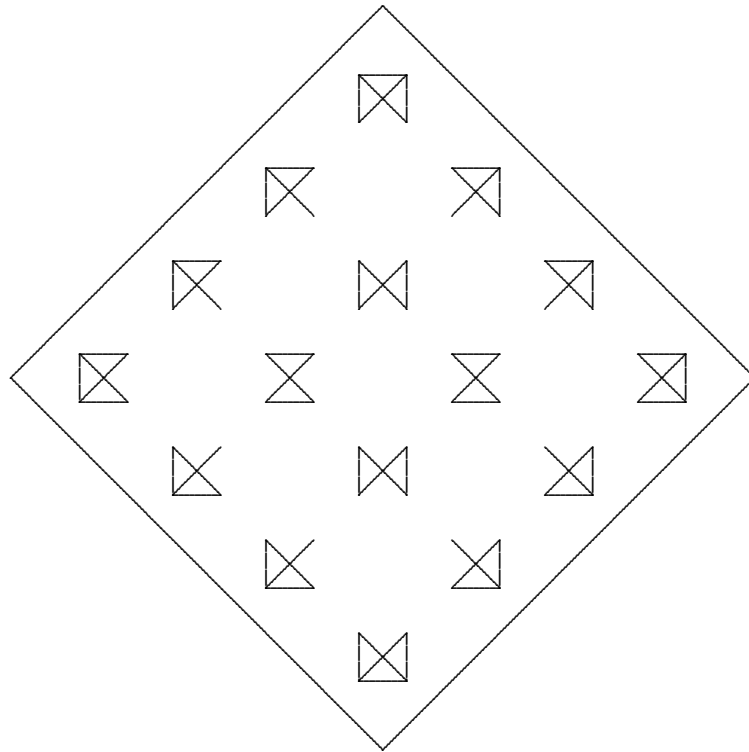


# Simetría en algunas tablas de C. S. Peirce

Arnold Oostra  
Universidad del Tolima

2002



# Introducción

Charles S. Peirce (1839 – 1914) ha sido considerado como el intelectual más original y versátil de América. Padre de la semiótica moderna y creador del pragmatismo auténtico, es más conocido y reconocido en la filosofía que en la matemática y la lógica aunque sus aportes originales a estas ciencias no pueden despreciarse: basta mencionar la teoría de la cuantificación, la axiomatización de la aritmética y sus maravillosos gráficos existenciales [3, 10, 14, 17].

En manuscritos con fechas de 1902 Peirce propuso una notación para los dieciséis conectivos proposicionales binarios. La característica sobresaliente de este sistema de símbolos es que, en términos de la teoría de los signos propuesta por el mismo Peirce, se trata de una notación *icónica*. Esto significa que cada símbolo es la definición del conectivo que representa y, de otro lado, que el sistema de símbolos refleja de manera bien visible algunas propiedades y simetrías intrínsecas de los conectivos [2, 7, 8, 19]. Pero el objetivo primordial perseguido por Peirce al introducir estos signos fue la búsqueda sistemática de tautologías, indagación en la cual las características de los signos juegan un papel decisivo.

En el marco de la búsqueda de tautologías, Peirce consignó las soluciones de tres de los problemas que se planteó en sendas tablas de conectivos. En este escrito, las tablas 1 (página 3), 2 (página 4) y 3 (página 5) copian de la manera más fiel posible las tablas elaboradas por Peirce hace cien años. Al observarlas, en especial la tabla 2 (página 4), la simetría salta a la vista.

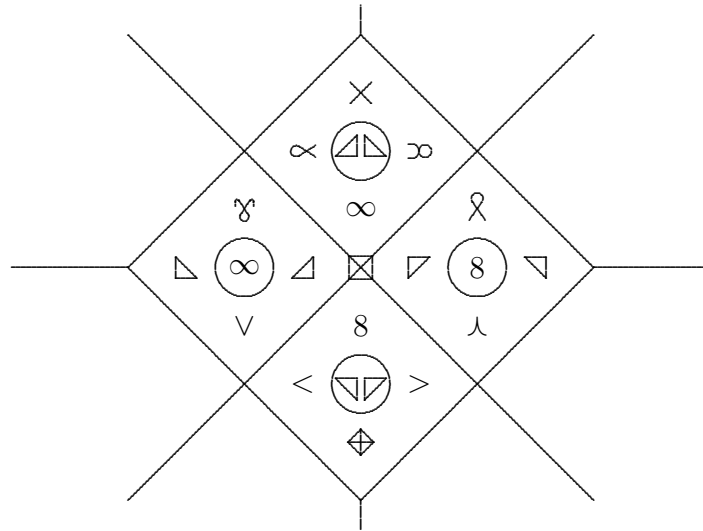


Tabla 1: Estudio por Peirce de la forma  $x \circ x$

Pero la simetría presente en las tablas de Peirce no es la simetría considerada de manera usual en la teoría de matrices [5, 9, 16]. Por ejemplo, al reflejar la tabla 3 (página 5) en el eje vertical, a cada símbolo no corresponde el mismo símbolo sino el que se obtiene de él reflejándolo en el mismo eje. Esta es una auténtica simetría especular.

El propósito de esta monografía es precisar el tipo de simetría presente en las tablas de Peirce. El instrumento es la teoría de grupos, en especial las acciones del grupo del cuadrado. Aunque el estudio presentado puede extrapolarse a tablas rectangulares y a tablas no planas, en este trabajo sólo se consideran tablas planas cuadradas.

En el capítulo 1 se proponen tres nociones de simetría para tablas cuadradas. Por ignorancia de estudios anteriores se introducen los nombres ‘un-simetría’, ‘dosimetría’ y ‘tresimetría’, la primera de ellas corresponde a la simetría usual. En el capítulo 2 se presenta la notación de Peirce para los conectivos binarios y se repasa el estudio hecho por el pensador en la búsqueda de tautologías. La simetría de las múltiples tablas que aparecen se estudia con la terminología propuesta en el capítulo 1. En el capítulo 3 se

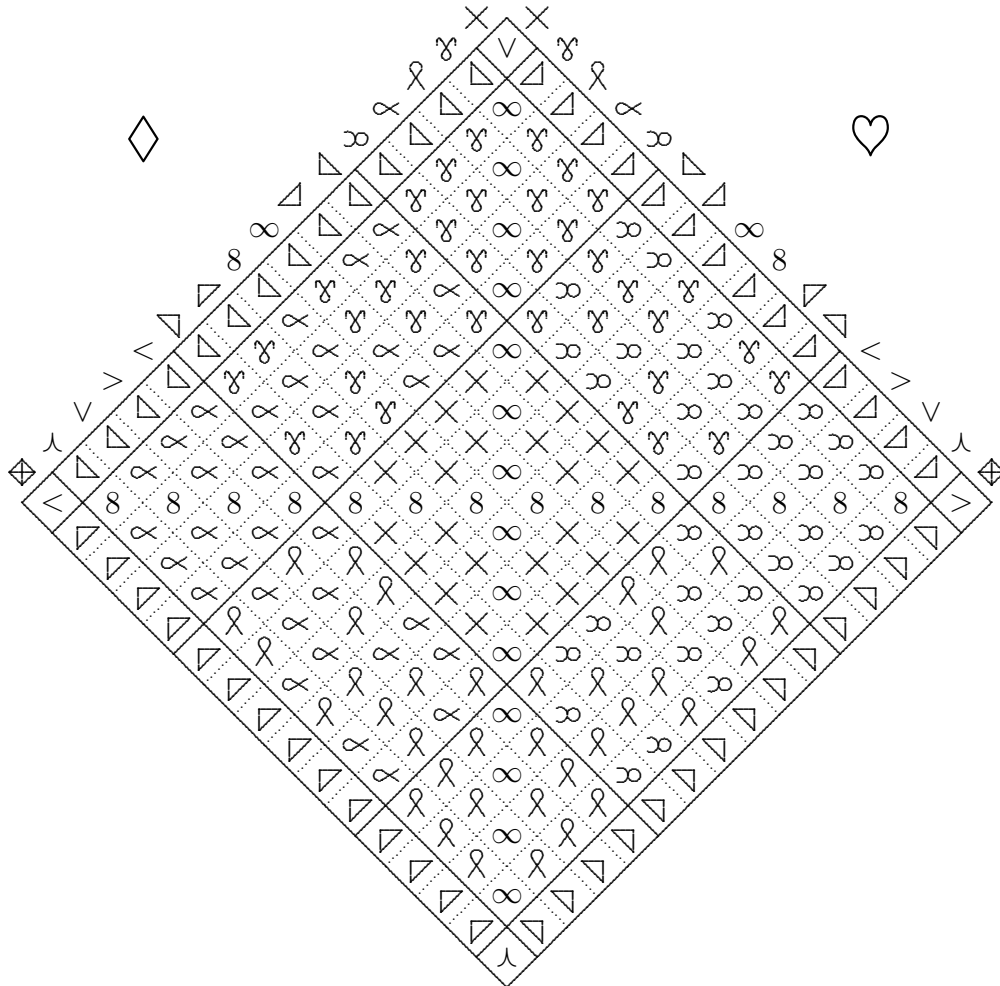


Tabla 2: Estudio por Peirce de la forma  $(x \diamond y) \text{ O } (x \heartsuit y)$

repite las tablas de Peirce con otra notación para los conectivos binarios, propuesta en la década pasada por S. Zellweger.

El material presentado en la sección 1.1 es un caso particular de la conocida teoría de acciones de grupo —que puede encontrarse en muchos textos de álgebra [6, 12, 13]— mientras las ideas, nociones y resultados de las secciones 1.2, 1.3 son originales. El capítulo 2 se basa en el artículo [2] y en la

The image shows a large diamond-shaped Peirce table. The table is composed of a grid of symbols arranged in a diamond pattern. The symbols include triangles (pointing up, down, left, right), crosses, and loops. The table is flanked by a spade symbol (♠) on the left and a club symbol (♣) on the right. The table is oriented with its top vertex pointing upwards.

Tabla 3: Estudio por Peirce de la forma  $(x \spadesuit y) \heartsuit [(y \clubsuit z) \diamond (x \circ z)]$

monografía [8] pero la mayoría de las tablas presentadas allí fueron elaboradas por el autor y el estudio de la simetría en todas las tablas es nuevo. En el capítulo 3 se emplea la notación presentada en [1], la idea de presentar con ella las tablas de Peirce y el análisis de su simetría son originales.

