$

$$(24.) x +, y = x + y - x, y.$$

El principio de contradicción es

$$(25.) x, n^x = 0, \quad \text{donde } n \text{ representa 'no'}. \text{ El principio del tercio excluso es}$$

$$(26.) x +, n^x = 1.$$

Es una proposición idéntica que, si ϕ es determinante, tenemos

$$(27.) \text{Si } x = y \quad \phi x = \phi y.$$

Los seis siguientes son derivables a partir de las fórmulas ya dadas:

$$(28.) (x +, y), (x +, z) = x +, y, z.$$

$$(29.) (x - y) +, (z - w) = (x +, z) - (y +, w) + y, z(1 - w) + x, (1 - y), w.$$

En las siguientes, ϕ es una función que implica solamente las operaciones conmutativas y sus operaciones inversas¹².

¹² El lector puede querer información acerca de las pruebas de las fórmulas (30) a (33). Cuando la involución no está implicada en una función, ni ninguna multiplicación excepto aquella para la que $x, x = x$, es claro que ϕx es de primer grado y, en consecuencia, ya que todas las reglas del álgebra ordinario se sostienen, tenemos como en aquella, $\phi x = \phi 0 + (\phi 1 - \phi 0), x$. A partir de ahora, encontraremos que cuando ϕ tiene un carácter aún más general, tenemos, $\phi x = \phi 0 + (\phi 1 - \phi 0), x$. La primera de estas ecuaciones con una transformación simple da (30). Si consideramos $(\phi 1), (\phi 0)$ como una función de x y la desarrollamos por (30), tenemos, $(\phi 1), (\phi 0) = x, (\phi 1), (\phi 0) + (\phi 1), (\phi 0), (1 - x)$. Comparando estos términos, separadamente, con los términos del segundo miembro de (30), vemos que, $(\phi 1), (\phi 0) \prec \phi x$.

(30.) $\phi x = (\phi 1), x + (\phi 0), (1 - x).$ (Boole.)

(31.) $\phi x = (\phi 1 +, (1 - x)), (\phi 0 +, x).$

(32.) Si $\phi x = 0$ $(\phi 1), (\phi 0) = 0.$ (Boole.)

(33.) Si $\phi x = 1$ $\phi 1 +, \phi 0 = 1.$

Propiedades del cero y de la unidad

La definición simbólica de cero es

$$x + 0 = x,$$

de forma que por (19) $x, a = x, (a + 0) = x, a + x, 0.$

De aquí, a partir del carácter invertible de esta adición, y de la generalidad de (14), tenemos

$$x, 0 = 0.$$

Por (24) tenemos, en general,

$$x +, 0 = x + 0 - x, 0 = x,$$

$$\text{o} \quad x +, 0 = x.$$

Por (4) tenemos $ax = (a +, 0)x = ax +, 0x.$

Pero si a es una relación absurda, $ax = 0,$

de forma que $0x = 0,$

que debe sostenerse invariablemente.

De (12) tenemos $a^x = (a +, 0)^x = a^x +, 0^x +, \text{etc.}$

de donde por (21) $0^x \prec a^x.$

Pero si a es una relación absurda, y x no es cero,

$$a^x = 0,$$

y, en consecuencia, a menos que $x = 0, 0^x = 0.$

Cualquier relativo puede ser concebido como una suma de relativos $X, X', X'', \text{etc.},$ de forma que únicamente hay un individuo para el que cualquier cosa es $X,$ únicamente uno para el que cualquier cosa es $X', \text{etc.}$ Por ello, si x denota “causa de”, X, X', X''

Esto da inmediatamente (32), y da (31) tras realizar la multiplicación indicada en el segundo miembro de esa ecuación e igualando ϕx a su valor como se da en (30). Si $(\phi 1 +, \phi 0)$ se desarrolla como una función de x por (31), y se comparan los factores del segundo miembro con los del segundo miembro de (31), obtenemos, $\phi x \prec \phi 1 +, \phi 0,$ a partir de la cual se sigue inmediatamente (33). [Nota de Peirce].

denotarían diferentes tipos de causas, dividiéndose las causas según las diferencias de las cosas de las que son causas. Entonces tenemos

$$Xy = X(y +, 0) = Xy +, X0,$$

sea lo que sea y . De ahí, puesto que y puede adoptarse de forma que

$$Xy = 0,$$

tenemos

$$X0 = 0;$$

y, de una manera parecida,

$$X'0 = 0, X''0 = 0, X'''0 = 0, \text{ etc.}$$

Entonces tenemos

$$x0 = (X +, X' +, X'' +, X''' +, \text{ etc.})0 = X0 +, X'0 +, X''0 +, X'''0 +, \text{ etc.} = 0.$$

Si se divide el relativo x , de esta manera, en X, X', X'', X''' , etc., de forma que x es aquello que es o bien X o bien X' o bien X'' o bien X''' , etc., entonces $\text{no-}x$ es aquello que, a la vez, es $\text{no-}X$ y $\text{no-}X'$ y $\text{no-}X''$, etc.; esto es decir,

$$\text{no-}x = \text{no-}X, \text{no-}X', \text{no-}X'', \text{no-}X''', \text{ etc.}$$

donde $\text{no-}X$ es tal que hay algo (Z) tal que todo es $\text{no-}X$ para Z ; y lo mismo con $\text{no-}X'$, $\text{no-}X''$, etc. Ahora bien, $\text{no-}x$ puede ser cualquier relativo. Sustituyamos, entonces, y por él; e Y, Y' , etc. por $\text{no-}X, \text{no-}X'$, etc. Entonces tenemos

$$y = Y, Y', Y'', Y''', \text{ etc.};$$

$$\text{y} \quad Y'Z' = 1, \quad Y''Z'' = 1, \quad Y'''Z''' = 1, \text{ etc.},$$

donde Z', Z'', Z''' son términos individuales que dependen, para lo que denotan, de Y', Y'', Y''' . Entonces tenemos

$$1 = Y'Z' = Y'^{Z' +, 0} = Y'^{Z'}, \quad Y'^0 = Y'Z', \quad Y'^0,$$

$$\text{o} \quad Y'^0 = 1, \quad Y''^0 = 1, \quad Y'''^0 = 1, \text{ etc.}$$

$$\text{Entonces} \quad y^0 = (Y', Y'', Y''', \text{ etc.})^0 = Y'^0, Y''^0, Y'''^0, \text{ etc.} = 1.$$

Tenemos, por definición, $x \ 1 = x$.

$$\text{De ahí, por (6),} \quad ax = (a1)x = a(1x).$$

Ahora bien, a puede expresar cualquier relación, pero las cosas que están relacionadas con todo de la misma manera son las mismas. De ahí,

$$x = 1x.$$

$$\text{Tenemos, por definición,} \quad 1 = 1_0.$$

Entonces, si X es cualquier individuo $X, 1 = X, 1_0 = X, 1X$.

Pero $1X = X$.

De ahí $X, 1 = X, X$;

y por (23) $X, 1 = X$;

de donde si adoptamos $x = X + X' + X'' + X''' + \text{etc.}$,

donde X, X' , etc. denotan individuos (y por el significado mismo de un término general esto siempre puede hacerse, sea x lo que sea)

$x, 1 = (X + X' + X'' + \text{etc.}), 1 = X, 1 + X', 1 + X'', 1 + \text{etc.} = X + X' + X'' + \text{etc.} = x$, o
 $x, 1 = x$.

Tenemos, por (24), $x +, 1 = x + 1 - x, 1 = x + 1 - x = 1$,

o $x +, 1 = 1$.

Podemos dividir todos los relativos en limitados e ilimitados. Los relativos limitados expresan relaciones tales como la que nada tiene con todo. Por ejemplo, nada es conocedor de todo. Los relativos ilimitados expresan relaciones tales como la que algo tiene con todo. Por ejemplo, algo es tan bueno como cualquier cosa. Entonces, para los relativos limitados podemos escribir

$$p^1 = 0.$$

Lo inverso de un relativo ilimitado expresa una relación que todo tiene con algo. Así, algo es tan malo como cualquier cosa. Denotando este relativo con q ,

$$q 1 = 1.$$

Estas fórmulas le recuerdan a uno un poco el álgebra lógico de Boole, porque una de ellas se sostiene bien en la aritmética únicamente para el *cero*, y la otra únicamente para la *unidad*.

Tenemos, por (10), $1^x = (q^0)^x q^{(0x)} = q^0 = 1$,

o $1^x = 1$.

Tenemos, por (4), $1x = (a +, 1)x = ax +, 1x$,

o, por (21), $ax -< 1x$.

Pero todo está, de alguna manera, relacionado con x a menos que x sea 0; de ahí, a menos que x sea 0,

$$1x = 1.$$

Si a denota 'aquello que posee', e y 'el carácter de aquello que se denota con x ',

$$x = a^y = a^{(y1)} = (a^y)^1 = x^1,$$

o $x^1 = x$.

Puesto que 1 significa idéntico con todo individuo de una clase; y, en consecuencia, 1^x es cero, a menos que x denote solo a un individuo cuando 1^x llega a ser igual a x . Pero las ecuaciones fundadas en la interpretación puede que no se sostengan en los casos en que los símbolos no tengan interpretación racional.

Recopilando todas las fórmulas relacionada con el *cero* y la *unidad*, tenemos

$$(34.) \quad x +, 0 = x. \quad (\text{Jevons.})$$

$$(35.) \quad x +, 1 = 1. \quad (\text{Jevons.})$$

$$(36.) \quad x 0 = 0.$$

$$(37.) \quad 0 x = 0.$$

$$(38.) \quad x, 0 = 0. \quad (\text{Boole.})$$

$$(39.) \quad x^0 = 1.$$

$$(40.) \quad 0^x = 0, \text{ siempre que } x > 0.$$

$$(41.) \quad 1x = x.$$

$$(42.) \quad x, 1 = x 0.$$

$$(43.) \quad x^1 = x.$$

$$(44.) \quad 1^x = 0, \text{ a menos que } x \text{ sea individual, cuando } 1^x = x.$$

$$(45.) \quad q 1 = 1, \text{ donde } q \text{ es el inverso de un relativo ilimitado.}$$

$$(46.) \quad 1 x = 1, \text{ siempre que } x > 0.$$

$$(47.) \quad x, 1 = x. \quad (\text{Boole.})$$

$$(48.) \quad p^1 = 0, \text{ donde } p \text{ es un relativo limitado.}$$

$$(49.) \quad 1^x = 1.$$

Estas, de nuevo, nos dan las siguientes: -

$$(50.) \quad 0 +, 1 = 1.$$

$$(64.) \quad 0^1 = 0.$$

$$(51.) \quad 0 +, 1 = 1.$$

$$(65.) \quad 1 1 = 1.$$

$$(52.) \quad 0 0 = 0.$$

$$(66.) \quad 1, 1 = 1.$$

$$(53.) \quad 0, 0 = 0.$$

$$(67.) \quad 1^1 = 1.$$

$$(54.) \quad 0^0 = 1.$$

$$(68.) \quad 1 1 = 1.$$

$$(55.) \quad 10 = 0.$$

$$(69.) \quad 1, 1 = 1.$$

$$(56.) \quad 01 = 0.$$

$$(70.) \quad 1^1 = 1.$$

$$(57.) \quad 0, 1 = 0.$$

$$(71.) \quad 11 = 1.$$

$$(58.) \quad 0^1 = 0.$$

$$(72.) \quad 11 = 1.$$

$$(59.) \quad 1^0 = 1.$$

$$(73.) \quad 1, 1 = 1.$$

- (60.) $01 = 0.$ (74.) $1^1 = 1.$
 (61.) $10 = 0.$ (75.) $1^1 = 0.$
 (62.) $0, 1 = 0.$ (76.) $1, = 1.$
 (63.) $1^0 = 1.$

De (64) podemos inferir que 0 es un relativo limitado, y de (60) que no es el inverso de un relativo ilimitado. De (70) podemos inferir que 1 no es un relativo limitado, y de (68) que es el inverso de un relativo ilimitado.

Fórmulas relacionadas con los números de los términos

Ya hemos visto que

- (77.) Si $x \prec y$, entonces $[x] \prec [y]$.
 (78.) Cuando $x, y = 0$, entonces $[x +, y] = [x] +, [y]$.
 (79.) Cuando $[x y]:[n^x y] = [x]:[n^x]$, entonces $[x y] = [x][y]$.
 (80.) Cuando $[x \parallel y] = [x][\parallel y][1]$, entonces $[x^y] = [x]^{[y]}$.

Se observará que las condiciones a las que deben ajustarse los términos, para que las ecuaciones aritméticas se sostengan, aumentan en complejidad cuando pasamos de las relaciones y de los procesos más simples a los más complejos.

Hemos visto que

- (81.) $[0] = 0.$
 (82.) $[1] = 1.$

Lo más común es que el universo sea ilimitado, y entonces

- (83.) $[1] = \infty;$

y las propiedades generales de 1 se corresponden con las de infinito. De ahí,

$x +, 1 = 1$	se corresponde con	$x + \infty = \infty,$
$q 1 = 1$	“ “ “	$q \infty = \infty,$
$1 x = 1$	“ “ “	$\infty x = \infty,$
$p^1 = 0$	“ “ “	$p^\infty = 0,$
$1^x = 1$	“ “ “	$\infty^x = \infty.$

Las fórmulas que implican a la multiplicación conmutativa se derivan de la ecuación $1, = 1$. Pero si 1 se considera infinito, no es un infinito absoluto; porque $1 0 = 0$. Por otro lado, $1^1 = 0$.