# Capítulo 1

## Tres nociones de simetría

Como en todas las actividades humanas, en la matemática son ubicuos los fenómenos simétricos. Pero a diferencia de otras áreas del saber y de la cultura, la matemática ha desarrollado un instrumental muy fino y preciso para estudiar la simetría en general: se trata de la teoría de grupos.

En el álgebra lineal se define una matriz simétrica como aquella que es igual a su traspuesta, o en términos más geométricos, que es invariante bajo una reflexión en la diagonal principal [9, 16]. Esa no es la única simetría posible de una tabla cuadrada: en el interesante trabajo [5] se estudian las reflexiones de una matriz cuadrada en sus ejes horizontal y vertical; se muestra que buena parte de la teoría conocida sobre matrices simétricas puede extenderse; se presentan algunas aplicaciones a la estadística y se sugieren otras.

La tabla que aparece después de la portada (página 2), aunque tiene auténtica simetría especular o bilateral respecto a sus ejes y diagonales, no es simétrica en ninguno de los sentidos mencionados arriba. Es preciso, entonces, refinar la noción de simetría para analizar este tipo de tablas.

Las palabras subrayadas destacan conceptos de uso común en matemáticas, que pueden consultarse en cualquier texto sobre temas afines [6, 12, 13].

## 1.1 Unosimetría

Se observa con facilidad que un cuadrado fijo tiene ocho movimientos rígidos o isometrías posibles: cuatro reflexiones (en las diagonales y en las medianas) y cuatro rotaciones (incluyendo una en 360 grados, que se identifica con el reposo); también se observa que los movimientos pueden combinarse entre sí. Estos movimientos rígidos con la operación de composición constituyen un grupo, llamado *grupo diédrico del cuadrado* y denotado  $D_4$ .

Dada una tabla cuadrada, cuyas componentes pertenecen todas a cierto conjunto  $X$ , con ella pueden realizarse los mismos movimientos rígidos del cuadrado. Como se hará evidente en los capítulos postreros, es diferente considerar la tabla horizontal ( $\square$ ) o inclinada ( $\diamond$ ) aunque en ambos casos pueden realizarse todos los movimientos conviniendo que la diagonal principal es el eje que va de la izquierda arriba a la derecha abajo, etcétera. Excepto el reposo, quizás el movimiento más fácil de describir es la reflexión en la diagonal principal pues corresponde —en el caso de una tabla horizontal— a cambiar la componente  $x_{ij}$  por la  $x_{ji}$ . Expresiones similares pueden encontrarse para todos los movimientos.

Si  $\sigma \in D_4$  es un movimiento rígido del cuadrado y  $T \in M(X)$  es una tabla cuadrada,  $\sigma T$  denota la tabla que se obtiene de  $T$  realizándole el movimiento  $\sigma$ . De manera formal, esto define una acción del grupo  $D_4$  sobre el conjunto  $M(X)$  de todas las matrices cuadradas con componentes de  $X$ .

**Definición.** Fijado un movimiento rígido  $\sigma \in D_4$ , una tabla  $T \in M(X)$  es *unosimétrica respecto a  $\sigma$*  si  $\sigma T = T$ .

**Ejemplos.** Las matrices unosimétricas respecto a la reflexión en la diagonal principal son las matrices llamadas simétricas. Las matrices unosimétricas respecto a la reflexión en el eje vertical son llamadas palíndromas horizontales en [5]; las unosimétricas respecto a la reflexión en el eje horizontal, palíndromas verticales.



**Observación Particular.** Si el conjunto  $X$  tiene estructura de campo (o de anillo), se verifica de inmediato que la función  $T \mapsto \sigma T$  es lineal en el espacio vectorial (o módulo)  $M_n(X)$  de las matrices cuadradas *de orden*  $n \times n$  con componentes de  $X$ . En consecuencia el conjunto de las matrices unosimétricas respecto a  $\sigma$ , siendo el núcleo de la función lineal  $T \mapsto (\sigma T - T)$ , es un subespacio (o submódulo) de  $M_n(X)$ .

En la terminología de la teoría de grupos, la órbita de una tabla fija  $T$  es el conjunto de todas las tablas  $\sigma T$  que se obtienen realizando con la tabla escogida todos los movimientos rígidos del cuadrado. Como se verá en seguida, no siempre se obtienen ocho tablas distintas.

**Ejemplos.** La órbita de

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

es

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \right\};$$

la de

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

es

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \right\};$$

la órbita de

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

es

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \right\};$$

y la de

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

es

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Si la órbita de cierta tabla  $T$  tiene menos de ocho elementos entonces hay algún movimiento rígido  $\sigma$  distinto al reposo que deja inalterado  $T$ , es decir,  $T$  es unosimétrica respecto a  $\sigma$ . Así pues, una forma precisa de medir la unosimetría de  $T$  es considerando el conjunto siguiente, denotado  $G_1(T)$  o bien  $G_1$  cuando la tabla está especificada en el contexto.

$$G_1(T) = \{ \sigma \in D_4 \mid \sigma T = T \}$$

**Teorema 1.** Para cualquier tabla  $T$ ,  $G_1(T)$  es un subgrupo del grupo diédrico  $D_4$ .

*Demostración.* Si  $i$  denota el reposo es evidente que  $iT = T$ , luego  $i \in G_1$ . Si  $\sigma, \tau \in G_1$  entonces  $\sigma\tau T = \sigma(\tau T) = \sigma T = T$  de donde  $\sigma\tau \in G_1$ . Y si  $\sigma \in G_1$  entonces  $\sigma^{-1}T = \sigma^{-1}(\sigma T) = (\sigma^{-1}\sigma)T = iT = T$ , de suerte que también  $\sigma^{-1} \in G_1$ .  $\square$

**Convención.** Sea  $T$  cualquier tabla cuadrada. El *primer grupo de simetría de  $T$*  es  $G_1(T)$ .

**Ejemplos.** El primer grupo de simetría de

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

es el grupo trivial —que tiene un solo elemento—, denotado  $0$ ; los primeros grupos de simetría de

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix},$$

aunque distintos entre sí, son isomorfos al grupo  $\mathbb{Z}_2$  que, en esencia, es el único que tiene dos elementos; los primeros grupos de simetría de

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix},$$

también distintos entre sí, son ambos isomorfos al grupo  $\mathbb{V}$ , el único grupo no cíclico que tiene cuatro elementos; el primer grupo de simetría de

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{y de} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

es el grupo diédrico completo  $D_4$ .

Estos ejemplos también ilustran el siguiente hecho, válido en general para acciones de grupos finitos [6, 12].

**Teorema 2.** *Para cualquier tabla  $T$ , el producto del tamaño de la órbita de  $T$  por el tamaño del primer grupo de simetría  $G_1(T)$ , es 8.*

Ahora es claro el sentido en el cual el primer grupo de simetría *mide* la unosimetría de la tabla: cuanto mayor el grupo, tanto más unosimétrica es la tabla.

## 1.2 Dosimetría

En la primera sección se presentó la acción natural del grupo diédrico  $D_4$  sobre el conjunto  $M(X)$  de tablas o matrices cuadradas con componentes de un conjunto  $X$ .

Supóngase ahora que un grupo  $H$  actúa sobre el conjunto de componentes  $X$ . Esta acción induce de inmediato una nueva acción sobre el conjunto  $M(X)$ , como sigue: Si  $h \in H$  es un elemento del grupo y  $T \in M(X)$  es una

tabla cuadrada,  $T_h$  denota la tabla que se obtiene de  $T$  realizando en cada componente la acción  $h$ .

$$\begin{array}{ccc}
 H & \xrightarrow{\text{acción}} & X \\
 & \searrow \text{acción inducida} & \vdots \\
 D_4 & \xrightarrow{\text{acción natural}} & M(X)
 \end{array}$$

**Ejemplo.** Si  $X$  tiene estructura de grupo aditivo entonces actúa sobre él el grupo  $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$  como se indica a continuación.

$$\begin{cases} 0 * x = x \\ 1 * x = -x \end{cases}$$

Para esta acción,  $T_0$  es  $T$  mientras  $T_1$  es la tabla que se obtiene de  $T$  sustituyendo cada componente por su opuesto aditivo o, como se dice, ‘cambiándola de signo’.

Cuando en una tabla cuadrada se realiza un movimiento rígido de los estudiados en la sección 1.1, se establece una relación entre las componentes de la misma: un elemento  $x$  se relaciona con  $y$  si, al mover la tabla, alguna de las copias de  $x$  cae sobre alguna de las de  $y$ . En general esta relación no es funcional ni biyectiva; aun si lo es, resulta ilusorio esperar que corresponde con exactitud a la biyección inducida por la acción de  $H$ . Sin embargo, en algunos casos eso es lo que sucede.

**Definición.** Fijados un movimiento rígido  $\sigma \in D_4$  y un elemento  $h \in H$ , una tabla  $T \in M(X)$  es *dosimétrica respecto a  $\sigma$  y a  $h$*  si  $\sigma T = T_h$ .

**Ejemplos.** Las matrices dosimétricas respecto a la reflexión en la diagonal principal y a  $1 \in \mathbb{Z}_2$  —con la acción indicada arriba— son las matrices

llamadas antisimétricas. Las matrices dosimétricas respecto a la reflexión en el eje vertical y a 1 son llamadas antipalíndromas horizontales en [5]; las dosimétricas respecto a la reflexión en el eje horizontal y a 1, antipalíndromas verticales.

**Observación Particular.** Si el conjunto  $X$  tiene estructura de campo, la función  $T \mapsto (\sigma T + T)$  es lineal en el espacio vectorial  $M_n(X)$  luego el conjunto de las matrices dosimétricas respecto a  $\sigma$  y a 1 —con la acción indicada arriba— es un subespacio de  $M_n(X)$ .