Es evidente, de la definición del número de un término, que

$$(84.) [x,] = [x]:[1].$$

En consecuencia, tenemos que, si la probabilidad de que un individuo sea x para cualquier y es independiente de lo que cualquier otro y sea para x , y si x es independiente de y ,

$$(85.) [x^y,] = [x,]^{[y]}.$$

MÉTODO GENERAL PARA TRABAJAR CON ESTA NOTACIÓN

El álgebra lógico de Boole no contiene ninguna operación excepto nuestra adición invertible y nuestra multiplicación conmutativa, junto con las correspondientes sustracción y división. Solo tiene, en consecuencia, que expandir las expresiones que implican a la división, por medio de (30), para liberarse así de todas las operaciones no-determinativas, para poder usar los métodos ordinarios del álgebra que están, además, grandemente simplificados por el hecho de que

$$x, x = x.$$

La modificación del Sr. Jevons del álgebra de Boole implica solo a la adición no-invertible y a la multiplicación conmutativa, sin las correspondientes operaciones inversas. Él puede reemplazar la sustracción por la multiplicación, debido al principio de contradicción, y reemplazar la división por la adición, debido al principio del tercio excluido. Por ejemplo, si x es desconocido, y tenemos

$$x +, m = a,$$

o lo que se denota con x junto con hombres, que hace animales, solo podemos concluir, en referencia a x , que denota (entre otras cosas, quizás) a todos los animales no hombres; esto es, que los x s no hombres son los mismos que los animales no hombres. Que m^- denote a los no-hombres; entonces por la multiplicación tenemos

$$x, m^- +, m, m^- = x, m^- = a, m^- ,$$

porque, por el principio de contradicción,

$$m, m^- = 0.$$

O, supongamos, siendo x , de nuevo, desconocido, que hemos dado

$$a, x = m.$$

Entonces todo lo que podemos concluir es que los x s consisten en todos los m s y, quizás, algunos o todos los no- a s, o que los x s y los no- a s juntos hacen por los m s y los no- a s juntos. Si, entonces, a^- denota no- a , añadimos a^- a ambos lados y tenemos

$$a, x +, a^- = m +, a^-.$$

Entonces por (28) $(a +, a^-), (x +, a^-) = m +, a^-.$

Pero por el principio del tercio excluso,

$$a +, a^- = 1$$

y, en consecuencia, $x +, a^- = m +, a^-.$

No me consta que el Sr. Jevons utilice, de hecho, este último proceso, pero depende de él hacerlo. De esta manera, el álgebra del Sr. Jevons resulta decididamente más simple que, incluso, la de Boole.

Es obvio que cualquier álgebra para la lógica de relativos debe ser mucho más complicada. En la que yo propongo, trabajamos con las desventajas de que la multiplicación no es, por lo general, conmutativa, de que las operaciones inversas son habitualmente indeterminadas, y de que las ecuaciones trascendentales e, incluso, las ecuaciones como

$$a^{bx} = c^{de x} + f^x + x,$$

donde los exponentes son de profundidad tres o cuatro, son comunes en exceso. Es obvio, en consecuencia, que este álgebra es mucho menos manejable que el álgebra aritmético ordinario.

Podemos hacer un uso considerable de las fórmulas generales dadas hasta ahora, especialmente de (1), (21) y (27), y también de las siguientes que se derivan a partir de ellas:

(86.) Si $a -< b$ entonces hay un término x tal que $a +, x = b$.

(87.) Si $a -< b$ entonces hay un término x tal que $b, x = a$.

(88.) Si $b, x = a$ entonces $a -< b$.

(89.) Si $a -< b \quad c +, a -< c +, b$.

(90.) Si $a -< b \quad c a -< c b$.

(91.) Si $a -< b \quad a c -< b c$.

(92.) Si $a -< b \quad c^b -< c^a$.

(93.) Si $a -< b \quad a^c -< b^c$.

(94.) $a, b -< a$.

Hay, sin embargo, muchísimos casos en los que las fórmulas dadas hasta ahora sirven de poco.

La demostración del tipo denominado matemático se funda en supuestos de casos particulares. El geómetra dibuja una figura; el algebrista asume que una letra significa una cantidad única que cumple con las condiciones requeridas. Pero, cuando el matemático supone un caso individual su hipótesis es, sin embargo, perfectamente general, porque no considera ningún carácter del caso individual salvo aquellos que deben pertenecer a todo tal caso. La ventaja de su procedimiento se basa en el hecho de que las leyes lógicas de los términos individuales son más simples que las que se refieren a los términos generales, porque los términos individuales son o bien idénticos o bien mutuamente exclusivos, y no pueden intersectarse ni estar subordinados el uno al otro como pueden hacerlo las clases. La demostración matemática no está, en consecuencia, más restringida respecto a los temas de la intuición que cualquier otro tipo de razonamiento. Claro está que el álgebra lógico demuestra conclusivamente que las matemáticas se extienden por todo el dominio de la lógica formal; y que debe abandonarse cualquier teoría del conocimiento que no pueda ajustarse a este hecho. Podemos sacar provecho de todas las ventajas que se supone el matemático deriva de la intuición haciendo, simplemente, suposiciones generales de casos individuales.

En referencia a la doctrina de los términos individuales, deben tenerse presentes dos distinciones. El átomo lógico, o término incapaz de división lógica, debe ser aquel del cual todo predicado puede ser universalmente afirmado o negado. Puesto que, sea A este término. Entonces, si no es verdadero que todo A es X ni que ningún A es X, debe ser verdadero que algún A es X y algún A es no X; y, en consecuencia, A puede dividirse en el A que es X y en el A que es no X, lo cual es contrario a su naturaleza como átomo lógico. Un término tal no puede realizarse ni en el pensamiento ni en la sensación. En la sensación no, porque nuestros órganos de los sentidos son especiales - el ojo, por ejemplo, no nos informa inmediatamente del sabor, por lo que una imagen en la retina es indeterminada respecto al dulzor o no-dulzor. Cuando veo una cosa, no veo que no sea dulce, ni tampoco veo que sea dulce; y, en consecuencia, lo que veo es capaz de división lógica entre lo dulce y lo no-dulce. Es costumbre asumir que las imágenes visuales son absolutamente determinadas respecto al color pero incluso esto puede dudarse. No conozco ningún hecho que demuestre que nunca haya la más mínima vaguedad en la sensación inmediata. En el pensamiento, no puede realizarse un término absolutamente determinado porque, al no estar dado por los sentidos, un concepto tal tendría que formarse por síntesis, y no habría fin a la síntesis porque no hay límite para

el número de predicados posibles. Un átomo lógico, entonces, al igual que un punto en el espacio, implicaría para su determinación precisa un proceso infinito. Solo podemos decir, de una forma general, que un término, sea lo indeterminado que sea, puede hacerse aún más determinado, pero no que pueda hacerse absolutamente determinado. Un término como ‘el segundo Felipe de Macedonia’ es aún capaz de división lógica, en ‘Felipe borracho’ y ‘Felipe sobrio’, por ejemplo; pero lo denominamos individual porque lo que denota está únicamente en un lugar en un momento. Es un término no *absolutamente* indivisible, sino divisible en la medida que obviemos las diferencias de tiempo y las diferencias que las acompañan. Habitualmente descartamos estas influencias en la división lógica de las sustancias. En la división de relaciones, etc., por supuesto que no descartamos estas diferencias pero descartamos algunas otras. No hay nada que pueda prevenir que, prácticamente cualquier tipo de diferencia, sea convencionalmente obviada en algún discurso, y si *I* fuera un término que a consecuencia de esa negligencia se hace indivisible en ese discurso, tenemos en ese discurso,

$$[I]=1.$$

Esta distinción entre lo absolutamente indivisible y aquello que es uno en número desde un punto de vista particular, se muestra en las dos palabras *individual* (τὸ ἄτομον) y *singular* (τὸ καθ' ἑκάστων); pero como los que han utilizado la palabra *individual* no han sido conscientes de que la individualidad absoluta es meramente ideal, esta ha llegado a ser usada en un sentido más general¹³.

Los lógicos antiguos distinguen entre *individuum signatum* e *individuum vagum*. ‘Julio Cesar’ es un ejemplo del primero; ‘cierto hombre’, del segundo. El *individuum vagum*, en los días en que tales nociones eran exactamente investigadas, ocasionaba una gran dificultad por tener una cierta generalidad, siendo capaz, aparentemente, de división lógica. Si incluimos en el *individuum vagum* un término como ‘cualquier

¹³ El término individual absoluto no solo no puede ser realizado en la sensación ni en el pensamiento, sino que no puede existir, hablando con propiedad. Ya que cualquier cosa que dure algún tiempo, por corto que sea, es capaz de división lógica, porque en ese tiempo sufrirá algún cambio en sus relaciones. Pero lo que no existe durante ningún tiempo, por corto que sea, no existe en absoluto. En consecuencia, todo lo que percibimos o pensamos, o que existe, es general. Hasta ahora hay verdad en la doctrina del realismo escolástico. Pero todo lo que existe es infinitamente determinado, y lo infinitamente determinado es lo absolutamente individual. Esto parece paradójico, pero la contradicción se resuelve fácilmente. Aquello que existe es el objeto de una noción verdadera. Esta noción puede hacerse más determinada que cualquier noción asignable; y, en consecuencia, nunca es tan determinada que no sea capaz de más determinación. [Nota de Peirce].

hombre individual', estas dificultades aparecen bajo una fuerte luz, porque lo que es verdadero de cualquier hombre individual es verdadero de todos los hombres. Este término no es, en un sentido, un término individual; porque representa a todo hombre. Pero representa a cada hombre como capaz de ser denotado por un término que es individual; y, por eso, aunque no sea él mismo un término individual, está en lugar de cualquiera de una clase de términos individuales. Si llamamos a un pensamiento sobre una cosa, en la medida que es denotado por un término, una *segunda intención*, podemos decir que un término como 'cualquier hombre individual' es individual por segunda intención. Las letras que utiliza el matemático (tanto en álgebra como en geometría) son estos términos individuales por segunda intención. Tales términos individuales son uno en número, porque cualquier hombre individual es un hombre; pueden también considerarse como incapaces de división lógica, puesto que cualquier hombre individual, aunque pueda ser francés o no, es, sin embargo, totalmente un francés o totalmente no, y no algo de lo uno y algo de lo otro. De esta manera, todas las leyes de la lógica formal referidas a términos individuales serán válidas para estos términos individuales por segunda intención y, al mismo tiempo, una proposición universal puede, en cualquier momento, ser sustituida por una proposición acerca de ese término individual, puesto que nada puede predicarse de este término individual que no pueda predicarse de toda la clase.

Hay en la lógica de relativos tres tipos de términos que implican suposiciones generales de casos individuales. El primero son los términos *individuales*, que denotan solo a individuos; el segundo son aquellos relativos cuyos correlativos son individuales; denomino a estos *relativos infinitesimales*; el tercero son los relativos *infinitesimales individuales*, y a estos los denomino relativos *elementales*.

Términos individuales

Las fórmulas fundamentales referidas a la individualidad son dos. Los términos individuales se denotan con mayúsculas.

$$(95.) \text{ Si } x > 0 \quad x = X +, X' +, X'' +, X''' +, \text{ etc.}$$

$$(96.) \quad y^X = yX.$$

También, tenemos las siguientes que son fácilmente deducibles a partir de estas dos:

$$(97.) (y, z)X = (yX), (zX).$$

$$(99.) [X] = 1.$$

$$(98.) X, y_0 = X, yX.$$

$$(100.) 1^X = X.$$

Ya hemos visto que

$$1^x = 0, \text{ siempre que } [x] > 1.$$

Como ejemplo del uso de las fórmulas que hemos obtenido hasta ahora, investiguemos las relaciones lógicas entre «benefactor de un amante de todo sirviente de toda mujer», «aquello que está para todo sirviente de alguna mujer en la relación de benefactor de un amante de él», «benefactor de todo amante de algún sirviente de una mujer», «benefactor de todo amante de todo sirviente de toda mujer», etc. Entonces, en primer lugar, tenemos por (95)

$$sw = s(W' +, W'' +, W''' +, \text{etc.}) = sW' +, sW'' +, sW''' +, \text{etc.}$$

$$s^w = s^{W' +, W'' +, W''' +, \text{etc.}} = s^{W'}, s^{W''}, s^{W'''}, \text{etc.}$$

De la última ecuación tenemos por (96)

$$s^w = (sW'), (sW''), (sW'''), \text{etc.}$$

$$\text{Ahora, por (31)} \quad x' +, x'' +, \text{etc.} = x', x'', x''', \text{etc.} +, \text{etc.,}$$

$$\text{o (101.)} \quad \Pi' \prec \Sigma',$$

donde Π' y Σ' significan que debe usarse la adición y la multiplicación con comas. De esto se sigue que

$$(102.) \quad s^w \prec sw.$$

Si w desaparece, esta ecuación falla, porque en ese caso (95) no se sostiene.

De (102) tenemos

$$(103.) \quad (ls)^w \prec lsw.$$

$$\text{Ya que} \quad a = a, b +, \text{etc.,} \quad b = a, b +, \text{etc.}$$

$$\text{tenemos } la = l(a, b +, \text{etc.}) = l(a, b) +, l(\text{etc.}),$$

$$lb = l(a, b +, \text{etc.}) = l(a, b) +, l(\text{etc.})$$

Multiplicando conmutativamente estas dos ecuaciones tenemos

$$(la), (lb) = l(a, b) +, \text{etc.}$$

o

$$(104.) \quad l \Pi' \prec \Pi' l.$$

$$\text{Ahora} \quad (ls)^w = (ls)^{W' +, W'' +, W''' +, \text{etc.}} = \Pi' (ls)^w = \Pi' lsw,$$

$$Ls^w = ls^{w' +, w'' +, w''' +, \text{etc.}} = l \Pi' s^w = l \Pi' s^w.$$

De ahí,

$$(105.) \quad ls^w \prec (ls)^w,$$

o todo amante de un sirviente de todas las mujeres está para toda mujer en la relación de amante de un sirviente de ella.

De (102) tenemos

$$(106.) \quad l^{s \exp w} \prec ls^w.$$

Por (95) y (96) tenemos

$$\begin{aligned} l^s w &= l^s (w' +, w'' +, w''' +, \text{etc.}) \\ &= l^s w' +, l^s w'' +, l^s w''' +, \text{etc.} \\ &= l^{s w'} +, l^{s w''} +, l^{s w'''} +, \text{etc.} \end{aligned}$$

$$\text{Ahora } s^w = s^{w' +, w'' +, w''' +, \text{etc.}} = s^{w'}, s^{w''}, s^{w'''}, \text{etc.}$$

$$\text{Por lo que por (94)} \quad s^w \prec s^{w'} \prec s^{w''}.$$

$$\text{De ahí por (92)} \quad l^{s w'} \prec l^{s \exp w}, l^{s w''} \prec l^{s \exp w}, l^{s w'''} \prec l^{s \exp w}.$$

$$\text{Añadiendo} \quad l^{s w'} +, l^{s w''} +, l^{s w'''} \prec l^{s \exp w};$$

o

$$(107.) \quad l^s w \prec l^{s \exp w}.$$

Esto es, todo amante de todo sirviente de cualquier mujer en particular es un amante de todo sirviente de todas las mujeres.