Si, además,  $\sigma$  es de orden 1 o 2 (repose, reflexión en cualquier diagonal o en cualquier eje, rotación en 180 grados) y la característica del campo no es 2, entonces toda tabla o matriz  $M \in M_n(X)$  puede expresarse de manera única como la suma de una unosimétrica respecto a  $\sigma$  y una dosimétrica respecto a  $\sigma$  y a 1, como sigue.

$$M = \frac{M + \sigma M}{2} + \frac{M - \sigma M}{2}$$

Como en la sección anterior, la dosimetría de una tabla puede tratar de medirse con un conjunto de movimientos rígidos, denotado ahora  $G_2$ .

$$G_2(T) = \{ \sigma \in D_4 \mid \text{existe } h \in H \text{ tal que } \sigma T = T_h \}$$

Cabe anotar que, aunque no se indica de manera explícita,  $G_2$  depende de la acción de  $H$  sobre el conjunto  $X$ . Como antes, se espera encontrar un subgrupo de  $D_4$ .

**Lema.** *Sea  $T \in M(X)$  una tabla arbitraria. Para cada  $\sigma \in D_4$  y cada  $h \in H$  se tiene la igualdad siguiente.*

$$(\sigma T)_h = \sigma(T_h)$$

*Demostración.* En el diagrama siguiente, el movimiento rígido  $\sigma$  es una permutación del conjunto de índices  $\{1, 2, \dots, n\} \times \{1, 2, \dots, n\}$  —o de otro

conjunto si la tabla no es horizontal sino inclinada— mientras las tablas o matrices  $T$ ,  $\sigma T$  y  $T_h$  son funciones de este producto en  $X$ .

$$\begin{array}{ccc}
 (i, j) & \xrightarrow{\sigma} & (k, l) \\
 \searrow \sigma T & & \downarrow T \\
 & & t_{kl} \\
 & & \xrightarrow{h} h * t_{kl} \\
 & & \swarrow T_h
 \end{array}$$

Puesto que los dos triángulos que constituyen el diagrama son conmutativos, las tres maneras de recorrerlo conducen al mismo resultado.  $\square$

**Teorema 3.** *Para cualquier tabla  $T$ ,  $G_2(T)$  es un subgrupo del grupo diédrico  $D_4$ .*

*Demostración.*  $i \in G_2$  pues  $iT = T = T_{e_H}$ . Si  $\sigma, \tau \in G_2$  existen  $h, k \in H$  tales que  $\sigma T = T_h$  y  $\tau T = T_k$  y entonces  $\sigma\tau T = \sigma(\tau T) = \sigma(T_k) = (\sigma T)_k = (T_h)_k = T_{kh}$ , de donde  $\sigma\tau \in G_2$ . Si  $\sigma \in G_2$  sea  $\sigma T = T_h$  para  $h \in H$  entonces  $\sigma^{-1}T = \sigma^{-1}(T_{e_H}) = \sigma^{-1}((T_h)_{h^{-1}}) = \sigma^{-1}((\sigma T)_{h^{-1}}) = \sigma^{-1}(\sigma(T_{h^{-1}})) = iT_{h^{-1}} = T_{h^{-1}}$ , así que también  $\sigma^{-1} \in G_2$ .  $\square$

Se recibe una prueba alternativa al leer el lema como *conmutatividad* entre las dos acciones sobre  $M(X)$ , la de  $D_4$  y la inducida por  $H$ . Existe una correspondencia biyectiva natural entre las parejas de acciones sobre un mismo conjunto que conmutan entre sí y las acciones del grupo producto sobre el conjunto. En particular, el lema implica que se tiene una acción del grupo  $D_4 \times H$  sobre  $M(X)$ ; como en la prueba del teorema 1, para cada tabla cuadrada  $T \in M(X)$  el conjunto

$$\{ (\sigma, h) \mid \sigma T_{h^{-1}} = T \} = \{ (\sigma, h) \mid \sigma T = T_h \}$$

es un subgrupo del grupo producto;  $G_2(T)$  es la proyección en  $D_4$  de este subgrupo y, por lo tanto, un subgrupo de  $D_4$ .

**Convención.** Sea  $T$  cualquier tabla cuadrada. El *segundo grupo de simetría* de  $T$  relativo a la acción de  $H$  es  $G_2(T)$ .

**Ejemplo.** El segundo grupo de simetría de una matriz cuadrada —respecto a la acción de  $\mathbb{Z}_2$ — contiene la reflexión en la diagonal principal si y solo si la matriz es simétrica o antisimétrica. Idéntico comentario puede hacerse sobre las reflexiones en los ejes.

**Ejemplo.** Tomando  $X = \{1, 2, 3, 4\}$  sea  $T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ . Como se observó en la sección 1.1,  $G_1(T)$  es el grupo trivial con un solo elemento.

El conjunto  $X$  es un grupo con la operación módulo 4. Si se considera la acción de  $\mathbb{Z}_2$  sobre  $X$  en tanto grupo aditivo,  $G_2(T)$  también es el grupo trivial pues

$$\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -3 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Si se considera la acción de  $\mathbb{Z}_4$  sobre  $X$  por adición entonces  $G_2(T)$  es un grupo de dos elementos —por tanto, isomorfo a  $\mathbb{Z}_2$ — pues

$$T_2 = \begin{bmatrix} 1+2 & 2+2 \\ 3+2 & 4+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix},$$

que se obtiene de  $T$  por reflexión en el eje horizontal.

La unosimetría puede considerarse un caso particular de la dosimetría, caso que se obtiene al tomar la acción trivial de  $H$  —esto es,  $T_h = T$  para cada tabla  $T$ —, de manera que con la dosimetría se gana precisión en el estudio. El hecho siguiente es un reflejo de ello.

**Teorema 4.** *Para cualquier tabla cuadrada  $T$ , el primer grupo de simetría es un subgrupo del segundo. En símbolos:*

$$G_1(T) \subseteq G_2(T).$$

*Demostración.* Si  $\sigma \in G_1$  entonces  $\sigma T = T$  luego existe el elemento neutro  $e_H$  tal que  $\sigma T = T_{e_H}$ , de donde  $\sigma \in G_2$ .  $\square$

El primer grupo de simetría *mide* la unosimetría de la tabla, el segundo *mide* la dosimetría *módulo*  $D_4$  — pues el auténtico grupo de dosimetría es el subgrupo de  $D_4 \times H$  que se indicó.

La unosimetría es la simetría *global* de una tabla; la dosimetría es la *coherencia* entre la simetría *global* de la tabla y la simetría *local* de sus componentes.

### 1.3 Tresimetría

En la sección precedente un grupo cualquiera  $H$  actúa de manera arbitraria sobre el conjunto  $X$  mientras el grupo diédrico  $D_4$  actúa de manera natural sobre el conjunto  $M(X)$  de tablas cuadradas con componentes de  $X$ .

Supóngase ahora que el grupo que actúa sobre el conjunto de componentes  $X$  es el mismo grupo de los movimientos rígidos del cuadrado,  $D_4$ . Además de lo dicho en las secciones anteriores, ahora cabe la posibilidad —remota— de que al realizar un movimiento rígido con una tabla, esto induzca entre sus componentes una permutación que corresponde al *mismo* movimiento rígido, realizado *en sentido contrario*.

**Definición.** Fijado un movimiento rígido  $\sigma \in D_4$ , una tabla  $T \in M(X)$  es *tresimétrica respecto a  $\sigma$*  si  $\sigma T = T_{\sigma^{-1}}$ .

**Ejemplo.** La tabla presentada en la página 2 es tresimétrica respecto a todos los movimientos rígidos del cuadrado, considerando la acción natural de  $D_4$  sobre el conjunto  $X = \{ \boxtimes, \boxminus, \boxplus, \boxtimes, \boxtimes, \boxtimes, \boxtimes, \boxtimes, \boxtimes, \boxtimes \}$ .

Una tabla es tresimétrica respecto a un movimiento de orden 1 o 2 (repose, reflexión en cualquier diagonal o en cualquier eje, rotación en 180 grados) si y solo si al realizarlo con la tabla, esto induce entre sus componentes el mismo movimiento. En efecto, en este caso  $\sigma^{-1} = \sigma$ .



Cuando una tabla es tresimétrica respecto a una reflexión, al colocar un espejo físico sobre el eje de reflexión y en el plano perpendicular a la tabla, la imagen especular es *exactamente* igual a la cara oculta de la tabla — este fenómeno se observa en la tabla de la página 2 así como en el *Espejo Mágico* de Escher [4]. Más aun, cuando una tabla es tresimétrica respecto a cualquier movimiento rígido, al escribirla en una superficie plana transparente y realizar el movimiento en cuestión con la superficie, la imagen final es *exactamente* igual a la inicial — de nuevo, eso sucede con la tabla de la página 2.

De cualquier tabla  $T$  puede considerarse el conjunto de todos los movimientos rígidos respecto a los cuales ella es tresimétrica, denotado  $G_3(T)$ .

$$G_3(T) = \{ \sigma \in D_4 \mid \sigma T = T_{\sigma^{-1}} \} = \{ \sigma \in D_4 \mid \sigma T_\sigma = T \}$$

De nuevo, es importante resaltar que  $G_3$  depende de la acción de  $D_4$  sobre el conjunto  $X$ .

**Teorema 5.** *Para cualquier tabla  $T$ ,  $G_3(T)$  es un subgrupo del grupo diédrico  $D_4$ .*

*Demostración.*  $i \in G_3$  pues  $iT = T = T_i = T_{i^{-1}}$ . Si  $\sigma, \tau \in G_3$  entonces  $\sigma\tau T = \sigma(\tau T) = \sigma(T_{\tau^{-1}}) = (\sigma T)_{\tau^{-1}} = (T_{\sigma^{-1}})_{\tau^{-1}} = T_{\tau^{-1}\sigma^{-1}} = T_{(\sigma\tau)^{-1}}$ , de donde  $\sigma\tau \in G_3$ . Si  $\sigma \in G_3$  entonces  $\sigma^{-1}T = \sigma^{-1}(\sigma(T_\sigma)) = (\sigma^{-1}\sigma)T_\sigma = iT_\sigma = T_\sigma = T_{(\sigma^{-1})^{-1}}$ , así que también  $\sigma^{-1} \in G_3$ .  $\square$

De nuevo, como las dos acciones de  $D_4$  sobre  $M(X)$  conmutan entonces corresponden a una acción del grupo producto  $D_4 \times D_4$ ; para cada tabla  $T \in M(X)$  el conjunto

$$\{ (\sigma, \sigma) \mid \sigma T = T_{\sigma^{-1}} \} = \{ (\sigma, \sigma) \mid \sigma T_\sigma = T \}$$

es un subgrupo del grupo producto;  $G_3(T)$  es la proyección en  $D_4$  de este subgrupo.