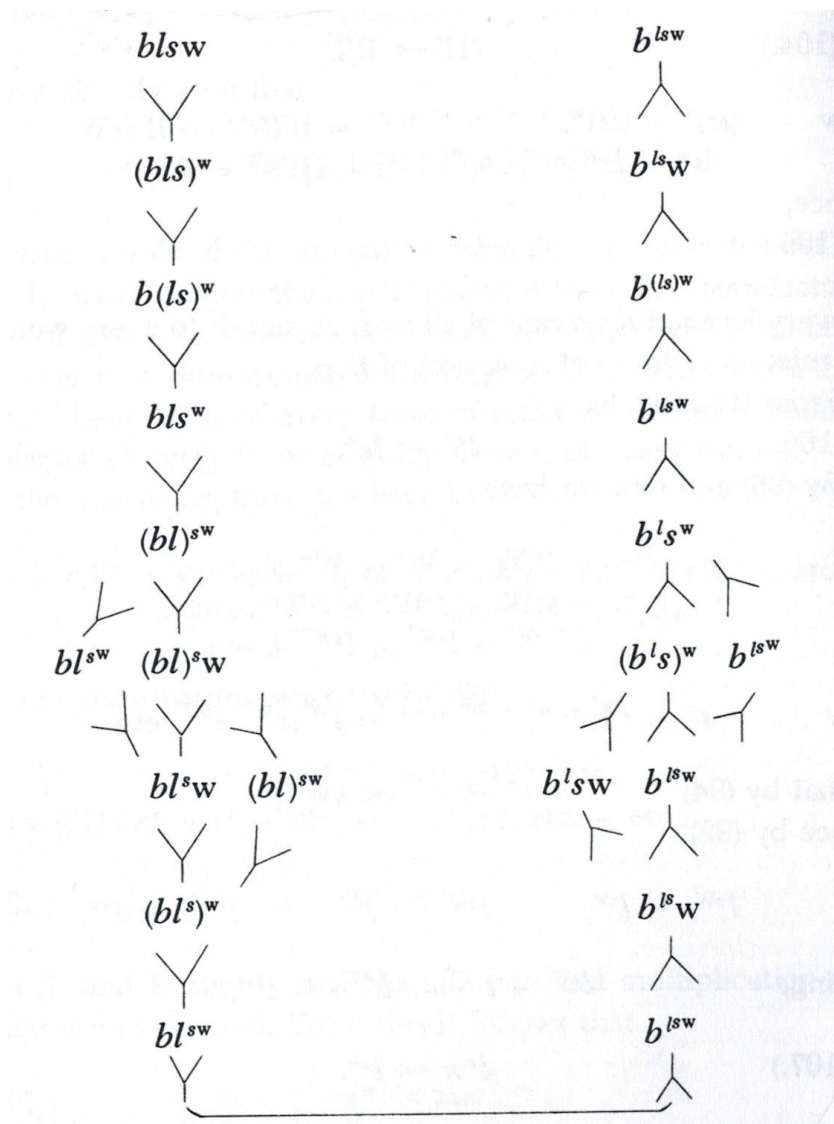
Por (102) tenemos

$$(108.) \quad l^{s w} \prec l^s w.$$

De esto, tenemos

$$l^{s w} \prec l^s w \prec l^{s \exp w} \prec ls^w \prec (ls)^w \prec lsw.$$

Por un razonamiento similar podemos fácilmente establecer las relaciones que se muestran en la siguiente tabla. Debe recordarse que las formulas no se sostienen, por lo general, cuando desaparecen los exponentes.



Me parece que la ventaja de la notación algebraica comienza ya a ser perceptible, aunque sus capacidades están todavía muy imperfectamente desarrolladas. De todas formas, me parece que el caso *prima facie* está suficientemente desarrollado por lo que el lector que aún niegue la utilidad del álgebra debería no ser tan indolente como para intentar escribir en lenguaje ordinario y con precisión lógica los 22 términos anteriores.

Habiéndolo hecho, solo tiene que desordenarlos y, luego, restaurar el orden con la lógica ordinaria, para de esta forma demostrar el álgebra en la medida que está desarrollada hasta ahora.

Relativos infinitesimales

Tenemos por el teorema del binomio, por (49) y por (47),

$$(1 + x)^n = 1 + \sum_p x^{n-p} + x^n.$$

Ahora bien, si suponemos que el número de individuos para los que cualquier cosa es x se reduce a un número cada vez más pequeño, alcanzamos como nuestro límite

$$x^2 = 0,$$

$$\sum_p x^{n-p} = [n] \cdot 1^{n-1}, x^1 = xn,$$

$$(1 + x)^n = 1 + xn.$$

Si, en base a la pérdida de su potencia, llamamos a x un infinitesimal aquí y lo denotamos con i , y si ponemos

$$xn = in = y,$$

nuestra ecuación se convierte en

$$(109.) \quad (1 + i)_i^y = 1 + y.$$

Poniendo $y = 1$, y denotando $(1 + i)_i^1$ por $\mathbb{G}$, tenemos

$$(110.) \quad \mathbb{G} = (1 + i)_i^1 = 1 + 1.$$

De hecho, esto concuerda con el álgebra ordinario mejor de lo que parece; porque 1 es propiamente un infinitesimal, y $\mathbb{G}$ es $\mathbb{G}^1$. Si las potencias mayores de 1 no se perdieron, obtendremos el desarrollo normal de $\mathbb{G}$.

Las potencias positivas de $\mathbb{G}$ son absurdas en nuestra notación. Para las potencias negativas tenemos

$$(111.) \quad \mathbb{G}^{-x} = 1 - x.$$

Hay dos formas de elevar $\mathbb{G}^{-x}$ a la potencia y . En primer lugar, por el teorema del binomio,

$$(1 - x)^y = 1 - [y] \cdot 1^{y-1}, x^1 + [y] \cdot [y-1]/2 \cdot 1^{y-2}, x^2 - \text{etc};$$

y, en segundo lugar, por (111) y (10).

$$G^{-xy} = 1 - xy.$$

De esta forma parece que la suma de todos los términos del desarrollo del binomio de $(1 - x)^y$, después del primero, es $-xy$. La verdad de esto puede mostrarse con un ejemplo. Supongamos que el número de ys es cuatro, Y' , Y'' , Y''' e Y'''' . Utilicemos x' , x'' , x''' y x'''' en un sentido tal que

$$xY' = x', \quad xY'' = x'', \quad xY''' = x''', \quad xY'''' = x''''.$$

Entonces los negativos de los diferentes términos del desarrollo del binomio son,

$$\begin{aligned} [y] \cdot 1^{y-1} \cdot x^1 &= x' + x'' + x''' + x'''' \\ - \frac{[y] \cdot [y-1]}{2} \cdot 1^{y-2} \cdot x^2 &= -x', x'' - x', x''' - x', x'''' - x'', x''' \\ &\quad - x'', x'''' - x''', x'''' \\ + \frac{[y] \cdot [y-1] \cdot [y-2]}{2 \cdot 3} \cdot 1^{y-3} \cdot x^3 &= x', x'', x''' + x', x'', x'''' + x', x''', x'''' \\ &\quad + x'', x''', x'''' \\ x^y &= -x', x'', x''', x'''' \end{aligned}$$

Ahora bien, puesto que está adición es invertible, en el primer término, x' que es x'' , se cuenta dos veces, y lo mismo ocurre con todo otro par. El segundo término sustrae cada uno de estos pares, de forma que solo se cuenta una vez. Pero en el primer término la x' que es x'' que es x''' se cuenta solo tres veces, mientras que en el segundo término se sustrae tres veces; particularmente, en (x', x'') , en (x', x''') y en (x'', x''') . En conjunto, por lo tanto, un terno no se representaría en la suma de ningún modo, si no fuera añadido por el tercer término. Todo el cuartete está incluido cuatro veces en el primer término, es sustraído seis veces por el segundo término y se añade cuatro veces en el tercer término. El cuarto término lo sustrae una vez, y así en la suma de estos términos negativos cada combinación acaece una vez, y solo una; esto es decir que la suma es

$$x' + x'' + x''' + x'''' = x(Y' + Y'' + Y''' + Y''') = xy.$$

Si escribimos $(ax)^3$ por $[x] \cdot [x-1] \cdot [x-2] \cdot 1^{x-3} \cdot a^3$, esto es por todo lo que sea a para cualesquiera tres xs, respetando el orden de las xs; y empleamos los números modernos como exponentes con esta significación generalmente, entonces

$$1 - ax + \frac{1}{2!} (ax)^2 - \frac{1}{3!} (ax)^3 + \text{etc.}$$

es el desarrollo de $(1 - a)^x$ y, consiguientemente, se reduce a $1 - ax$. Esto es,

$$(112.) \quad x = x - \frac{1}{2!} x^2 + \frac{1}{3!} x^3 - \frac{1}{4!} x^4 + \text{etc.}$$

$1 - x$ denota todo excepto x , esto es, todo lo que sea otro que todo x ; de forma que $\bar{\mathcal{G}}$ significa ‘no’. Adoptaremos $\log x$ en un sentido tal que

$$\bar{\mathcal{G}}^{\log x} = x. \quad 14$$

Defino la primera diferencia de una función con la fórmula habitual,

$$(113.) \quad \Delta \phi x = \phi(x + \Delta x) - \phi x,$$

donde Δx es un relativo indefinido que nunca tiene un correlato en común con x .

De forma que

$$(114.) \quad x, (\Delta x) = 0 \quad x + \Delta x' = x +, \Delta x.$$

Diferencias mayores pueden definirse con las fórmulas

$$(115.) \quad \Delta^n x = 0 \text{ if } n > 1. \\ \Delta^2 \phi x = \Delta \Delta x = \phi(x + 2.\Delta x) - 2.\phi(x + \Delta x) + \phi x, \\ \Delta^3 \phi x = \Delta \Delta^2 x = \phi(x + 3.\Delta x) - 3.\phi(x + 2.\Delta x) \\ + 3.\phi(x + \Delta x) - \phi x.$$

$$(116.) \quad \Delta^n \phi x = \phi(x + n.\Delta x) - n.\phi(x + (n-1).\Delta x) \\ + \frac{n.(n-1)}{2}.\phi(x + (n-2).\Delta x) - \text{etc.}$$

Los exponentes que aquí se han añadido a Δ denotan el número de veces que debe repetirse esta operación y, por ello, tienen una significación completamente diferente a la de los coeficientes numéricos en el teorema del binomio. He indicado la diferencia poniendo un punto tras los exponentes significativos de repetición operacional. Así, m^2 puede denotar a la madre de una pareja determinada, $m^{2\cdot}$ a una abuela materna.

Otra circunstancia que debe observarse es que, al adoptar la segunda diferencia de x , si distinguimos los dos incrementos que x recibe sucesivamente como $\Delta'x$ y $\Delta''x$, entonces, por (114)

$$(\Delta'x), (\Delta''x) = 0$$

Si Δx es relativa a un número tan pequeño de individuos que si el número se disminuyera una unidad $\Delta^n \phi x$ desaparecería, entonces, denomino a estas dos diferencias correspondientes *diferenciales*, y las escribo con d en vez de con Δ .

La diferencia de la suma invertible de dos funciones es la suma de sus diferencias; dado que por (113) y (18),

$$(117.) \quad \Delta(\phi x + \psi x) = \phi(x + \Delta x) + \psi(x + \Delta x) - \phi x - \psi x =$$

¹⁴ Que el $\log 0 = -1$ resulta en otra semejanza entre 1 e infinito. [Nota de Peirce].

$$\varphi(x + \Delta x) - \varphi x + \psi(x + \Delta x) - \psi x = \Delta\varphi x + \Delta\psi x.$$

Si a es constante, tenemos

$$\begin{aligned} (118.) \quad \Delta a\varphi x &= a(\varphi x + \Delta\varphi x) - a\varphi x = a\Delta\varphi x - (a\Delta\varphi x), a\varphi x, \\ \Delta^2 a\varphi x &= -\Delta a\varphi x, a\Delta x, \text{ etc.} \\ \Delta(\varphi x)a &= (\Delta\varphi x)a - ((\Delta\varphi x)a), \varphi xa, \\ \Delta^2(\varphi x)a &= -\Delta(\varphi x)a, \text{ etc.} \end{aligned}$$

$$(119.) \quad \Delta(a, \varphi x) = a, \Delta\varphi x.$$

Diferenciamos las potencias sucesivas de x . Tenemos, en primer lugar,

$$\Delta(x^2) = (x + \Delta x)^2 - x^2 = 2.x^{2-\dagger 1}, (\Delta x)^{\dagger 1} + (\Delta x)^2.$$

Aquí, si suponemos Δx relativa a solo un individuo, $(\Delta x)^2$ desaparece y tenemos, con la ayuda de (115),

$$d(x^2) = 2.x^1, dx.$$

Considerando a continuación la siguiente tercera potencia, tenemos, para el primer diferencial,

$$\Delta(x^3) = (x + \Delta x)^3 - x^3 = 3.x^{3-\dagger 1}, (\Delta x)^{\dagger 1} + 3.x^{3-\dagger 2}, (\Delta x)^{\dagger 2} + (\Delta x)^3, d(x^3) = 3.x^2, (dx).$$

Para obtener el segundo diferencial, procedemos como sigue:

$$\begin{aligned} \Delta^2(x^3) &= (x + 2.\Delta x)^3 - 2.(x + \Delta x)^3 + x^3 \\ &= x^3 + 6.x^{3-\dagger 1}, (\Delta x)^{\dagger 1} + 12.x^{3-\dagger 2}, (\Delta x)^{\dagger 2} \\ &\quad + 8.(\Delta x)^3 - 2.x^3 - 6.x^{3-\parallel 1}, (\Delta x)^{\parallel 1} \\ &\quad - 6.x^{3-\S 2}, (\Delta x)^{\S 2} - 2.(\Delta x)^3 + x^3 \\ &= 6.x^{3-\dagger 2}, (\Delta x)^{\dagger 2} + 6.(\Delta x)^3. \end{aligned}$$

Aquí, si Δx es relativo a menos de dos individuos, $\Delta\varphi x$ desaparece. Haciéndolo relativo a dos solamente tenemos, entonces,

$$d^2(x^3) = 6.x^1, (dx)^2.$$

Estos ejemplos son suficientes para mostrar lo que serán los diferenciales de $x^{\parallel}$. Si sustituimos el número $\parallel$ por el término lógico n , tenemos

$$\Delta(x^n) = (x + \Delta x)^n - x^n = [n].x^{n-\dagger 1}, (\Delta x)^{\dagger 1} + \text{etc.}$$

$$d(x^n) = [n].x^{n-1}, (dx).$$

De esta forma encontraremos rápidamente

$$(120.) \quad d^m(x^n) = [n].[n-1].[n-2] \dots [n-m+1].x^{n-\dagger m}, (dx)^{\dagger m}.$$

A continuación, diferenciamos t^x . Tenemos, en primer lugar,

$$\Delta l^x = l^{x+\Delta x} - l^x = l^x, t^{\Delta x} - l^x = l^x, (l^{\Delta x} - 1).$$

El valor de $l^{\Delta x} - 1$ es el siguiente a encontrar.