**Convención.** Sea  $T$  cualquier tabla cuadrada. El *tercer grupo de simetría* de  $T$  relativo a la acción de  $D_4$  sobre  $X$  es  $G_3(T)$ .

Como se espera y como se aprecia en los ejemplos siguientes, el tercer grupo de simetría mide la tresimetría de la tabla.

**Ejemplos.** El grupo  $D_4$  actúa de manera natural sobre cualquier conjunto con cuatro elementos si estos se colocan en los vértices de un cuadrado. Por ejemplo, la ubicación

1	2
3	4

corresponde a la siguiente acción en el conjunto  $X = \{1, 2, 3, 4\}$ .

	1	2	3	4
Reposo	1	2	3	4
Rotación $90^\circ$ ( $\curvearrowright$ )	3	1	4	2
Rotación $180^\circ$	4	3	2	1
Rotación $270^\circ$ ( $\curvearrowleft$ )	2	4	1	3
Reflexión en diagonal ppal	1	3	2	4
Reflexión en 2ª diagonal	4	2	3	1
Reflexión en eje vertical	2	1	4	3
Reflexión en eje horizontal	3	4	1	2

A continuación se indican los grupos de simetría —referentes a esta acción— de algunas tablas. En vez de describir el subgrupo en sí, se consignan los grupos a los cuales son isomorfos: por ejemplo  $V$  y  $\mathbb{Z}_4$  tienen ambos cuatro elementos pero no son isomorfos pues el último es cíclico y el primero no. En realidad, las copias de  $V$  que aparecen en la lista corresponden a dos subgrupos diferentes de  $D_4$ .

tabla $T$	$G_1(T)$	$G_2(T)$	$G_3(T)$
$\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{array}$	0	$D_4$	$D_4$
$\begin{array}{cc} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{array}$	0	$D_4$	$\mathbb{Z}_4$
$\begin{array}{cc} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{array}$	0	$D_4$	$V$
$\begin{array}{ccc} 1 & & \\ 3 & 2 & \\ & & 4 \end{array}$	0	$D_4$	$\mathbb{Z}_4$
$\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{array}$	0	$V$	$\mathbb{Z}_2$
$\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{array}$	$\mathbb{Z}_2$	$V$	0

Las últimas dos tablas mostradas ilustran el hecho de que, en general, no se tiene  $G_1 \subseteq G_3$  ni  $G_3 \subseteq G_1$ . La relación siguiente, por el contrario, es evidente de las definiciones pues una tabla es tresimétrica respecto a  $\sigma$  si y solo si es dosimétrica respecto a  $\sigma$  y  $\sigma^{-1}$ .

**Teorema 6.** *Para cualquier tabla cuadrada  $T$ , el tercer grupo de simetría es un subgrupo del segundo. En símbolos:*

$$G_3(T) \subseteq G_2(T).$$

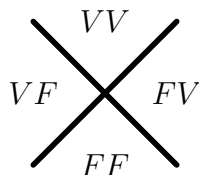
El primer grupo de simetría *mide* la unosimetría de la tabla, el segundo *mide* la dosimetría *módulo*  $D_4$  y el tercero *mide* la tresimetría.

La unosimetría es la simetría *global* de una tabla; la dosimetría es la *coherencia* entre la simetría global y la simetría local de sus componentes; la tresimetría es la *coincidencia* entre la simetría global de la tabla y la simetría local de sus componentes.

## Capítulo 2

### Las tablas de Peirce

Como se indicó en la Introducción, en 1902 Peirce propuso una notación para los dieciséis conectivos proposicionales binarios. La idea de Peirce es sencilla en extremo: la tabla de verdad que define un conectivo binario tiene cuatro renglones, cada uno de los cuales puede ser V o F; el símbolo  $\times$  tiene cuatro cuadrantes, cada uno de los cuales puede dejarse abierto o bien cerrarse uniendo los extremos correspondientes. La convención adoptada es la siguiente.



La tabla 2.1 (página 20) contiene la lista de los conectivos con sus signos respectivos. Peirce también propuso y empleó variantes cursivas de estos símbolos para facilitar su escritura, variantes que en esta monografía solo se emplean en la presentación de las tablas originales (tablas 1, 2, 3).

En su búsqueda sistemática de tautologías, Peirce procedió como sigue. Inicialmente escogía una *forma*, una expresión de lógica proposicional en la cual no solo las proposiciones sino también los conectivos son incógnitas;

VV	F	F	F	F	V	V	V	V	F	F	F	F	V	V	V	V
VF	F	F	F	V	F	V	F	F	V	V	F	V	F	V	V	V
FV	F	F	V	F	F	F	V	F	V	F	V	V	V	F	V	V
FF	F	V	F	F	F	F	F	V	F	V	V	V	V	V	F	V
	⊠	⊠	⊠	⊠	⊠	⊠	⊠	⊠	⊠	⊠	⊠	⊠	⊠	⊠	⊠	⊠
	⊡	∧	<	>	∨	△	▽	∞	8	∇	▽	⋈	∞	∞	⋈	×
								=								

Tabla 2.1: Notación de Peirce para los conectivos binarios (1902).

luego, empleando propiedades de su notación, establecía todas —o muchas de— las *sustituciones* de los conectivos que hicieran una tautología de la forma.

Además de sus variantes, las formas estudiadas por Peirce son las siguientes.

$$\begin{aligned}
 &x \text{ O } x \\
 &x \diamond (x \text{ O } x) \\
 &(x \diamond x) \text{ O } (x \heartsuit x) \\
 &(x \diamond y) \text{ O } (x \heartsuit y) \\
 &(x \spadesuit y) \heartsuit [(y \clubsuit z) \diamond (x \text{ O } z)]
 \end{aligned}$$

Aquí O,  $\diamond$ ,  $\heartsuit$ ,  $\spadesuit$  y  $\clubsuit$  son *variables* y en cada forma se buscan los valores tales que la expresión es verdadera para *cualesquier* proposiciones  $x, y, z$ .

En el análisis de tres de estas formas, Peirce consignó todas sus soluciones en sendas tablas... *¡tresimétricas!* En este capítulo se presenta de manera sucinta el estudio de las diferentes formas y se investigan las simetrías de las tablas que surgen.

## 2.1 Primera Forma

La expresión  $x \text{ O } x$  corresponde a un conectivo de aridad 1 luego, en principio, puede tomar cuatro valores:  $V, F, x, \bar{x}$  ( $= \text{no } x$ ). Para obtener el primero se requiere que el conectivo  $\text{O}$  asigne  $V$  a las parejas  $VV, FF$  —las únicas que pueden intervenir—, lo cual en la notación de Peirce equivale a que los cuadrantes superior e inferior estén abiertos. Así, los conectivos  $\text{O}$  que hacen de esta expresión una tautología son  $\boxtimes, \boxtimes, \boxtimes, \times$ .

De igual manera se analizan los otros tres valores posibles de  $x \text{ O } x$ , forma que induce una *clasificación* de los conectivos binarios mostrada por Peirce en la tabla 1 (página 3) [2]. Una versión de esta tabla aparece en 4.268 de *Collected Papers* [15] (4.268 significa apartado 268 del volumen 4), pero por desgracia los editores en vez de reproducir los signos introducidos por Peirce los sustituyeron por “un simbolismo más convencional”. En 4.270 de la obra citada, Peirce rotula las cuatro clases con las letras  $\mathcal{N}, \mathcal{E}, \mathcal{W}, \mathcal{S}$ . La tabla 2.2 es la misma tabla 1 de Peirce, con la notación ‘no cursiva’ y con los cuadrantes rotulados como él lo indicó.

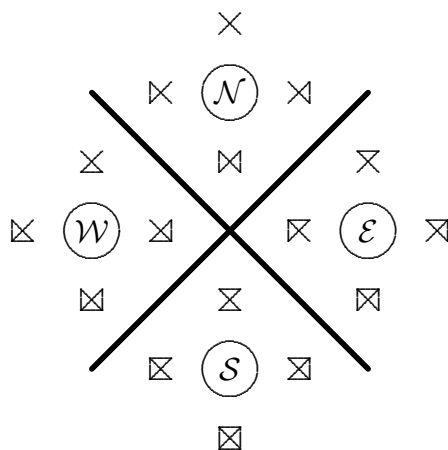


Tabla 2.2: Clasificación de los conectivos según  $x \text{ O } x$ .

Si  $\text{O} \in \mathcal{N}$  entonces  $x \text{ O } x$  es una tautología; si  $\text{O} \in \mathcal{W}$ , la forma equivale

a  $x$ ; si  $O \in \mathcal{E}$  entonces  $x \circ x$  es  $\bar{x}$ ; y si  $O \in \mathcal{S}$ , es siempre  $F$ . La ubicación de las cuatro clases en una gran  $\times$  es coherente con la convención para cada signo: en el cuadrante superior siempre  $V$ , en el inferior siempre  $F$ , etcétera.

Esta forma aporta 4 tautologías.

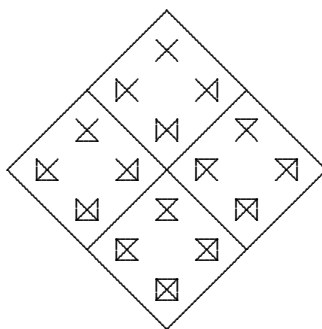


Tabla 2.3: Clasificación de los conectivos (Tabla inclinada).

Para analizar su simetría, la tabla 2.2 puede presentarse de manera más concisa como la tabla 2.3. Esta tabla no es unosimétrica respecto a ningún movimiento rígido salvo el reposo, de hecho no tiene ninguna componente repetida, luego  $G_1 = 0$ . Es claro que la reflexión de la tabla en el eje vertical corresponde a una rotación en 180 grados de cada uno de los signos componentes y que ningún otro movimiento rígido tiene un efecto semejante, luego  $G_2 = \mathbb{Z}_2$  y  $G_3 = 0$ .