Tenemos por (111), entonces, pero por (10):

$$\begin{aligned} G^{l^{\Delta x} - 1} &= l^{\Delta x}. \\ l^{\Delta x} - 1 &= \log l^{\Delta x}. \\ \log l^{\Delta x} &= (\log l)\Delta x. \end{aligned}$$

Sustituyendo este valor de $t^{d \exp x} - 1$ en la ecuación que hemos encontrado últimamente por dt^x tenemos

$$(121.) \quad dl^x = l^x, (\log l) dx = l^x, (l - 1) dx = -l^x, (1 - l) dx.$$

Al imprimir este escrito, hago aquí un añadido que suple una omisión en la anterior relación de la involución en este álgebra. Hemos visto que todo término que no desaparece es concebible como divisible lógicamente en términos individuales. Así podemos escribir

$$s = S' + S'' + S''' + \text{etc.}$$

donde no más de un individuo está en cualquiera de estas relaciones con el mismo individuo, aunque no hay nada que evite que la misma persona esté así relacionada con muchos individuos. De esta manera ‘obispo de la sede de’ puede dividirse en primer obispo, segundo obispo, etc., y solo una persona puede ser el enésimo obispo de cualquier sede, aunque la misma persona puede (donde se permite la traslación) ser el enésimo obispo de varias sedes. Ahora bien, denotemos lo inverso de x con Kx ; así, si s es ‘sirviente de’, Ks es ‘señor o señora de’. Entonces tenemos

$$Ks = KS' + KS'' + KS''' + \text{etc.};$$

y aquí cualquiera de los términos del segundo miembro expresa evidentemente una relación tal que la misma persona no puede estar así relacionada con más de uno, aunque más de uno puede estar así relacionado con el mismo. De esta manera, lo inverso de ‘obispo de la sede de ____’ es ‘sede uno cuyo obispo es ____’, lo inverso de ‘primer obispo de ____’ es ‘sede cuyo primer obispo es ____’, etc. Ahora bien, La misma sede no puede ser una sede cuyo enésimo obispo es más de un individuo, aunque varias sedes pueden estar así relacionadas con el mismo individuo. A tales relativos los denomino infinitesimales a causa de la desaparición de sus potencias más altas. Todo

relativo tiene un inverso, y dado que este inverso es concebible como divisible en términos individuales, el relativo mismo es concebible como divisible en términos infinitesimales. Para indicar esto podemos escribir

$$(122.) \text{ Si } x > 0 \quad x = X' +, X'' +, X''' +, \text{ etc.}$$

Puesto que un término que desaparece no es un individuo, ni está compuesto de individuos, entonces tampoco es ni un infinitesimal ni está compuesto de infinitesimales.

$$\text{Al igual que escribimos} \quad l S', l S'', l S''', \text{ etc.} = l^s,$$

podemos escribir

$$(123.) \quad L' s, L'' s, L''' s, \text{ etc.} = l^s.$$

Pero como la primera fórmula está afectada por la circunstancia de que *cero* no es un individuo, de forma que $l^s w$ no desaparece porque ninguna mujer tenga el tipo particular de sirviente denotado por S'' , $l^s w$, que denota meramente a todo amante de cualquier sirviente que haya de cualquier mujer; por lo que la segunda fórmula está afectada de una manera parecida, de forma que la desaparición de L, s no hace que l^s desaparezca, sino que esto debe interpretarse como que denota a todo lo que es un amante, *de cualquier forma que lo sea de alguna manera*, de un sirviente. Entonces, al igual que tenemos por (112) que

$$(124.) \quad l^s = 1 - (1 - l) s;$$

Igualmente tenemos

$$(125.) \quad l^s = 1 - l (1 - s).$$

El Sr. De Morgan denota l^s y l^s por LS' y $L'S$ respectivamente, y ha diseñado en detalle la manera de formar el inverso y el opuesto de estas funciones. Para el inverso de m , escribo w , y para el de n , u .

x	$\mathcal{K}x$	$\mathcal{G}^{-x}$	$\mathcal{K}\mathcal{G}^{-x}$
mn	uu	$(1-m)^n = m(1-n)$	$u(1-u) = (1-u)^u$
$m^n = (1-m)(1-n)$	$u^u = (1-u)^{(1-u)}$	$(1-m)n$	$u(1-u)$
$m^n = (1-m)^{(1-n)}$	$u^u = (1-u)^{(1-u)}$	$m(1-n)$	$(1-u)u$

Denominaré a la operación por la que w se cambia a ${}^l w$, *involución inversa*. Todas las leyes de esta menos una son las mismas que las de la involución ordinaria, y la única excepción es del tipo, se dice, que demuestra la regla. Es aquella que, mientras en la involución ordinaria tenemos

$$({}^l s)^w = {}^l ({}^s w);$$

en la involución inversa, tenemos

$$(126.) \quad {}^l ({}^s w) = ({}^l s)w;$$

esto es, las cosas que no son amantes de nada salvo de las cosas que no son sirvientes de nada salvo de mujeres, son las cosas que son amantes de sirvientes de nada salvo mujeres.

Las otras fórmulas fundamentales de la involución inversa son como sigue:

$$(127.) \quad {}^{l+,s}w = {}^l w, {}^s w,$$

o, las cosas que son amantes o sirvientes de nada salvo mujeres son las cosas que son amantes de nada salvo mujeres y sirvientes de nada salvo mujeres.

$$(128.) \quad {}^l(f, u) = {}^l f, {}^l u,$$

o, las cosas que son amantes de nada salvo violinistas franceses son las cosas que son amantes de nada salvo franceses y amantes de nada salvo violinistas. Esto, quizás, no es totalmente axiomático. Se demuestra como sigue. Por (125) y (30)

$${}^l(f, u) = \mathcal{G}^{-l(1-f, u)} = \mathcal{G}^{-l(1-f) + l(1-u)}$$

Por (125), (13), y (7),

$${}^l f, {}^l u = \mathcal{G}^{-l(1-f)}, \mathcal{G}^{-l(1-u)} = \mathcal{G}^{-l(1-f) + l(1-u)}.$$

Finalmente, el teorema del binomio se sostiene con la involución inversa. Ya que aquellas personas que son amantes de nada salvo franceses y violinistas constan, primero, de aquellas que son amantes de nada salvo franceses; segundo, de aquellas, que de alguna manera, son amantes de nada salvo franceses y, en todas las otras maneras, de nada salvo violinistas, y, finalmente, de aquellas que son amantes solo de violinistas. Esto es,

(129.)

$${}^l(u + f) = {}^l u + \sum_p {}^{l-p} u, {}^p f + {}^l f.$$

Para conservar los coeficientes numéricos, debemos permitir que $\{l\}$ sea el número de personas de las que una persona es amante. Podemos escribir entonces

$${}^l(u + f) = {}^lu + \{l\}{}^l - {}^1u, {}^1f + \frac{l(l-1)}{2}{}^l - {}^2u, {}^2f + \text{etc.}$$

Tenemos, también, la siguiente fórmula que combina las dos involuciones:

$$(130.) \quad {}^l(s^w) = ({}^ls)^w;$$

esto es, las cosas que son amantes de nada salvo de las que son sirvientes de todas las mujeres son las mismas que las cosas que están relacionadas con todas las mujeres como amantes de nada salvo de sus sirvientes.

Merece la pena mencionar, de pasada, una proposición singular derivable de (128). Puesto que por (124) y (125)

$${}_xy = (1 - x)^{(1-y)},$$

y puesto que

$$1 - (u + f) = G^{-(u+f)} = G^{-u}, G^{-f} = (1 - u), (1 - f),$$

(128) nos da,

$$\begin{aligned} (1 - l)^{(1-u), (1-f)} &= (1 - l)^{(1-u)} \\ &\quad + \sum_p (1 - (l - p))^{(1-u)}, (1 - p)^{(1-f)} \\ &\quad + (1 - l)^{(1-f)}. \end{aligned}$$

Esto es, por supuesto, tan verdadero para u y f como para $(1 - u)$ y $(1 - f)$. Haciendo esas sustituciones, y quitando la negación de ambos lados, tenemos, por (124)

$$(131.) \quad l(u, f) = (lu), \Pi'_p((l - p)u +, pf), (lf),$$

O, los amantes de violinistas franceses son aquellas personas que, en referencia a todo modo de amar lo que sea, o bien de esa manera aman a algunos violinistas, o bien de alguna otra manera aman a algunos franceses. Esta proposición lógica no es, ciertamente, auto-evidente, y su importancia práctica es considerable. De una manera parecida, de (12) obtenemos

$$(132.) \quad (e, c)f = \Pi'_p(e(f - p) +, cp),$$

esto es, decir que una persona es tanto un emperador como un conquistador del mismo francés es lo mismo que decir que, tomando cualquier clase de franceses que sea, esta

persona es o bien un emperador de alguno de esta clase, o bien conquistador de alguno entre los franceses restantes.

Las propiedades del cero y de la unidad, con referencia a la involución inversa, se derivan facilmente a partir de (125). Las doy aquí en comparación con las fórmulas correspondientes para la involución directa.

$$(133.) \quad {}^0x = 1 \quad \quad \quad x^0 = 1.$$

$$(134.) \quad {}^q0 = 0 \quad \quad \quad 0^r = 0,$$

donde q es el inverso de un relativo ilimitado, y r es mayor que cero.

$$(135.) \quad {}^1x = x \quad \quad \quad x^1 = x.$$

$$(136.) \quad {}^y1 = y \quad \quad \quad 1^z = z,$$

donde y es infinitesimal y z es individual. De otra manera, ambos desaparecen.

$$(137.) \quad {}^1s = 0 \quad \quad \quad p^1 = 0,$$

donde s es menor que la unidad y p es un relativo limitado.

$$(138.) \quad {}^x1 = 1 \quad \quad \quad 1^x = 1.$$

En otros respectos las fórmulas para las dos involuciones no son tan análogas como pudiera suponerse; y esto se debe a la semejanza entre términos individuales e infinitesimales. Tenemos, es verdad, que si X es un infinitesimal y X' un término individual,

(139.) , (140.) y (141.)

$$\begin{array}{ll} X,(y,z) = X,y,X,z & \text{like } (y,z)X' = yX',zX'; \\ X,,y_0 = X,,X,y & \quad \quad \quad \text{“ } X',y_0 = X',yX'; \\ \{X,\} = 1 & \quad \quad \quad \text{“ } [X'] = 1. \end{array}$$

También tenemos

$$(142.) \quad X,y \prec^x y.$$

Pero *no* tenemos ${}^x y = X,y$ y, consiguientemente, *no* tenemos ${}^s w \prec sw$, porque esto falla si hay algo que no sea un sirviente de alguna manera, mientras que la fórmula correspondiente $s^w \prec sw$ solo falla si no hay nada que sea una mujer. Ahora bien, es más frecuente el caso de que haya algo que no es x . Tenemos, con la involución inversa como con la directa, las fórmulas

$$(143.) \quad \text{Si } x \prec y \quad \quad \quad {}^y z \prec {}^x z;$$

$$(144.) \quad \text{Si } x \prec y \quad {}^z x \prec {}^z y.$$

La primera de estas nos da

$$(145.) \quad {}^{ls}w \prec (l \exp s)w,$$

O, lo que sea amante de nada salvo lo que sea sirviente de nada salvo de mujeres está ante nada salvo una mujer en la relación de amante de todo sirviente de ella. Las siguientes fórmulas pueden demostrarse sin dificultad.

$$(146.) \quad {}^{ls}w \prec {}^{ls}w,$$

o, todo amante de alguien que no es sirviente de nada salvo de una mujer no está ante nada salvo las mujeres en la relación de amante de nada salvo de un sirviente de ellas.

$$(147.) \quad {}^{lsw} \prec {}^{l}(sw),$$

o, todo lo que esté ante una mujer en la relación de amante de nada salvo de un sirviente de ella no es un amante de nada salvo de sirvientes de mujeres.

Las diferenciales de las funciones que implican a la involución inversa son

$$(148.) \quad d^n x = \{n\}^{n-1} x, dx.$$

$$(149.) \quad d^x l = {}^x l, dx \log. x.$$

En relación a las potencias de $\mathbb{G}$, tenemos

$$(150.)$$

$${}^x \mathbb{G} = \mathbb{G}^x.$$

Los exponentes con un punto pueden también ponerse en cualquiera de los dos lados de las letras a las que afectan.

La mayoría de las funciones de x en este álgebra puede ponerse en la forma

$$\varphi x = \sum_p \sum_q {}_p A_q {}^p x {}_q B_q.$$

Los teoremas de Taylor y McLaurin se sostienen bien, para todas estas funciones, en la forma,

$$(151.)$$

$$\begin{array}{|c|} \hline y \\ \hline dx \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline 0 \\ \hline y \\ \hline \end{array} \sum_0^{\infty} \frac{1}{p!} \cdot d^p = 1.$$

El símbolo $\boxed{\frac{a}{b}}$ se utiliza para denotar que a debe ser sustituido por b en lo que sigue. En aras de la perspicuidad, escribiré el teorema de McLaurin completo.

$$\varphi x = \boxed{\frac{x}{dx}} \boxed{\frac{0}{x}} \left(\frac{1}{0!} \mathcal{A}^0 + \frac{1}{1!} \mathcal{A}^1 + \frac{1}{2!} \mathcal{A}^2 + \frac{1}{3!} \mathcal{A}^3 + \text{etc.} \right) \varphi x.$$

La demostración de estos teoremas es muy simple. El diferencial $(p + q)^n$ de ${}^p x^q$ es el único que no desaparece cuando x desaparece. Este diferencial, entonces, deviene $[p + q]! \cdot (dx)^q$. Es claro, en consecuencia, que los teoremas se sostienen cuando los coeficientes ${}^p A^q$ y ${}^p B^q$ son 1. Pero el desarrollo general, por el teorema de McLaurin, de $a\varphi x$ o $(\varphi x)a$ está en una forma (112) que reduce a la identidad. Es muy probable que la aplicación de estos teoremas no esté confinada a los límites a los que la he restringido. Podemos escribir estos teoremas en la forma

(152.)

$$\boxed{\frac{y}{dx}} \boxed{\frac{0}{y}} \mathcal{G}' = 1,$$

siempre que asumamos que, cuando el primer diferencial es positivo,

$$\mathcal{G}' = \frac{1}{0!} \mathcal{A}^0 + \frac{1}{1!} \mathcal{A}^1 + \frac{1}{2!} \mathcal{A}^2 + \text{etc.},$$

pero que, cuando el primer diferencial es negativo, deviene por (111),

$$\mathcal{G}' = 1 + \mathcal{A}.$$

Como otra ilustración del uso que puede hacerse en lógica de la diferenciación, consideremos el siguiente problema. En una institución determinada todos los oficiales (x) y, también, todos sus amigos comunes (f) son personas privilegiadas (y). ¿Cómo se reducirá a un mínimo la clase de las personas privilegiadas? Aquí tenemos

$$y = x + f^x,$$

$$dy = dx + df^x = dx - f^x, (1 - f)dx.$$

Cuando y está a un mínimo no disminuye ni por una disminución ni por un aumento de x. Esto es,

$$[dy] > - 0,$$

y, cuando [x] disminuye en uno,

$$[dy] < - 0.$$

Cuando x es un mínimo, entonces

$$\begin{aligned} [dx - f^x, (1-f)dx] &> 0 & [dx - f^{x-1}, (1-f)dx] &< 0 \\ [dx] - [f^x, (1-f)dx] &> 0 & [dx] - [f^{x-1}, (1-f)dx] &< 0. \end{aligned}$$

Ahora, tenemos por (30)

$$f^x, (1-f)dx = f^x - (0;0), (1-f)dx.$$

Por lo que

$$\begin{aligned} [f^x] &< [dx] + [0;0], [(1-f)dx] \\ [f^{x-1}] &> [dx] + [0;0], [(1-f)dx]. \end{aligned}$$

Pero $[0;0]$ se encuentra entre los límites 0 y 1, y

$$(153.) \quad [dx] = 1.$$

Tenemos, en consecuencia,

$$[f^x] < 1 + [(1-f)1] \quad [f^{x-1}] > -1.$$

Esta es la solución general del problema. En el caso de que una persona que pueda ser un oficial en la insitución sea amigo de una segunda persona tal es independiente - e igualmente probable - de que sea amigo de cualquier tercera persona tal, y si tomamos p , o la clase completa de tales personas, como nuestro universo, tenemos,

$$\begin{aligned} p &= 1; \\ [f^x,] &= \frac{[x]}{[p]} = \left(\frac{[f]}{[p]}\right)^{[x]}, \\ [(1-f)dx] &= [1-f] \cdot [dx] = ([p] - [f]) \cdot [dx], \\ [f^x, (1-f)dx] &= \left(\frac{[f]}{[p]}\right)^{[x]} \cdot ([p] - [f]) \cdot [dx]. \end{aligned}$$

Sustituyendo estos valores en nuestras ecuaciones marcadas (A) obtenemos, por medio de una pequeña reducción,

$$\begin{aligned} [x] &> \frac{\log ([p] - [f])}{\log [p] - \log [f]}, \\ [x] &< \frac{\log ([p] - [f])}{\log [p] - \log [f]} + 1. \end{aligned}$$

Se alcanzaría la misma solución siguiendo un camino totalmente diferente, aplicando el cálculo de las diferencias finitas del modo habitual.

Los relativos elementales

Por un relativo elemental me refiero a uno que significa una relación que existe únicamente entre pares mutuamente excluyentes (o, en el caso de un término

conjugativo, tripletes, cuartetos, etc.) de individuos o, si no, entre pares de clases de una forma tal que todo individuo de una clase del par está en esa relación con todo individuo de la otra. Si suponemos que en toda escuela, todo profesor enseña a todo alumno (una suposición que haré, tácitamente, siempre que hable de una escuela en este escrito), entonces *alumno* es un relativo elemental. Es claro, a partir del hecho de que si una relación está lo suficientemente determinada únicamente puede existir entre dos individuos, que todo relativo puede concebirse como como una suma lógica de relativos elementales. De esta forma, un *padre* es o bien padre en los diez primeros años de la era cristiana, o bien padre en los diez segundos años, o bien en los diez terceros; o bien, antes de esta era, en los diez segundos años, o en los diez terceros años, etc. Cualquiera de estas especies de padre es padre por primera vez o padre por segunda vez, etc. Ahora bien, un relativo como «padre, por tercera vez en la segunda década de nuestra era, de _____» significa una relación que únicamente puede existir entre pares de individuos mutuamente excluyentes y es, en consecuencia, un relativo elemental; y así el relativo *padre* puede resolverse en una suma lógica de relativos elementales.

La concepción de un relativo como resoluble en relativos elementales tiene el mismo tipo de utilidad que la concepción de un relativo como resoluble en infinitesimales o de cualquier término como resoluble en individuos.

Los relativos elementales simples están interconectados en sistemas de cuatro. Puesto que si se toma A:B para denotar el relativo elemental que multiplicado en B da A, entonces, existiendo esta relación como elemental, tenemos los cuatro relativos elementales

$$A:A \quad A:B \quad B:A \quad B:B$$

Un ejemplo de un sistema tal es –colega: profesor: alumno: compañero de escuela. De la misma forma, obviamente, los conjugativos elementales están en sistemas cuyo número de miembros es $(n + 1)^{n + 1}$ donde n es el número de correlatos que tiene el conjugativo. Por el momento, consideraré únicamente a los relativos simples.

La existencia de una relación elemental supone la existencia de pares de clases mutuamente excluyentes. Los primeros miembros de esos pares tienen algo en común que los discrimina de los segundos miembros y pueden, en consecuencia, unirse en una clase, mientras que los segundos miembros se unen en una segunda clase. De esta

forma, *alumno* no es relativo elemental a menos que haya una distinción absoluta entre aquellos que enseñan y aquellos que son enseñados. Tenemos, en consecuencia, dos términos generales absolutos que son mutuamente excluyentes, «cuerpo de profesores de una escuela» y «cuerpo de alumnos de una escuela». Estos términos son generales porque queda indeterminado a qué escuela se refiere. Llamaré a los dos términos absolutos, mutuamente excluyentes, que supone cualquier sistema de relativos elementales, los *extremos universales* de ese sistema. Hay determinados caracteres respecto a cuya posesión ambos miembros de cualquiera de los pares entre los que haya una determinada relación elemental concuerdan. De esta forma, el cuerpo de profesores y el cuerpo de alumnos de cualquier escuela concuerdan respecto al país y a la época en que viven, etc. A estos caracteres los denomino *caracteres escalares* para el sistema de relativos elementales con los que están así relacionados; y a los relativos escritos con una coma, que significa la posesión de esos caracteres, los denomino *escalares* para el sistema. De esta forma, suponiendo que los profesores franceses solo tienen alumnos franceses y *viceversa*, el relativo

f,

será escalar para el sistema «colega: profesor: alumno: compañero de escuela». Si *r* es un relativo elemental para el que *s* es un escalar,

$$(154.) \quad s, r = rs,.$$

Denoten *c, t, p, s* los cuatro relativos elementales de cualquier sistema; tales como colega, profesor, alumno, compañero de escuela; y sean *a, b, c, d*, escalares para este sistema. Entonces, a cualquier relativo que pueda expresarse en la forma

$$a, c + b, t + c, p + d, s$$

lo denominaré un *quaternio lógico*. Sean denotados tales relativos por *q, q', q''*, etc. Es claro, entonces, a partir de lo que ha sido dicho, que cualquier relativo puede considerarse resoluble en una suma lógica de cuaternios lógicos.

La multiplicación de relativos elementales del mismo sistema sigue una ley muy simple. Porque, si *u* y *v* son los dos extremos universales del sistema *c, t, p, s*, podemos escribir

$$c = u:u \quad t = u:v \quad p = v:u \quad s = v:v,$$

y, entonces, si *w* y *w'* son cada uno o bien *u* o bien *v*, tenemos

(155.) $(w':w) \mathcal{G}^{-w} = 0.$

Esto nos da la siguiente tabla de multiplicaciones, donde el multiplicador entra en el lateral de la tabla y el multiplicando en la parte superior, y el producto se encuentra en el medio:

(156.)

	<i>c</i>	<i>t</i>	<i>p</i>	<i>s</i>
<i>c</i>	<i>c</i>	<i>t</i>	0	0
<i>t</i>	0	0	<i>c</i>	<i>t</i>
<i>p</i>	<i>p</i>	<i>s</i>	0	0
<i>s</i>	0	0	<i>p</i>	<i>s</i>

Las dieciséis proposiciones que expresa esta tabla son, en lenguaje ordinario, como sigue:

Los colegas de los colegas de cualquier persona son los colegas de esa persona;

Los colegas de los profesores de cualquier persona son los profesores de esa persona;

No hay colegas de los alumnos de cualquier persona;

No hay colegas de los compañeros de escuela de cualquier persona;

No hay profesores de los colegas de cualquier persona;

Los profesores de los alumnos de cualquier persona son los colegas de esa persona;

Los profesores de los compañeros de escuela de cualquier persona son los profesores de esa persona;

Los alumnos de los colegas de cualquier persona son los alumnos de esa persona;

Los alumnos de los profesores de cualquier persona son los compañeros de escuela de esa persona;

No hay alumnos de los alumnos de cualquier persona;

No hay alumnos de los compañeros de escuela de cualquier persona;

No hay compañeros de escuela de los colegas de cualquier persona;

No hay compañeros de escuela de los profesores de cualquier persona;

Los compañeros de escuela de los alumnos de cualquier persona son los alumnos de esa persona;

Los compañeros de escuela de los compañeros de escuela de cualquier persona son los compañeros de escuela de esa persona.

Esta simplicidad y esta regularidad en la multiplicación de relativos elementales debe, claramente, destacar la utilidad de la concepción de un relativo como resoluble en una suma de cuaternios lógicos.

A veces puede ser conveniente considerar los relativos cada uno de los cuales es de la forma

$$a, i + b, j + c, k + d, l + \text{etc.}$$

donde $a, b, c, d, \text{etc.}$ son escalares, e $i, j, k, l, \text{etc.}$ son cada uno de la forma

$$m, u + n, v + o, w + \text{etc.}$$

donde $m, n, o, \text{etc.}$ son escalares, y $u, v, w, \text{etc.}$ son relativos elementales. En todos estos casos (155) dará una tabla de multiplicación para $i, j, k, l, \text{etc.}$ Por ejemplo, si tenemos tres clases de individuos, u_1, u_2, u_3 , que están relacionados unos con otros en pares, podemos poner

$$\begin{array}{lll} u_1: u_1 = i & u_1: u_2 = j & u_1: u_3 = k \\ u_2: u_1 = l & u_2: u_2 = m & u_2: u_3 = n \\ u_3: u_1 = o & u_3: u_2 = p & u_3: u_3 = q \end{array}$$

y por (155) obtenemos la tabla de multiplicación

	<i>i</i>	<i>j</i>	<i>k</i>	<i>l</i>	<i>m</i>	<i>n</i>	<i>o</i>	<i>p</i>	<i>q</i>
<i>i</i>	<i>i</i>	<i>j</i>	<i>k</i>	0	0	0	0	0	0
<i>j</i>	0	0	0	<i>i</i>	<i>j</i>	<i>k</i>	0	0	0
<i>k</i>	0	0	0	0	0	0	<i>i</i>	<i>j</i>	<i>k</i>
<i>l</i>	<i>l</i>	<i>m</i>	<i>n</i>	0	0	0	0	0	0
<i>m</i>	0	0	0	<i>l</i>	<i>m</i>	<i>n</i>	0	0	0
<i>n</i>	0	0	0	0	0	0	<i>l</i>	<i>m</i>	<i>n</i>
<i>o</i>	<i>o</i>	<i>p</i>	<i>q</i>	0	0	0	0	0	0
<i>p</i>	0	0	0	<i>o</i>	<i>p</i>	<i>q</i>	0	0	0
<i>q</i>	0	0	0	0	0	0	<i>o</i>	<i>p</i>	<i>q</i>

Si tomamos

$$i = u_1; u_2 + u_2; u_3 + u_3; u_4,$$

$$j = u_1; u_3 + u_2; u_4,$$

$$k = u_1; u_4,$$

tenemos

	<i>i</i>	<i>j</i>	<i>k</i>
<i>i</i>	<i>j</i>	<i>k</i>	0
<i>j</i>	<i>k</i>	0	0
<i>k</i>	0	0	0