La dosimetría mencionada en el párrafo anterior se refiere a la acción natural de  $D_4$  sobre los signos de Peirce. Sobre este conjunto también actúa el grupo  $\mathbb{Z}_2 \times D_4$  (el 0 de  $\mathbb{Z}_2$  deja invariante el signo, el 1 lo ‘complementa’: cambia los cuadrantes abiertos en cerrados y viceversa [7, 8]) y respecto a esta acción, la rotación de la tabla 2.3 en 180 grados corresponde a complementar cada signo mientras la reflexión en el eje horizontal de la tabla corresponde a una rotación en 180 grados seguida del complemento. En este caso, entonces,  $G_2 = V$  y  $G_3 = 0$ .

No es posible distribuir los conectivos en una tabla inclinada que tenga tresimetría no trivial. Sin embargo, la reflexión de la tabla 2.4 en su diagonal

principal corresponde a la misma reflexión de los conectivos —en el mismo sentido o en sentido contrario—, luego  $G_1 = 0$ ,  $G_2 = \mathbb{Z}_2$  y  $G_3 = \mathbb{Z}_2$ .

$\mathcal{N}$	$\mathcal{E}$	$\mathcal{W}$	$\mathcal{S}$
$\times$	$\bowtie$	$\times$	$\boxtimes$
$\boxtimes$	$\boxtimes$	$\boxtimes$	$\boxtimes$
$\times$	$\bowtie$	$\times$	$\boxtimes$
$\boxtimes$	$\boxtimes$	$\boxtimes$	$\boxtimes$

Tabla 2.4: Clasificación de los conectivos (Tabla horizontal).

## 2.2 Segunda Forma

El análisis de la expresión  $x \diamond (x \text{ O } x)$  es sencilla en la medida en que contiene la forma  $x \text{ O } x$ , estudiada de manera completa en el apartado 2.1. Por ejemplo si  $\text{O} \in \mathcal{N}$  entonces  $x \text{ O } x$  es una tautología, de manera que la segunda forma se reduce a  $x \diamond V$ ; para que esta forma sea tautología, basta que  $\diamond$  asigne  $V$  a los valores  $VV$  y  $FV$  —los únicos posibles—; en la notación de Peirce, esto equivale a que los cuadrantes superior y derecho estén abiertos. De esta manera, las parejas  $(\diamond, \text{O})$  que arrojan una tautología de la segunda forma con  $\text{O} \in \mathcal{N}$  son  $(\boxtimes, \text{O})$ ,  $(\boxtimes, \text{O})$ ,  $(\times, \text{O})$  y  $(\times, \text{O})$ .

De la misma manera se analizan las otras tres elecciones posibles de  $\text{O}$ . Los resultados se consignan en la tabla 2.5 (página 24), no presentada antes ni por Peirce ni por otros investigadores.

Cada punto de la tabla 2.5 representa 4 fórmulas —el conectivo  $\text{O}$  puede escogerse de un subconjunto de tantos conectivos— luego hay 64 tautologías de la forma  $x \diamond (x \text{ O } x)$ . De la forma variante  $(x \text{ O } x) \diamond x$  hay otras 64 tautologías, de manera que en total se han encontrado ya 132 tautologías.

Es evidente que la tabla 2.5 no presenta simetría alguna, a menos que los integrantes de las clases  $\mathcal{N}$ ,  $\mathcal{W}$ ,  $\mathcal{E}$ ,  $\mathcal{S}$  se distribuyan de manera simétrica respecto al eje vertical, obteniendo unosimetría forzada respecto a este eje.



		O			
		$\mathcal{N}$	$\mathcal{W}$	$\mathcal{E}$	$\mathcal{S}$
$\diamond$	$\boxtimes$				
	$\boxtimes$				
	$\boxtimes$				
	$\boxtimes$				
	$\boxtimes$				
	$\boxtimes$				
	$\boxtimes$	•			
	$\boxtimes$	•			
	$\boxtimes$	•			
	$\boxtimes$	•			
	$\boxtimes$				
	$\boxtimes$	•			•
	$\boxtimes$	•	•		
	$\boxtimes$	•			
	$\boxtimes$	•	•		
$\boxtimes$	•	•	•	•	

Tabla 2.5: Tautologías de la forma  $x \diamond (x O x)$ .

### 2.3 Tercera Forma

Como antes, el estudio de la expresión  $(x \diamond x) O (x \heartsuit x)$  se basa en la clasificación inducida por la forma  $x O x$ . Si  $\diamond \in \mathcal{N}$  y  $\heartsuit \in \mathcal{N}$ , la forma se reduce a  $V O V$  que es tautología si  $O$  asigna  $V$  a la pareja  $VV$ , es decir, si su cuadrante superior está abierto. De esta manera, las ternas  $(\diamond, O, \heartsuit)$  con  $\diamond \in \mathcal{N}$ ,  $\heartsuit \in \mathcal{N}$  que arrojan una tautología de esta forma son  $(\diamond, \boxtimes, \heartsuit)$ ,  $(\diamond, \boxtimes, \heartsuit)$ ,  $(\diamond, \boxtimes, \heartsuit)$ ,  $(\diamond, \boxtimes, \heartsuit)$ ,  $(\diamond, \boxtimes, \heartsuit)$ ,  $(\diamond, \boxtimes, \heartsuit)$ ,  $(\diamond, \boxtimes, \heartsuit)$  y  $(\diamond, \boxtimes, \heartsuit)$ . Como otro ejemplo, si  $\diamond \in \mathcal{N}$  y  $\heartsuit \in \mathcal{W}$  entonces la forma se reduce a  $V O x$  que es tautología si  $O$  asigna  $V$  a las parejas  $VV$  y  $VF$ ,

es decir, si están abiertos sus cuadrantes superior e izquierdo. Las ternas  $(\diamond, \circ, \heartsuit)$  con  $\diamond \in \mathcal{N}$ ,  $\heartsuit \in \mathcal{W}$  que arrojan una tautología de esta forma son  $(\diamond, \boxtimes, \heartsuit)$ ,  $(\diamond, \boxtimes, \heartsuit)$ ,  $(\diamond, \boxtimes, \heartsuit)$  y  $(\diamond, \times, \heartsuit)$ .

De esta manera pueden estudiarse los dieciséis casos posibles. Hasta donde se sabe, ni Peirce ni otros investigadores han consignado los resultados en una tabla, pero es sencillo hacerlo con la técnica empleada por Peirce para las otras formas. En cada caso, se escoge el conectivo con más cuadrantes cerrados que haga tautología la expresión estudiada. Por ejemplo, para  $\diamond \in \mathcal{N}$ ,  $\heartsuit \in \mathcal{N}$  se escoge  $\boxtimes$ ; para  $\diamond \in \mathcal{N}$ ,  $\heartsuit \in \mathcal{W}$  se escoge  $\boxtimes$ . Todas las demás soluciones se obtienen abriendo uno por uno los cuadrantes cerrados del conectivo elegido, en todas las formas posibles. En el primer ejemplo se consigna  $\boxtimes$  y las soluciones posibles son  $\boxtimes, \boxtimes, \boxtimes, \boxtimes, \boxtimes, \boxtimes, \boxtimes, \boxtimes$ ; en el segundo ejemplo se registra  $\boxtimes$  y las soluciones posibles son  $\boxtimes, \boxtimes, \boxtimes, \boxtimes$ .

La tabla 2.6 contiene todos los conectivos ‘máximos’. En la intersección de la fila  $\mathcal{N}$  y la columna  $\mathcal{N}$  está  $\boxtimes$ ; en la intersección de la fila  $\mathcal{N}$  y la columna  $\mathcal{W}$  está  $\boxtimes$ .

		$\heartsuit$			
		$\mathcal{N}$	$\mathcal{S}$	$\mathcal{W}$	$\mathcal{E}$
$\diamond$	$\mathcal{N}$	$\boxtimes$	$\boxtimes$	$\boxtimes$	$\boxtimes$
	$\mathcal{S}$	$\boxtimes$	$\boxtimes$	$\boxtimes$	$\boxtimes$
	$\mathcal{W}$	$\boxtimes$	$\boxtimes$	$\boxtimes$	$\boxtimes$
	$\mathcal{E}$	$\boxtimes$	$\boxtimes$	$\boxtimes$	$\boxtimes$

Tabla 2.6: Tautologías de la forma  $(x \diamond x) \circ (x \heartsuit x)$ .

¿Cuántas tautologías contiene la tabla 2.6? Si en la casilla  $i$  aparece un conectivo con  $n_i$  cuadrantes cerrados, está representando un conjunto de  $2^{n_i}$  posibles soluciones. La suma  $\sum 2^{n_i}$  es 80 pero esa cantidad debe multiplicarse por 16, el número de las posibles elecciones de la pareja  $(\diamond, \heartsuit)$  —cada componente puede elegirse de un conjunto de 4 elementos—. Así hay 1280 tautologías de la forma  $(x \diamond x) \circ (x \heartsuit x)$ , para un total acumulado de

1412 tautologías.

La tabla 2.6 no es unosimétrica respecto a ningún movimiento rígido no trivial —pues contiene más de una componente que no se repite—, es decir,  $G_1 = 0$ . La reflexión de la tabla en la diagonal principal corresponde a la reflexión en el eje vertical de las componentes, de hecho  $G_2 = \mathbb{Z}_2$  y  $G_3 = 0$ .

Pero si se cambia el orden de las filas y las columnas, la simetría aumenta de manera considerable. La tabla 2.7 es la misma 2.6 cambiando el orden  $\mathcal{N} - \mathcal{S} - \mathcal{W} - \mathcal{E}$  por  $\mathcal{N} - \mathcal{E} - \mathcal{W} - \mathcal{S}$ .

♡

	$\mathcal{N}$	$\mathcal{E}$	$\mathcal{W}$	$\mathcal{S}$
◇	$\mathcal{N}$	⊗	⊗	⊗
	$\mathcal{E}$	⊗	⊗	⊗
	$\mathcal{W}$	⊗	⊗	⊗
	$\mathcal{S}$	⊗	⊗	⊗

Tabla 2.7: Forma  $(x \diamond x)$  O  $(x \heartsuit x)$ .

En la tabla 2.7, además de la dosimetría mencionada en la anterior, la reflexión de la tabla en la segunda diagonal corresponde a la reflexión en el eje horizontal de las componentes y, por lo tanto, la rotación en 180 grados de la tabla corresponde a la misma rotación de los signos. Más aun, la reflexión de la tabla en el eje vertical corresponde a la reflexión en la diagonal principal de los signos; la reflexión de la tabla en el eje horizontal corresponde a la reflexión en la segunda diagonal de los signos; por lo tanto, la rotación en 90 grados de la tabla corresponde a la misma rotación —en el mismo sentido— de las componentes. Así,  $G_1 = 0$ ,  $G_2 = D_4$ ,  $G_3 = \mathbb{Z}_2$ .

Peirce presentó sus diversas tablas siempre inclinadas (◇). Al inclinar la tabla 2.7... *jaumenta la tresimetría!*

En la presentación 2.8, las reflexiones de la tabla en los ejes corresponden a los mismos movimientos rígidos de las componentes —en sentido contrario, porque son de orden 2— luego ahora  $G_1 = 0$ ,  $G_2 = D_4$ ,  $G_3 = V$ .

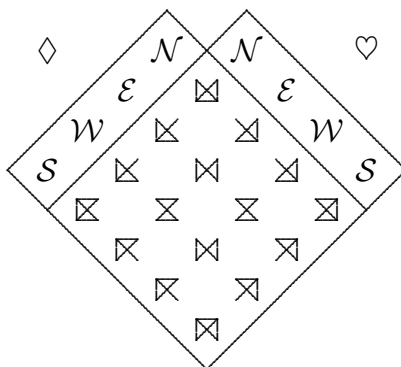


Tabla 2.8: Forma  $(x \diamond x)$  O  $(x \heartsuit x)$  (Tabla inclinada).

Otra manera sorprendente de aumentar la tresimetría de la tabla 2.7 es reflejándola en su diagonal principal, pues mientras la simetría respecto a las reflexiones se mantiene, la rotación en 90 grados de la tabla corresponde a la misma rotación *en sentido contrario* de las componentes. En la tabla 2.9 se tiene  $G_1 = 0$ ,  $G_2 = D_4$ ,  $G_3 = \mathbb{Z}_4$ .

		◊			
		N	E	W	S
♥	N	⊠	⊠	⊠	⊠
	E	⊠	⊠	⊠	⊠
	W	⊠	⊠	⊠	⊠
	S	⊠	⊠	⊠	⊠

Tabla 2.9: Forma  $(x \diamond x)$  O  $(x \heartsuit x)$  (Tabla traspuesta).

Ahora tal vez ya no es tan extraño el hecho de que al inclinar la tabla 2.9, o lo que es lo mismo, al reflejar la tabla 2.8 en el eje vertical, se recibe una tabla *tresimétrica*: en la 2.10 se tiene  $G_1 = 0$ ,  $G_2 = D_4$ ,  $G_3 = D_4$ .

La tabla puesta como ejemplo al principio de este trabajo (página 2) se obtuvo de la tabla 2.10 cambiando el orden  $\mathcal{N} - \mathcal{E} - \mathcal{W} - \mathcal{S}$  por el orden  $\mathcal{S} - \mathcal{E} - \mathcal{W} - \mathcal{N}$ . Otra tabla tresimétrica es la 2.11 (página 28), obtenida de la tabla 2.8 intercambiando solo tres pares de componentes. Su lectura para

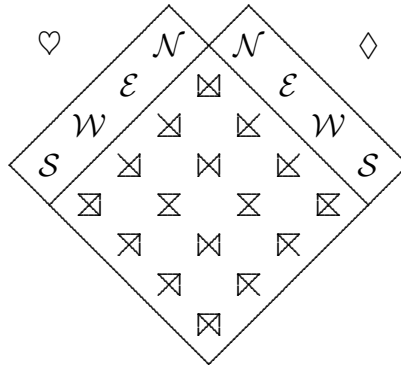


Tabla 2.10: Forma  $(x \diamond x) \text{ O } (x \heartsuit x)$  (Presentación tresimétrica).

las tautologías de la forma  $(x \diamond x) \text{ O } (x \heartsuit x)$ , sin embargo, se complica pues en ella cada cuadrante tiene sus propios rótulos.

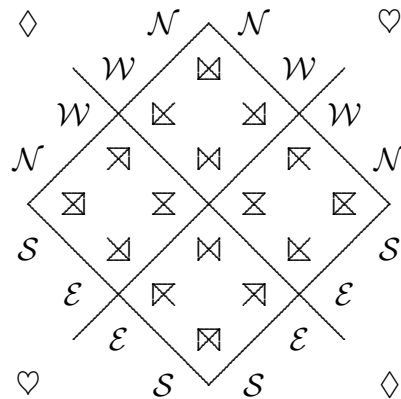


Tabla 2.11: Forma  $(x \diamond x) \text{ O } (x \heartsuit x)$  (Otra presentación tresimétrica).

## 2.4 Cuarta Forma

La expresión  $(x \diamond y) \text{ O } (x \heartsuit y)$  se diferencia de manera sutil de la forma estudiada en el apartado 2.3. En vez de una variable proposicional ahora

aparecen dos —lo cual hace disminuir el número de tautologías posibles— pero aparecen de manera ordenada —lo cual permite considerar de manera simultánea las expresiones  $x \diamond y$  y  $x \heartsuit y$ —. La técnica empleada por Peirce para encontrar todas las tautologías de esta forma consiste en escoger de manera libre los conectivos  $\diamond$  y  $\heartsuit$  y, a partir de ellos, encontrar los conectivos  $\circ$  que hagan siempre verdadera la expresión analizada. Por ejemplo, si  $\diamond$  es  $\boxtimes$  y  $\heartsuit$  es  $\bowtie$  entonces  $x \diamond y$  siempre es  $F$  y  $x \heartsuit y$  puede tomar los valores  $V$  y  $F$ , luego se requiere que  $\circ$  asigne  $V$  a las combinaciones  $FV$  y  $FF$  o, lo que es lo mismo, que sus cuadrantes derecho e inferior estén abiertos: en este caso, las soluciones posibles para  $\circ$  son  $\boxtimes$ ,  $\bowtie$ ,  $\boxtimes$ ,  $\times$ . Si  $\diamond$  es  $\boxtimes$  y  $\heartsuit$  es  $\boxtimes$  entonces  $x \diamond y$  toma los valores  $F, F, F, V$  —en ese orden— mientras  $x \heartsuit y$  toma los valores  $V, F, F, V$ ; la forma  $(x \diamond y) \circ (x \heartsuit y)$  se reduce a las cuatro posibilidades  $F \circ V, F \circ F, F \circ F, V \circ V$ ; para obtener una tautología se requiere que  $\circ$  asigne  $V$  a las parejas  $FV, FF, VV$ , es decir, que sus cuadrantes superior, derecho e inferior estén abiertos; las soluciones posibles para  $\circ$  son  $\boxtimes$  y  $\times$ .

Como en el apartado anterior, la tabla 2.12 (página 30) contiene en cada casilla el conectivo  $\circ$  máximo que arroja una tautología de esta forma. En la intersección de la fila  $\boxtimes$  y la columna  $\bowtie$  está  $\boxtimes$ ; en la intersección de la fila  $\boxtimes$  y la columna  $\boxtimes$  está  $\boxtimes$ .

La suma  $\sum 2^{n_i}$  para la tabla 2.12 es 680 luego el número total de tautologías encontradas hasta el momento asciende a 2092. Aunque Peirce no lo hizo, con facilidad podría estudiarse la forma variante  $(x \diamond y) \circ (y \heartsuit x)$ , para lo cual sería suficiente ‘convertir’ (reflejar en el eje vertical) el conectivo  $\heartsuit$  en la tabla 2.12. Esto aportaría otras 680 tautologías nuevas para un total acumulado de 2772.

Basta observar las esquinas de la tabla 2.12 para probar que no es unisimétrica respecto a movimiento rígido alguno, de manera que  $G_1 = 0$ . Las dosimetrías son más ricas: la reflexión de la tabla en la diagonal principal corresponde a la reflexión de cada componente en el eje vertical, mientras la

♡

	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗
⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗
⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗
⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗
⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗
⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗
⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗
⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗
⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗
⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗
⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗
⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗
⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗
⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗
⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗
⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗
⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗
⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗
⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗
⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗

Tabla 2.12: Tautologías de la forma  $(x \diamond y) \text{ O } (x \heartsuit y)$ .

reflexión en la segunda diagonal corresponde a la reflexión de cada signo en el eje horizontal. De manera *simétrica*, la reflexión de la tabla en el eje vertical corresponde a la reflexión de cada componente en la diagonal principal y la reflexión de la tabla en el eje horizontal equivale a la reflexión de cada signo en la segunda diagonal. La rotación de la tabla en 90 grados —en cualquier sentido— equivale a la rotación de las componentes en 90 grados —en el mismo sentido—, luego la rotación de la tabla en 180 grados corresponde a la rotación de cada signo en 180 grados —en el mismo sentido o en el sentido contrario, pues este movimiento es de orden 2—. En resumen,  $G_2 = D_4$  mientras  $G_3 = \mathbb{Z}_2$ .

Tabla 2.13: Forma  $(x \diamond y) \text{ O } (x \heartsuit y)$  (Tabla inclinada).

Obsérvese que las dosimetrías de esta tabla corresponden *de manera exacta* a las de la tabla 2.7. En realidad, la ‘subtabla’  $4 \times 4$  de la tabla 2.12 obtenida al considerar solo las filas y columnas  $\boxtimes - \boxtimes - \boxtimes - \times$  es la tabla 2.7 rotada 180 grados.

Una versión de esta tabla 2.12 aparece en 4.273 de *Collected Papers* [15], con la notación usada por los editores. De la tabla presentada allí, los editores



dicen que “es una representación más clara (y precisa) de la tabla dada por Peirce, en razón de una reducción en el número de signos usados”. El estudio presente permite refutar de manera técnica esa afirmación: el grupo  $D_4$  no actúa de manera *natural* sobre el conjunto de signos colocados por los editores, y la dosimetría y tresimetría de la tabla 2.12 se ocultan totalmente.