Si tomamos

$$i = u_1; u_2 + u_2; u_3 + u_3; u_4 + u_5; u_6 + u_7; u_8,$$

$$j = u_1; u_3 + u_2; u_4,$$

$$k = u_1; u_4,$$

$$l = u_6; u_8 + \mathbf{a}.u_5; u_7 + \mathbf{b}.u_1; u_9 + u_9; u_4 + \mathbf{c}.u_5; u_6,$$

$$m = u_5; u_8,$$

tenemos

	<i>i</i>	<i>j</i>	<i>k</i>	<i>l</i>	<i>m</i>
<i>i</i>	<i>j</i>	<i>k</i>	0	<i>m</i>	0
<i>j</i>	<i>k</i>	0	0	0	0
<i>k</i>	0	0	0	0	0
<i>l</i>	<i>a.m</i>	0	0	<i>b.k + c.m</i>	0
<i>m</i>	0	0	0	0	0

Estas tablas de multiplicación han sido copiadas de la monografía del Profesor Peirce sobre Álgebras Asociativas Lineales¹⁵. Puedo afirmar, sobre una evidencia inductiva razonable, que todas estas álgebras pueden interpretarse sobre los principios de la presente notación de la misma forma que las que se han dado arriba. En otras palabras, todas estas algebras son complicaciones y modificaciones del álgebra de (156). Es muy probable que esto sea verdadero de cualesquiera álgebras. El Profesor Peirce ha mostrado que el álgebra de (156), que tiene un carácter tan fundamental en referencia al álgebra puro y a nuestra notación lógica, es el álgebra de los cuaternios de Hamilton. De hecho, si ponemos

$$1 = i + l.$$

$$i' = \sqrt{1 - b^2} \mathbf{J}i - (\sqrt{1 - a^2}b + ab \mathbf{J})j$$

$$+ (\sqrt{1 - a^2}b - ab \mathbf{J})k - \sqrt{1 - b^2} \mathbf{J}l.$$

$$j' = -b\sqrt{1 - c^2} \mathbf{J}i + (ac - \sqrt{1 - a^2}\sqrt{1 - b^2}\sqrt{1 - c^2}$$

$$- (\sqrt{1 - a^2}c + a\sqrt{1 - b^2}\sqrt{1 - c^2}) \mathbf{J})j$$

$$- (ac - \sqrt{1 - a^2}\sqrt{1 - b^2}\sqrt{1 - c^2} + (\sqrt{1 - a^2}c$$

$$+ a\sqrt{1 - b^2}\sqrt{1 - c^2}) \mathbf{J})k + b\sqrt{1 - c^2} \mathbf{J}l.$$

$$k' = bc \mathbf{J}i + (\sqrt{1 - a^2}\sqrt{1 - b^2}c + a\sqrt{1 - c^2}$$

$$+ (a\sqrt{1 - b^2}c - \sqrt{1 - a^2}\sqrt{1 - c^2}) \mathbf{J})j$$

$$- (\sqrt{1 - a^2}\sqrt{1 - b^2}c + a\sqrt{1 - c^2} - (a\sqrt{1 - b^2}c$$

$$- \sqrt{1 - a^2}\sqrt{1 - c^2}) \mathbf{J})k - bc \mathbf{J}l.$$

donde a, b, c , son escalares, entonces $1, i', j', k'$ son los cuatro factores fundamentales de los cuaternios, cuya tabla de multiplicación es como sigue:

¹⁵ *Linear Associative Algebra*. Benjamin Peirce. 4to, litografiado. Washington. 1870.

	1	i'	j'	k'
1	1	i'	j'	k'
i'	i'	-1	k'	$-j'$
j'	j'	$-k'$	-1	i'
k'	k'	j'	$-i'$	-1

No forma parte de mi propósito actual considerar la relación con la filosofía del espacio de este caso, en lógica pura, del álgebra que expresa todas las propiedades del espacio; pero es apropiado señalar que un método de trabajo con esta notación sería el de transformar las expresiones lógicas dadas en la forma de los cuaternios de Hamilton (tras representarlos como separados en relativos elementales) y, entonces, hacer uso del razonamiento geométrico. Las siguientes fórmulas ayudarán en este proceso. Tomemos el relativo cuaternio

$$q = xi + yj + zk + wl,$$

donde x, y, z y w son escalares. Las condiciones de que q sea un *escalar*, un *vector*, etc. (esto es, denotadas por una expresión algebraica que denote un escalar, un vector, etc., en geometría), son

(157.) Forma de un escalar: $x(i + l)$.

(158.) Forma de un vector: $xi + ij + zk - xl$.

(159.) Forma de un versor:

$$\frac{x}{y}\left(\frac{x}{z} - 1\right)^{-\frac{1}{2}}i + \frac{y}{x}\left(\frac{x}{z} - 1\right)^{-\frac{1}{2}}j + \frac{z}{y}\left(\frac{x}{z} - 1\right)^{-\frac{1}{2}}k + \frac{y}{z}\left(\frac{x}{z} - 1\right)^{-\frac{1}{2}}l.$$

(160.) Forma de cero:

$$xi + xyj + \frac{z}{y}k + zl.$$

(161.) Escalar de q :

$$Sq = \frac{1}{2}(x + w)(i + l).$$

(162.) Vector de q :

$$Vq = \frac{1}{2}(x - w)i + yj + zk + \frac{1}{2}(w - x)l.$$

(163.) Tensor de q :

$$Tq = \sqrt{xw - yz}(i + l).$$

(164.) Conjugado de q :

$$Kq = wi - yj - zk + xl.$$

Para mostrar las interpretaciones lógicas de estas funciones, consideremos un universo de monógamos casados, en que marido y esposa tienen, siempre, en común el país, la raza, la fortuna y la virtud. Denoten i «hombre que es _____», j «marido de _____», k «esposa de _____», y l «mujer que es _____»; x «negro que es _____», y «persona rica que es _____», z «americano que es _____», y w «ladrón que es _____». Entonces, siendo q definido como se indicó más arriba, los qs de cualquier clase consistirán de tantos individuos de esa clase como sean hombres-negros o mujeres-ladronas junto con todas las personas que son maridos ricos o esposas americanas de las personas de esta clase. Entonces, $2Sq$ denota, por (160), a todos los negros y, además, a todos los ladrones, mientras que Sq es el término indefinido que denota a la mitad de los negros y a la mitad de los ladrones. Ahora bien, aquellas personas que son auto- qs de cualquier clase (esto es, los qs de sí mismos en esa clase) son $xi + wl$; añadamos a estos sus conyugues y tenemos $2Sq$. En general, denominemos $(j + k)$ a «el correspondiente de _____». Entonces, el escalar doble de cualquier relativo cuaternio, q , es ese relativo que denota todos los auto- qs y, además, «todos los correspondientes de auto- qs de _____». $(Tq)^2$ denota todas las personas que pertenecen a pares de auto- qs correspondientes *menos* todas las personas que pertenecen a pares de qs correspondientes uno de otro.

Como un ejemplo muy simple de la aplicación de la geometría a la lógica de relativos, podemos tomar el siguiente. El axioma de Euclides que concierne a las paralelas se corresponde con el principio del cuaternio, de que el cuadrado de un vector es un escalar. De esto se sigue, puesto que por (157) $yj + zk$ es un vector, que los maridos ricos y las esposas americanas de los esposos ricos y las esposas americanas de cualquier clase de personas están totalmente contenidos en esa clase, y pueden ser descritos sin ninguna discriminación de sexo. De hecho, por (156), los maridos ricos y las esposas americanas de los maridos ricos y las esposas americanas de cualquier clase de personas, son los americanos ricos de esa clase.

Lobatchewsky ha mostrado que el axioma de Euclides concerniente a las paralelas puede suponerse que sea falso sin invalidar las proposiciones de la trigonometría esférica. Entonces, para que las correspondientes proposiciones se sostengan bien en lógica, no necesitamos recurrir a relativos elementales, sino que únicamente necesitamos tomar S y V en sentidos tales que todo relativo de la clase que se considera sea capaz de ser visto como la suma de un escalar y un vector, y que un escalar multiplicado por un escalar sea un escalar, mientras que el producto de un escalar y un vector es un vector. Ahora bien, para cumplir con estas condiciones únicamente tenemos que tomar Sq como «auto- q de ____» y Vq como «alio- q de ____» (q de otro, siendo ese otro _____), y q puede ser cualquier relativo. Puesto que «amante», por ejemplo, es divisible en auto-amante y alio-amante; un auto-amante de un auto-benefactor de personas de cualquier clase está contenido en esa clase y, ni el auto-amante de un alio-benefactor de cualesquiera personas ni el alio-amante del auto-benefactor de cualesquiera personas están entre esas personas. Supongamos, entonces, que tomamos la fórmula de la trigonometría esférica,

$$\cos a = \cos b \cos c + \cos A \sin b \sin c.$$

En forma de cuaternio, esto es,

$$(165.) \quad S(pq) = (Sp)(Sq) + S((Vp)(Vq)).$$

Sea p «amante», y q «benefactor». Entonces esto se lee, los amantes de sus propios benefactores consisten en los auto-amantes de los auto-benefactores junto con los alio-amantes de los alio-benefactores de sí mismos. Por lo que la fórmula,

$$\sin b \cos pb' = -\sin a \cos c \cos pa' - \sin c \cos a \cos pc' + \sin a \sin c \sin b \cos pb,$$

donde A', B', C' , son los polos positivos de los lados a, b, c , es en cuaternios

$$(166.) \quad V(pq) = (Vp)(Sq) + (Sp)(Vq) + V((Vp)(Vq)),$$

y la interpretación lógica de esto es: los amantes de los benefactores de otros consisten en los alio-amantes de los auto-benefactores, junto con los auto-amantes de los alio-benefactores, junto con los alio-amantes de los alio-benefactores de otros. Es un poco sorprendente que, al igual que en la geometría no-euclídea o imaginaria de Lobatchewsky el axioma concerniente a las paralelas se sostiene bien solo con los

elementos últimos del espacio, su equivalente lógico se sostenga bien solo para los relativos elementales.

De lo que se ha dicho se sigue que para toda proposición de la geometría hay una proposición en la lógica pura de relativos. Sin embargo, el método para operar con el álgebra lógico que se funda en este principio parece tener poca utilidad. Por otro lado, este hecho promete arrojar alguna luz sobre la filosofía del espacio¹⁶.

PROPIEDADES DE LOS TÉRMINOS RELATIVOS PARTICULARES

Clasificación de los relativos simples

Cualquier propiedad particular que pueda tener cualquier clase de términos relativos puede ser enunciada en la forma de una ecuación, y nos proporciona otra premisa para la solución de los problemas en los que aparezcan tales términos. Una buena clasificación de los relativos es, en consecuencia, una gran ayuda en el uso de

¹⁶ Las investigaciones de Lobatchewsky no proporcionan ninguna solución para la cuestión que concierne a la aprioridad del espacio. Porque, aunque ha mostrado que es concebible que el espacio tenga propiedades tales como que dos líneas estén en un plano e inclinadas una respecto a la otra sin llegar a juntarse nunca, extiéndanse lo que se extiendan, no obstante, no ha mostrado que los hechos implicados en esa suposición son inconsistentes con la suposición de que el espacio conserva su naturaleza actual y las propiedades únicamente de las cosas que cambian en él. Por ejemplo, en la geometría de Lobatchewsky una estrella a una distancia infinita tiene un paralaje finito. Pero supongamos que el espacio tiene sus propiedades actuales, y supongamos que hubiera un punto en el universo hacia el cual cualquier cosa que se moviera se expandiría, y alejándose de él se contraería. Entonces, esta expansión y contracción pudiera obedecer una ley tal que una estrella, cuyo paralaje fuera finito, estaría a una distancia infinita medida por el número de veces que se deba emplear un metro para medir esa distancia. No he visto las investigaciones de Beltrami, pero entiendo que muestran que algo así es posible. De esta forma, puede ser que, hagas las suposiciones que hagas respecto a los fenómenos, estos puedan reconciliarse con nuestra geometría actual o mostrar que comprometen contradicciones implícitas. Si esto es así - y que lo sea o no es una cuestión completamente abierta -, entonces los principios de la geometría son necesarios, y no resultan de las peculiaridades de cualquier objeto conocido, sino de las condiciones del conocimiento en general. Al hablar de las condiciones del conocimiento, en general, no tengo presente ninguna concepción psicológica, sino únicamente una distinción entre principios de los que, si los hechos presentasen un dificultad suficiente, pudiera siempre dudarse lógicamente, y principios que puede mostrarse que no pueden estar abiertos a la duda a partir de ninguna dificultad en mis hechos, en la medida que continúen siendo supuestos en todo el procedimiento lógico.

Pero, abandonando este punto, las conclusiones de Lobatchewsky no echan abajo positivamente la hipótesis de que el espacio es *a priori*. Porque él solo ha mostrado que una determinada proposición, *que no se cree habitualmente que sea axiomática*, es concebiblemente falsa. El que la gente pueda tener dudas o estar equivocada acerca de la verdad *a priori*, no destruye toda la importante distinción práctica entre las dos clases de necesidad. Puede decirse que si la geometría de Lobatchewsky es la verdadera, entonces el espacio implica una constante arbitraria, cuyo valor no puede darse *a priori*. Esto puede ser; pero puede ser que las propiedades generales del espacio, con el hecho general de que hay una constante tal, sean *a priori*, mientras que el valor de la constante está solo determinado empíricamente.

Me parece claro que ninguna especulación geométrica resolverá la filosofía del espacio, que es una cuestión lógica. Si el espacio es *a priori*, creo que está, de alguna manera recóndita, implicado en la lógica de relativos. [Nota de Peirce]. Lobatchewsky, Nikolai. *Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien*. Berlin: G. Fincke, 1840.

esta notación, al igual que la notación es, también, una ayuda para formar tal clasificación.