La tabla original dada por Peirce para este caso es inclinada y, al igual que en el caso anterior, con ello aumenta la tresimetría: en la tabla 2.13 (página 31) se tiene  $G_1 = 0$ ,  $G_2 = D_4$  y  $G_3 = V$ . Salvo el orden de los conectivos, esta es la misma tabla 2 (página 4) elaborada por Peirce en 1902 [2].

Igual que en la sección 2.3, si la tabla 2.12 se refleja en la diagonal principal su tresimetría aumenta a  $G_3 = \mathbb{Z}_4$ ; si la tabla de Peirce (cualquiera de las tablas 2 o 2.13) se refleja en el eje vertical —cambiando los lugares de  $\diamond$  y  $\heartsuit$ — resulta una tabla tresimétrica, esto es, con  $G_3 = D_4$ .

## 2.5 Quinta Forma

Es evidente que el estudio de la forma  $(x \spadesuit y) \heartsuit [(y \clubsuit z) \diamond (x \circ z)]$  es más complejo que el de las formas anteriores, pues aumenta el número de variables proposicionales y el de conectivos. Para esta forma Peirce renuncia a encontrar *todas* las tautologías, como lo ha logrado en las formas anteriores, y se conforma con *algunas*. Por ejemplo, no cuenta las  $16^4 = 65536$  tautologías ‘triviales’ que se obtienen cuando el conectivo principal  $\heartsuit$  es  $\times$ .

La técnica empleada por Peirce puede describirse como sigue. En primer lugar, se escogen los conectivos  $\heartsuit$ ,  $\diamond$  de tal manera que la forma auxiliar  $P\heartsuit(Q\diamond R)$  sea verdadera excepto quizás para cierta combinación preestablecida de valores para  $P$ ,  $Q$ ,  $R$ . Luego se determinan los conectivos  $\spadesuit$ ,  $\clubsuit$ ,  $\circ$  de tal manera que las tres proposiciones  $(x \spadesuit y)$ ,  $(y \clubsuit z)$ ,  $x \circ z$  no tomen los valores establecidos. Por una razón muy precisa —que no se explica aquí— Peirce rotuló las combinaciones preestablecidas con  $\boxtimes$ ,  $\boxtimes$ ,  $\boxtimes$  y  $\boxtimes$ .

Sin entrar en los detalles del cálculo de las tablas, el procedimiento para encontrar tautologías es el siguiente. En primer lugar se escoge un pivote del conjunto  $\{\boxtimes, \boxtimes, \boxtimes, \boxtimes\}$ . En segunda instancia y con la tabla 2.14, se toma una pareja de conectivos  $(\heartsuit, \diamond)$  entre las dos asignadas al pivote elegido.

pivote	$\boxtimes$	$\boxtimes$	$\boxtimes$	$\boxtimes$
$\heartsuit \diamond$	$\times \times$	$\times \times$	$\times \times$	$\times \times$
	$\times \boxtimes$	$\times \boxtimes$	$\times \boxtimes$	$\times \boxtimes$

Tabla 2.14: Conectivos  $\heartsuit, \diamond$  para la forma  $(x \spadesuit y) \heartsuit [(y \clubsuit z) \diamond (x O z)]$ .

Para los conectivos restantes se procede como en el apartado 2.4. Se toman de manera libre dos conectivos  $\spadesuit, \clubsuit$ ; en la esquina superior izquierda de la tabla 2.15 (página 34) se busca el pivote escogido; en la columna del pivote se toma  $\spadesuit$  y en la fila del mismo se toma  $\clubsuit$ ; al interior de la tabla, en el cruce de la fila y la columna correspondientes, se encuentra el conectivo máximo  $O$  que completa la tautología.

Por ejemplo, se escoge el pivote  $\boxtimes$ . De la tabla 2.14 se toma  $(\heartsuit, \diamond) = (\times, \boxtimes)$ . Se escogen  $(\spadesuit, \clubsuit) = (\boxtimes, \times)$  y la tabla 2.15 indica —buscando  $\boxtimes$  en la segunda columna exterior y  $\times$  en la primera fila exterior— que puede tomarse  $O = \boxtimes$  o cualquier conectivo obtenido de él abriendo sus cuadrantes cerrados. Luego

$$(x \boxtimes y) \times [(y \times z) \boxtimes (x \boxtimes z)]$$

es una tautología.

La suma  $\sum 2^{n_i}$  para la tabla 2.15 es 1699, cantidad que debe multiplicarse por la cantidad de pivotes y luego por la de opciones que da la tabla 2.14 a cada pivote, así que este método arroja 13592 tautologías de la forma  $(x \spadesuit y) \heartsuit [(y \clubsuit z) \diamond (x O z)]$ . Pero el mismo Peirce consideró las siguientes doce variantes de esta forma, que pueden atacarse con el mismo método —de hecho, la tabla 2.15 sirve para todas las variantes—.

⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗
⊗	⊗	×	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗
⊗	×	×	×	×	×	×	⊗	×	×	⊗	×	⊗	⊗	⊗	⊗
⊗	⊗	×	×	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	×	⊗	⊗	⊗	⊗
⊗	×	×	⊗	×	×	×	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗
⊗	⊗	×	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗
⊗	⊗	×	⊗	⊗	×	×	×	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗
⊗	⊗	×	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗
⊗	⊗	×	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗
⊗	⊗	×	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗
⊗	⊗	×	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗
⊗	⊗	×	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗
⊗	⊗	×	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗
⊗	⊗	×	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗
⊗	⊗	×	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗
⊗	⊗	×	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗
⊗	⊗	×	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗
⊗	⊗	×	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗
⊗	⊗	×	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗
⊗	⊗	×	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗
⊗	⊗	×	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗
⊗	⊗	×	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗

Tabla 2.15: Conectivos ♠, ♣, O para la forma  $(x ♠ y) ♥ [(y ♣ z) ◇ (x O z)]$ .

$(x ♠ y) ♥ [(y ♣ z) ◇ (x O z)]$	$[(x ♠ y) ◇ (y ♣ z)] ♥ (x O z)$
$(x ♠ y) ♥ [(x O z) ◇ (y ♣ z)]$	$[(x ♠ y) ◇ (x O z)] ♥ (y ♣ z)$
$(y ♣ z) ♥ [(x ♠ y) ◇ (x O z)]$	$[(y ♣ z) ◇ (x ♠ y)] ♥ (x O z)$
$(y ♣ z) ♥ [(x O z) ◇ (x ♠ y)]$	$[(y ♣ z) ◇ (x O z)] ♥ (x ♠ y)$
$(x O z) ♥ [(x ♠ y) ◇ (y ♣ z)]$	$[(x O z) ◇ (x ♠ y)] ♥ (y ♣ z)$
$(x O z) ♥ [(y ♣ z) ◇ (x ♠ y)]$	$[(x O z) ◇ (y ♣ z)] ♥ (x ♠ y)$

Luego la cantidad de tautologías asciende a  $1699 \times 4 \times 2 \times 12 = 163104$ . En 4.271 de *Collected Papers* [15] se indica un total de 24376, que debe ser  $24576 = 256 \times 4 \times 2 \times 12$ , producto obtenido de considerar una tautología por cada casilla de la tabla 2.15 en vez de  $2^{n_i}$ . El gran total de tautologías halladas por Peirce en las diversas formas estudiadas es entonces 165876.

Se ve de inmediato que la tabla 2.15 no es unosimétrica ni dosimétrica respecto a movimiento rígido alguno, luego  $G_1 = 0$ ,  $G_2 = 0$  y  $G_3 = 0$ . El segundo grupo de simetría se conserva al inclinar la tabla, luego en este caso no se gana simetría con ese solo cambio.

Pero Peirce no sólo inclinó la tabla, también *cambió el orden de las filas*. Intercambiando solo cuatro parejas de filas —correspondientes a los 8 conectivos no conmutativos [7, 8]— se logra que las dos columnas exteriores de la tabla 2.15 sean la imagen especular de las dos filas exteriores: en el puesto  $i$  de la columna no está siempre el mismo conectivo que está en el puesto  $i$  de la fila, sino el que se obtiene de él por reflexión en el eje vertical. Al inclinar luego la tabla, esa propiedad se extiende a todo el contenido y la tabla interior  $16 \times 16$  es *tresimétrica respecto a la reflexión en el eje vertical*. En la tabla 2.16 (página 36) se tiene  $G_1 = 0$ ,  $G_2 = \mathbb{Z}_2$ ,  $G_3 = \mathbb{Z}_2$ .

De nuevo, salvo el orden de los conectivos, esta tabla 2.16 es la misma tabla 3 (página 5) dada por Peirce para sintetizar sus resultados en la búsqueda de tautologías de la quinta forma. A la asombrosa tabla de Peirce está ligada una historia casi simbólica: en *Collected Papers* [15] no aparece, pero se la confunde con la tabla 2.12 (página 30); estuvo perdida durante muchos años en el inmenso legado manuscrito de Peirce; fue reubicada y comprendida apenas en las últimas décadas del siglo XX [2].