La primera división de los relativos es, por supuesto, en relativos simples y conjugativos. Las divisiones más fundamentales de los relativos simples se basan en la distinción entre los relativos elementales de la forma (A:A) y los de la forma (A:B). Estas divisiones lo son respecto al grado de oposición entre el relativo y el correlativo.

a. Los relativos simples son, de esta manera, divisibles primariamente en los relativos todos cuyos elementos son de la forma (A:A) y los que contienen elementos de la forma (A:B). Los primeros expresan un mero acuerdo entre las cosas, los segundos ponen una cosa contra otra y, en ese sentido, expresan una oposición (ἀντικείμενοι); denominaré, en consecuencia, *concurrentes* a los primeros y *oponentes* a los segundos. Aparece la distinción, en esta notación, como aquella entre los relativos con una coma, tales como (w,), y los relativos sin una coma, tales como (w); y esto es, evidentemente, de la mayor importancia. El carácter que se significa con un relativo concurrente es un carácter absoluto, y el que se significa con un relativo oponente es un carácter relativo, esto es, uno que no puede ser prescindido de la referencia a un correlato.

b. La segunda división de los relativos simples con referencia al grado de oposición entre el relativo y el correlativo, es en aquellos cuyos elementos pueden ser dispuestos en grupos de cuadrados, cada cuadrado como este,

A:A	A:B	A:C
B:A	B:B	B:C
C:A	C:B	C:C

y aquellos cuyos elementos no pueden disponerse así. A los primeros (ejemplos de los cuales son «igual a _____», «parecido a _____») pueden denominárseles *copulativos* y a los segundos *no-copulativos*. Un copulativo multiplicado por sí mismo da él mismo. El profesor Peirce llama a las letras que tienen esta propiedad, *idempotens*. Esta distinción es, por supuesto, muy importante en el álgebra puro. Todos los concurrentes son copulativos.

c. Tercera, los relativos son divisibles en aquellos que para todo elemento de la forma (A:B) tienen otro de la forma (B:A), y aquellos a los que falta esta simetría. Esta

es la vieja división entre *equiparantes* y *desequiparantes*¹⁷ o, en el lenguaje de De Morgan, relativos convertibles e inconvertibles. Los equiparantes son sus propios correlativos. Todos los copulativos son equiparantes¹⁸.

d. Cuarta, los relativos simples son divisibles en aquellos que contienen elementos de la forma (A:A) y aquellos que no. Los primeros expresan relaciones como las que una cosa puede tener consigo misma, los segundos (como ‘primo de _____’, ‘enemigo de _____’) relaciones que nada puede tener consigo mismo. A los primeros puede denominárseles *auto-relativos*, a los segundos *alio-relativos*. Todos los copulativos son auto-relativos.

e. La quinta división es en relativos algo de cuya potencia (el producto repetido) contiene elementos de la forma (A:A) y aquellos de los que esto no es verdadero. A los primeros les denomino relativos *cíclicos*, a los segundos relativos *no-cíclicos*. Como ejemplo de los primeros, tomemos

(A:B) +, (B:A) +, (C:D) +, (D:E) +, (E:C).

El producto de esto por sí mismo es

(A:A) +, (B:B) +, (C:E) +, (D:C) +, (E:D).

La tercera potencia es

(A:B) +, (B:A) +, (C:C) +, (D:D) +, (E:E).

La cuarta potencia es

(A:A) +, (B:B) +, (C:D) +, (D:E) +, (E:C).

La quinta potencia es

¹⁷ «Quaedam sunt relationes equiparantiae, quaedam disquiparantiae. Primae sunt relationes similium nominum, secundae relationes dissimilium nominum. Exemplum primi est quando idem nomen ponitur in recto et in obliquo, sicut simile simili est simile... Exemplum secundi est quando unum nomen ponitur in recto sed aliud in oblique, sicut pater rest filii pater et non oportet quod sit patris pater». Ockham *Quodlibetum* 6, qu. 20. Véase, también, su *Summa Logices*, pars 1, cap. 52. «Relativa equiparantiae: quae sunt synonyma cum suis correlativis... Relativa disquiparantiae: quae non sunt synonyma cum suis correlativis». Pschlacher en *Petrus Hispanus*. Puede encontrarse la misma definición, sustancialmente, en muchos lógicos medievales tardíos. [Nota de Peirce]. Guillermo de Ockham. *Quodlibeta septem una cum tractatu de sacramento altari*. Argentiae, 1491; y *Summa logicae*: París: Johannes Higman, 1488. Trad: «Hay relaciones de equiparancia y de desequiparancia. Las primeras lo son de nombres parecidos, las segundas de nombres no parecidos. Un ejemplo de la primera es cuando el mismo nombre aparece en el caso nominativo y en el oblicuo, como lo que es semejante a lo semejante es semejante a (lo que es semejante)... Un ejemplo de la segunda es cuando un nombre aparece en el caso nominativo y otro en un caso oblicuo, como padre es padre de hijo y no, propiamente, padre de padre.» Petrus Hispanus. *Compendiarum parvorum logicalium*... Editado por Konrad Pschaler. Vienna, 1512, hoja 77v. Trad: «Los relativos de equiparancia son sinónimos con sus correlatos... Los relativos de desequiparancia no son sinónimos con sus correlatos».

¹⁸ También puede optarse por la traducción, *equivalentes* y *desequivalentes* [Nota del traductor].

$$(A:B) +, (B:A) +, (C:E) +, (D:C) +, (E:D).$$

La sexta potencia es

$$(A:A) +, (B:B) +, (C:C) +, (D:D) +, (E:E).$$

donde todos los términos son de la forma $(A:A)$. Estos relativos, como *primo de* _____, son cíclicos. Todos los equiparantes son cíclicos.

f. La sexta división es en relativos de los que ninguna potencia es cero, y relativos de los que alguna potencia es cero. A los primeros puede denominárseles *inagotables*, y a los segundos *agotables*. Un ejemplo de los primeros es ‘conyuge de _____’, de los segundos ‘marido de _____’. Todos los cíclicos son inagotables.

g. Séptima, los relativos simples pueden dividirse en aquellos cuyos productos por sí mismos no son cero, y aquellos cuyos productos por sí mismos son cero. A los primeros puede denominárseles relativos *repetidores*, y a los segundos relativos *no-repetidores*. Todos los relativos inagotables son repetidores.

h. Los relativos repetidores pueden dividirse (según De Morgan) en aquellos cuyos productos por sí mismos están contenidos bajo sí mismos, y aquellos de los que esto no es verdadero. Los primeros están bien llamados por De Morgan, *transitivos*, y los segundos *intransitivos*. Todos los transitivos son inagotables; todos los copulativos son transitivos; y todos los equiparantes transitivos son copulativos. La clase de los transitivos equiparantes tiene un carácter, el de ser auto-relativos, no implicado en las definiciones de los términos.

i. Los transitivos son, además, divisibles en aquellos cuyos productos por sí mismos son iguales a sí mismos, y aquellos cuyos productos por sí mismos son menos que sí mismos; a los primeros puede denominárseles *continuos*, y a los segundos *discontinuos*. Un ejemplo de los segundos se encuentra en la matemática pura de un continuo, donde si a es mayor que b , es mayor que algo mayor que b ; y en la medida en que a y b no son de la misma magnitud, siempre existe una magnitud interviniente. Todos los concurrentes son continuos.

j. Los intransitivos pueden dividirse en aquellos cuyo número de potencias (productos repetidos) que no están contenidas en la primera, es infinito, y aquellos de los que alguna potencia está incluida en la primera. A los primeros puede denominárseles *infinitos*, y a los segundos, *finitos*. Los inagotables infinitos son cíclicos.

En adición a estas, las viejas divisiones de relaciones en relaciones de razón y relaciones reales, de las segundas en potenciales y actuales, y de estas últimas en extrínsecas e intrínsecas, son, a menudo, útiles¹⁹.

«No»

Ya hemos visto que ‘no’, u ‘otro que’, se denota con $\mathbb{G}^{-1}$. Es, a menudo, más conveniente escribirlo como n . La propiedad fundamental de este relativo se ha dado antes (111.). Es que,

$$\mathbb{G}^{-x} = 1 - x.$$

Otras dos propiedades se expresan con los principios de no contradicción y tercio excluso. Son

$$\begin{aligned} x, \mathbb{G}^{-x} &= 0; \\ x + \mathbb{G}^{-x} &= 1. \end{aligned}$$

Las siguientes propiedades deducidas son de aplicación frecuente:- (167.) y (168.)

$$\begin{aligned} \mathbb{G}^{-(x,y)} &= \mathbb{G}^{-x} + \mathbb{G}^{-y}; \\ \mathbb{G}^{-xy} &= \mathbb{G}^{-x}y. \end{aligned}$$

La primera de estas es la contraparte de la fórmula general, $z^{x+y} = z^x, z^y$. La segunda nos permite siempre bajar el exponente del exponente de $\mathbb{G}^{-}$ a la línea, y hacerle un factor.

¹⁹ «Duplex est relation: scilicet rationis et realis. Unde reatio rationis est quae fit per actum comparativum intellectus, ut sunt secundae intentionis; sed relation realis est duplex, scilicet aptitudinalis et actualis. Aptitudinalis est quae non requirit terminum actu existere sed solum in aptitudine; cujusmodi sunt omnes propriae passionis, omne aptitudines, et omnes inclinationes; et tales sunt in illo praedicamento reductive in quo sunt illa quorum sunt propriae passionis. Sed relation actualis est duplex, scilicet, intrinsecus adveniens, et extrinsecus adveniens. Intrinsecus adveniens est quae necessario ponitur positus extremis in quacunque etiam distantia ponantur, ut similitudo, paternitas, equalitas. Extrinsecus adveniens est quae necessario non ponitur, positus extremis, sed requiritur debita approximation extremorum; cujusmodi sunt sex ultima predicament, scilicet, action, passio, quando, ubi, situs, et habitus». Tartaretus. [Nota de Peirce]. Tartaretus, Petrus. *Expositio magistri Petri Tatarteti in summulas Petri Hyspani*. Lugduni, 1509, fol. 23c. Trad: «La relación es doble: propiamente, relación de razón y relación real. La relación de razón es aquella que se hace por mediación de un acto comparativo del intelecto, como son las segundas intenciones; pero la relación real es doble: propiamente, aptitudinal y actual. La relación aptitudinal es aquella que no requiere que sus términos existan actualmente sino solo en aptitud.; tales son todas las pasiones apropiadas, todas las aptitudes y todas las inclinaciones; y estas están en aquel predicamento reductivo en que están las cosas cuyas pasiones privadas son. Pero la relación actual es doble; propiamente, intrínsecamente adviniente y extrínsecamente adviniente. Intrínsecamente adviniente es aquella que está necesariamente afirmada cuando los extremos están afirmados a la distancia que sea, como en las semejanzas, la paternidad, la igualdad. La extrínsecamente adviniente es aquella que no está necesariamente afirmada cuando los extremos están afirmados, sino que requiere una adecuada proximidad de los extremos; tales son las seis últimas categorías; propiamente, acción, pasión, tiempo, lugar, posición y hábito».

Por el primer principio, los objetos que no son violinistas franceses constan de objetos que no son franceses, junto con objetos que no son violinistas; por el segundo, los individuos que no son sirvientes de todas las mujeres son los mismos que los no-sirvientes de algunas mujeres.

Otra propiedad singular de $\mathcal{G}^-$ es que, (169.)

$$\text{If } [x] > 1 \quad \mathcal{G}^-x = 1.$$

«El caso de la existencia de _____» y «el caso de la no-existencia de _____»

Aquello que primero me llevó a aspirar a la extensión actual de la notación lógica de Boole, fue la consideración de que, tal como dejó su álgebra, no se podían expresar apropiadamente ni las proposiciones hipotéticas ni las proposiciones particulares. Es verdad que Boole podía expresar las expresiones hipotéticas de una manera que respondía perfectamente a algunos propósitos. Podía, por ejemplo, expresar la proposición, «o bien el sol lucirá, o bien la iniciativa se pospondrá», al hacer que x denote «la verdad de la proposición de que el sol lucirá», e y «la verdad de la proposición de que la iniciativa se pospondrá»; y escribir,

$$x + y = 1,$$

o, con la adición invertible,

$$x + (1 - x), y = 1.$$

Pero si él hubiera aplicado cuatro letras que denotaran los cuatro términos, ‘sol’, ‘lo que va a lucir’, ‘la iniciativa’, y ‘lo que va a ser pospuesto’, no podría usar estas para expresar su proposición disyuntiva, sino que se habría visto obligado a asumir otras. Aquí era obvia la imperfección del álgebra. Respecto a las proposiciones particulares, Boole no podía expresarlas con exactitud de ninguna manera. Se propuso expresarlas, y escribió

$$\text{Algunos Ys son Xs:} \quad v, y = v, x;$$

$$\text{Algunos Ys no son Xs:} \quad v, y = v, (1 - x).$$

Dice Boole que la letra v se utiliza aquí como «símbolo de clase indefinida». Esto revela un falso concepto de la naturaleza de una proposición particular. Decir que algunos Ys

son Xs, no es lo mismo que decir que una especie lógica de los Ys son Xs: Puesto que la especie lógica no necesita ser el nombre de nada que exista. Únicamente es una determinada descripción de cosas totalmente expresadas con una mera definición, y es una cuestión de hecho si una cosa tal existe realmente o no. San Anselmo quería inferir la existencia a partir de una definición, pero ese argumento ya hace tiempo que ha sido refutado. Si, entonces, v es una mera especie lógica en general, no hay necesariamente una cosa tal, y la ecuación no significa nada. Si va a ser una especie lógica, entonces, es necesario suponer adicionalmente que existe, y, aún más, que *algún* v es y . En resumen, es necesario asumir, respecto a ella, la verdad de una proposición que, siendo ella misma particular, presenta la dificultad original respecto a su expresión simbólica. Además, de

$$v, y = v, (1 - x)$$

podemos, según los principios algebraicos, deducir sucesivamente

$$v, y = v - v, x$$

$$v, x = v - v, y = v, (1 - y).$$

Ahora bien, si la primera ecuación significa que algunos Ys no son Xs, la segunda debería significar que algunos Xs no son Ys; puesto que las formas algebraicas son las mismas, y la cuestión es, si las formas algebraicas son adecuadas para la expresión de los particulares o si no lo son. Parecería, en consecuencia, que la inferencia de Algunos Ys no son Xs a Algunos Xs no son Ys es buena; pero, de hecho, no lo es.

Lo que se necesita, para expresar analíticamente los hipotéticos y los particulares, es un término relativo que denote «el caso de la existencia de _____», o «lo que existe si hay algún _____»; o, si no, «el caso de la no-existencia de _____», o «lo que existe solo si no hay _____». Cuando se extiende el álgebra de Boole a los términos relativos, es fácil ver lo que estos relativos particulares deben ser. Porque, supongamos que habiendo expresado las proposiciones ‘hay truenos’ y ‘hay relámpagos’, deseamos expresar el hecho de que «si hay relámpagos, hay truenos». Sean

$$A = 0 \quad \text{y} \quad B = 0,$$

ecuaciones que significan, respectivamente, hay relámpagos y hay truenos. Entonces, si ϕx desaparece cuando x no lo hace y *viceversa*, sea lo que sea x , la fórmula

$$\phi A \rightarrow \phi B$$

expresa que si hay relámpagos hay truenos; porque si hay relámpagos, A desaparece, entonces, ϕA no desaparece, entonces, ϕB no desaparece, entonces, B desaparece, entonces, hay truenos. No hace ninguna diferencia la función que ϕ tenga, siempre que, únicamente, cumpla con la condición mencionada. Ahora bien, 0^x es esa función, desapareciendo cuando x no desaparece, y no desapareciendo cuando x desaparece. Cero, en consecuencia, puede interpretarse como que denota «aquello que existe si, y solo si, no hay _____ ». Entonces, la ecuación

$$0^0 = 1$$

significa, todo lo que existe, existe solo si no hay nada que no exista. Por lo que,

$$0^x = 0$$

significa que no hay nada que exista si, y solo si, *algún* x no existe. La razón para esto es que *algún* x significa algún x que existe.

‘Hay relámpagos’ y ‘hay truenos’ pudieran haberse expresado con ecuaciones en las formas

$$A = 1, \quad B = 1$$

En ese caso, para expresar que si hay relámpagos hay truenos, en la forma

$$\phi A \rightarrow \phi B$$

solamente sería necesario encontrar una función, ϕx , que desaparecería a menos que x fuera 1. Esa función es 1^x . Debemos, en consecuencia, interpretar 1 como «aquello que existe si, y solo si, hay _____ », 1^x como «aquello que existe si, y solo si,, no hay nada salvo x », y $1x$ como «aquello que existe si, y solo si, hay algún x ». Entonces, la ecuación

$$1^x = 1,$$

significa todo existe si, y solo si, todo x que haya existe.

Toda proposición hipotética puede ponerse en cuatro formas equivalentes como sigue:

Si X, entonces Y.

Si no Y, entonces no X.

O bien no X, o bien Y.

No ambos, X y no Y.

Si las proposiciones X e Y son $A = 1$ y $B = 1$, estas cuatro formas se expresan naturalmente con

$$\begin{aligned} {}^1A &\prec {}^1B, \\ 1(1 - B) &\prec 1(1 - A), \\ 1(1 - A) + {}^1B &= 1, \\ {}^1A, 1(1 - B) &= 0. \end{aligned}$$

Podemos, siempre, sustituir $0^{(1-x)}$ por 1x .

Las proposiciones particulares se expresan con la consideración de que son las contradictorias de las proposiciones universales. Por ello, como $h, (1 - b) = 0$ significa todo caballo es negro, entonces, $0^{h, (1-b)} = 0$ significa que algún caballo no es negro; y como $h, b = 0$ significa que ningún caballo es negro, entonces, $0^{h,b} = 0$ significa que algún caballo es negro. También podemos escribir el afirmativo particular $1(h, b) = 1$, y el negativo particular $1(h, n^b) = 1$.

Dadas las premisas, todo caballo es negro, y todo caballo es un animal, se requiere la conclusión. Hemos dado

$$\begin{aligned} h &\prec b; \\ h &\prec b. \end{aligned}$$

Multiplicando conmutativamente, obtenemos

$$h \prec a, b.$$

Entonces, por (92) o por (90),

$$0^{a,b} \prec 0^h, \quad \text{o} \quad 1h \prec 1(a, b).$$

Luego, por (40) o (46),

$$\text{Si } h > 0 \quad 0^{a,b} = 0 \quad \text{o} \quad 1(a, b) = 1;$$

o si hay cualesquiera caballos, algunos animales son negros. Pienso que sería difícil alcanzar este resultado sin modificar el método de Boole.

Las proposiciones particulares pueden, también, expresarse por medio de los signos de desigualdad. Por ello, algunos animales son caballos puede escribirse

$$a, h > 0;$$

y la conclusión que se requería en el problema anterior podría haberse obtenido, muy fácilmente, de esta manera a partir del producto de (1) y (21).

Veremos que las proposiciones disyuntivas y condicionales pueden, también, expresarse de una manera diferente.

Los términos conjugativos

El tratamiento de los términos conjugativos presenta una dificultad considerable, y sin duda el uso de recursos algebraicos lo facilitaría en gran medida. Sin embargo, he estudiado solo un poco esta parte de mi notación.

Un término relativo no puede de ninguna manera reducirse a ninguna combinación de términos absolutos, ni puede ningún término conjugativo reducirse a ninguna combinación de relativos simples; pero un conjugativo que tenga más de dos correlatos siempre puede reducirse a una combinación de conjugativos de dos correlatos. De esta manera, por «ganador de _____, de _____, para _____», siempre podemos sustituir u , o «ganador de la ventaja _____ para _____», donde el primer correlato es él mismo otro conjugativo v , o «la ventaja de ganar _____ de _____». Entonces podemos escribir,

$$w = uv.$$

Es evidente que, de esta forma, todos los conjugativos pueden expresarse como productos de los conjugativos de dos correlatos.

La interpretación de combinaciones como b^{am} (a^m), etc., no es muy fácil. Cuando el conjugativo y su primer correlato pueden tomarse juntos y separados del segundo correlato, como en $(ba)^m$ y $(ba)^m$, y $(b^a)^m$ y $(b^a)^m$, no hay perplejidad, porque en esos casos (ba) o (b^a) es un relativo simple. En consecuencia, solo tenemos que llamar al traidor a un enemigo un traidor enemigo, cuando tenemos

$(ba)^m$ = traidor enemigo de un hombre = traidor de un hombre a un enemigo de él,

$(ba)^m$ = traidor enemigo de todo hombre = traidor de todo hombre a un enemigo de él.

Y solo tenemos que llamar al traidor a todo enemigo un traidor ilimitado, para obtener

$(b^a)^m$ = traidor ilimitado de un hombre = traidor de un hombre a todo enemigo de él,

$(b^a)^m$ = traidor ilimitado de todo hombre = traidor de todo hombre a todo enemigo de él.

Los dos términos ba^m y b^{aexpm} no se interpretan tan fácilmente. Imaginemos que a está dividido en relativos infinitesimales A_i , A_u , A_m , etc., cada uno de los cuales es relativo solamente a un individuo que es m . Entonces, puesto que todas las potencias de A_i , A_u ,

A_m , etc, mayores que la primera, desaparecen, y puesto que el número de esos términos debe ser $[m]$, tenemos,

$$a^m = (A_i +, A_u +, A_m +, \text{etc.})^m = (A_i m), (A_u m), (A_m m), \text{etc.}$$

o si M', M'', M''' , etc., son los ms individuales,

$$a^m = (A, M'), (A,, M''), (A,,, M'''), \text{etc.}$$

De esto es evidente que ba^m es un traidor a un A_i de M' , a un $A,,$ de M'' , a un $A,,,$ de M''' , etc., en resumen de todos los hombres a algún enemigo de todos ellos. Para interpretar b^{aexpm} solamente tenemos que tomar su negación. Esto, por $(124)^{20}$, es $(1 - b) a^m$, o un no-traidor de todos los hombres a algún enemigo de ellos. De ahí, b^{aexpm} , o aquello que *no* es esto, es un traidor de algún hombre a cada enemigo de todos los hombres. Para interpretar $b(a m)$, podemos introducir la forma $(1 - b)^{(1 - aexp)m}$. Esto es «no-traidor de un hombre a todos los no-enemigos de todos los hombres». Ahora bien, un no-traidor de algún X a todo Y, es lo mismo que un traidor de todos los Xs solamente a lo que no es Y; y la negación de «no-enemigo de todos los hombres», es «enemigo de un hombre». De esta manera, $b(a m)$, es «traidor de todos los hombres a solamente un enemigo de un hombre». Para interpretar $b^a m$ podemos ponerlo en la forma $(1 - b)^{(1 - a)m}$, que es, «no-traidor de un hombre a todo no-enemigo de él». Esta es una suma lógica de términos, cada uno de los cuales es «no-traidor de un hombre individual M a todo no-enemigo de M». La suma de ellos, en consecuencia, que es $b^a m$ es «traidor de algún hombre a solamente un enemigo de él». De la misma manera es obvio que $b^a m$ es «traidor de solamente un hombre a solamente un enemigo de él». Tenemos $b^a m = b(1 - a)^{(1 - m)}$, o «traidor de todo no-hombre a un no-enemigo de todo no-hombre». Esto es lo mismo que «aquello que está ante algo que es solamente un enemigo de un hombre en la relación de traidor de solamente hombres a aquello que no lo es». La interpretación de $b^a m$ es, obviamente, «traidor de solamente un hombre a un enemigo de él». Es igualmente claro que $b^a m$ es «traidor de ningún hombre a solamente un enemigo de él», y que ba^m es «traidor de solamente un hombre a todo enemigo de él». Al poner b^{am} en la forma $b^{(1 - a)(1 - m)}$ encontramos que denota «traidor de algo además de un hombre a todas las cosas que son enemigas solamente de los hombres».

²⁰ De *La lógica de los relativos*, 124: $l s = 1 - (1 - l) s$. [Nota de Peirce].

Cuando un término absoluto se pone en lugar de a , las interpretaciones se obtienen de la misma manera, con una mayor facilidad.

El signo de una operación es claramente un término conjugativo. De esta manera, nuestra multiplicación conmutativa puede denotarse con el conjugativo

$$1, .$$

Ya que tenemos,

$$l, sw = 1, l, sw.$$

Puesto que los conjugativos pueden reducirse todos a conjugativos de dos correlatos, pueden expresarse con un signo operativo (para el que puede usarse una letra hebrea) colocado entre los símbolos de los dos correlatos. Habría, a menudo, una ventaja al hacer esto, debido a lo intrincado de la notación habitual de los conjugativos. Si estos signos operativos resultaran concordar en sus propiedades con cualquiera de los signos del álgebra, podrían utilizarse algunas modificaciones de los signos algebraicos en lugar de las letras hebreas. Por ejemplo, si r fuera tal que

$$r \times r yz = r_{13} r xyz,$$

entonces, si sustituyéramos r por el signo operativo $\daleth$ tenemos

$$x\daleth(y\daleth z) = (x\daleth y)\daleth z,$$

que es la expresión del principio asociativo. Por lo tanto, si

$$rxy = r yx$$

podemos escribir,

$$x\daleth y = y\daleth x$$

que es el principio conmutativo. Si estas dos ecuaciones se sostuvieran con cualquier conjugativo, podríamos expresarlo convenientemente con el signo modificado $+$. Por ejemplo, consideremos el conjugativo «lo que se denota con un término que o bien denota _____ o, si no, _____». Para este, se sostienen obviamente los principios anteriores, y podemos denotarlo naturalmente con $+$. Entonces, si p denota Protestantismo, r Catolicismo y f aquello que es falso,

$$p + r -< f$$

significa o bien todo el protestantismo o bien todo el catolicismo es falso. Con esta forma es claro que se pueden expresar todas las proposiciones hipotéticas. Además, si

suponemos a cualquier término como ‘hombre’ (m) separado en sus individuos, M’, M”, M””, etc., entonces,

$$M' + M'' + M''' + \text{etc.},$$

significa ‘algún hombre’. Esto puede escribirse naturalmente

$$‘m’$$

y esto nos da una forma mejorada de escribir una proposición particular; puesto que

$$‘x’ \prec y$$

parece una forma más simple de escribir ‘Algún X es Y’ que

$$0^{x,y} = 0.$$

El inverso

Si separamos *amante* en sus relativos elementales, tomamos el recíproco de cada uno, esto es, lo cambiamos de

$$A:B \quad a \quad B:A,$$

y sumamos estos recíprocos, obtenemos el relativo *amado por*. No hay una operación como esta en la aritmética ordinaria, pero si suponemos una ciencia de la cantidad discreta en forma de cuaternidad (una ciencia de intervalos iguales en el espacio), la suma de los recíprocos de las unidades de esta cuaternidad será la cuaternidad-conjugativa. Por esta razón, expreso el término conjugativo «aquello que está relacionado en la forma que para _____ es _____, para este último» con **K**. Las ecuaciones fundamentales de las que dependen las propiedades de este término

$$(169.) \quad \mathbf{K} \mathbf{K} = 1.$$

$$(170.) \quad \text{Si } x < y^z \quad \text{entonces} \quad z \prec (\mathbf{K} y)^x, \\ \text{o} \quad l(x, yz) = l(z, \mathbf{K} yx).$$

Tenemos, también,

$$(171.) \quad \mathbf{K} \Sigma = \Sigma \mathbf{K},$$

$$(172.) \quad \mathbf{K} \Pi = \Pi \mathbf{K},$$

donde Π denota el producto en el orden inverso. Se encontrarán otras ecuaciones en la tabla del Sr. De Morgan, dada anteriormente.

Conclusión

Si se pregunta la cuestión, ¿Cuáles son los principios axiomáticos de esta rama de la lógica, no deducibles a partir de otros? Respondo que sea cual sea el rango asignado a las leyes de contradicción y de tercero excluido, este pertenece por igual a las interpretaciones de todas las ecuaciones generales dadas bajo el encabezamiento «Aplicación de los signos algebraicos a la lógica», junto con aquellas relacionadas con la involución inversa y los principios expresados con las ecuaciones (95), (96), (122), (142), (156), (25), (26), (14), (15), (169), (170).

Pero estos axiomas son meros sustitutos de las relaciones lógicas universales y, hasta donde estas pueden ser definidas, podemos prescindir de todos los axiomas. Los principios fundamentales de la lógica formal no son, propiamente, axiomas sino definiciones y divisiones; y los únicos *hechos* que [la lógica]²¹ contiene se refieren a la identidad de los conceptos resultantes de aquellos procesos junto con determinados conceptos familiares.

²¹ Añadido del traductor.