La tabla 2.16 contiene varias subtablas cuadradas simétricas. Por ejemplo

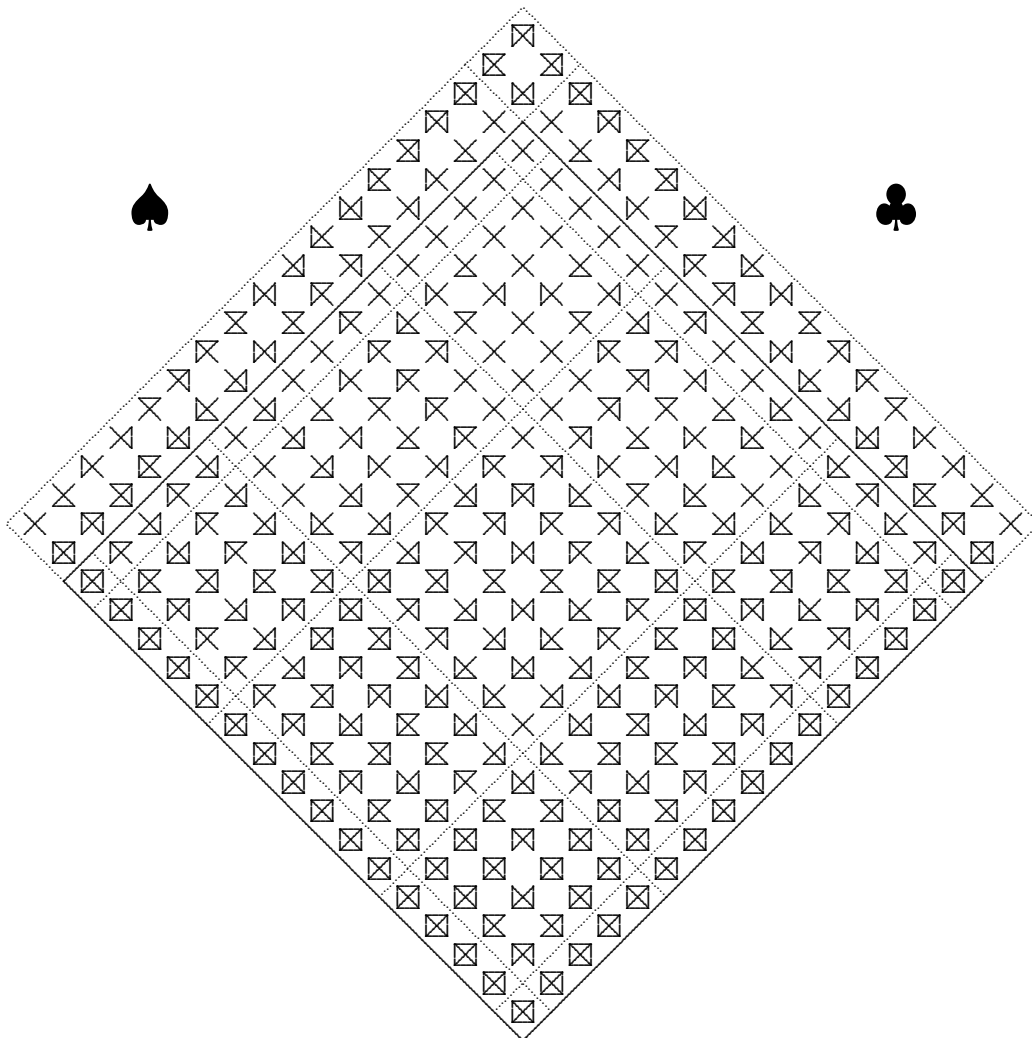


Tabla 2.16: Forma  $(x \spadesuit y) \heartsuit [(y \clubsuit z) \diamond (x \circ z)]$  (Tabla inclinada).

si las filas y columnas se agrupan como sigue:

$$2 - 3 - 4 - 5$$

$$6 - 7 - 10 - 11$$

$$12 - 13 - 14 - 15$$

entonces aparecen nueve bloques  $4 \times 4$ : el cruce de las filas 2 - 5 con las columnas 12 - 15, el cruce de las filas 6 - 7 - 10 - 11 con las columnas 2 - 5, etcétera. Todos estos bloques son tresimétricos respecto a la rotación en 180 grados mientras los bloques sobre el eje vertical son, además, tresimétricos respecto a la reflexión en los ejes. Es decir, se distinguen por lo menos seis subtablas  $4 \times 4$  con  $G_3 = \mathbb{Z}_2$  y tres con  $G_3 = V$ .

La tabla 2.16 —sin inclinar— se obtuvo de la 2.15 reflejando en el eje vertical los conectivos de las columnas exteriores y alterando así el orden de las filas. Puede verificarse que al realizar el mismo experimento con todos los movimientos rígidos, solo en cuatro casos se obtiene una tabla con dosimetría no trivial. En dos casos la reflexión de la tabla en la diagonal principal corresponde a la reflexión de los conectivos en el eje vertical mientras en los otros dos corresponde a la reflexión de los conectivos en el eje horizontal. Por lo tanto, con este método sólo pueden obtenerse *dos* tablas con tresimetría no trivial: una es la tabla 2.16 —devida a Peirce—, la otra es la tabla 2.17 (página 38). En la tabla 2.17, en el puesto  $i$  de la columna exterior está el conectivo que se obtiene por rotación en 90 grados del que está en el puesto  $i$  de la correspondiente fila. De nuevo  $G_1 = 0$ ,  $G_2 = \mathbb{Z}_2$ ,  $G_3 = \mathbb{Z}_2$  y esta tabla tiene las mismas subtablas simétricas  $4 \times 4$  indicadas en la tabla 2.16.

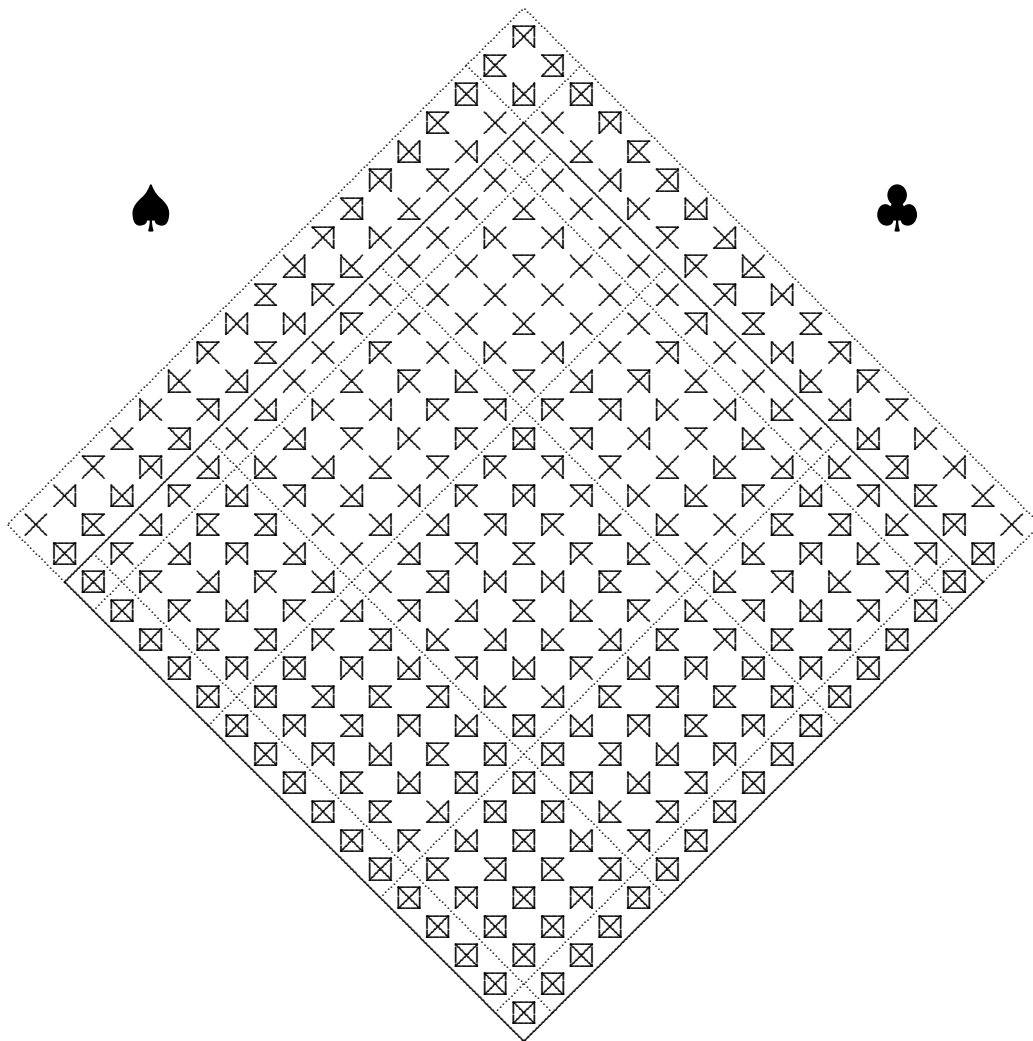


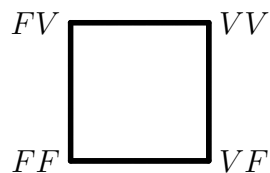
Tabla 2.17: Forma  $(x \spadesuit y) \heartsuit [(y \clubsuit z) \diamond (x \circ z)]$  (Otra tabla inclinada).

## Capítulo 3

# Tablas con la notación de Zellweger

Durante las últimas décadas del siglo XX, el investigador norteamericano Shea Zellweger desarrolló una notación para los conectivos binarios [1, 19]. Él mismo indica que su trabajo es “una continuación directa de lo que se encuentra en Peirce”, pero introduce varios cambios pequeños que conducen a una notación que, además de compartir el carácter icónico de la notación debida a Peirce, presenta algunas ventajas sobre ésta como el hecho de que la mayoría de los signos empleados son letras del alfabeto común y las demás son variantes de ellas.

La idea fundamental de la notación de Zellweger es la siguiente: los cuatro vértices de un cuadrado pueden marcarse con un punto grueso que indica que se asigna  $V$  a la correspondiente combinación de valores de verdad. La convención adoptada es la siguiente.





En cada caso, los vértices marcados sugieren ‘ramas’ del símbolo. La tabla 3.1 muestra los conectivos con sus signos respectivos.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
VV	F	F	F	F	V	V	V	V	F	F	F	F	V	V	V	V
VF	F	F	F	V	F	V	F	F	V	V	F	V	F	V	V	V
FV	F	F	V	F	F	F	V	F	V	F	V	V	V	F	V	V
FF	F	V	F	F	F	F	F	V	F	V	V	V	V	V	F	V
	□	◻	◻	◻	◻	◻	◻	◻	◻	◻	◻	◻	◻	◻	◻	◻
	o	p	b	q	d	c	u	s	z	n	ɔ	h	μ	rl	y	x

Tabla 3.1: Notación de Zellweger para los conectivos binarios.

Por su construcción a partir de un cuadrado, sobre este conjunto de signos también actúa de manera natural el grupo diédrico  $D_4$  pero esta acción *no coincide* con la acción natural sobre la notación de Peirce. Por ejemplo el signo  $\bowtie$  representa el mismo conectivo que el signo **c**; la reflexión en el eje vertical de  $\bowtie$  es  $\bowtie$  que corresponde a **u** mientras la reflexión en el eje vertical de **c** es **ɔ** que corresponde a  $\bowtie$ . Este hecho hace que si las tablas

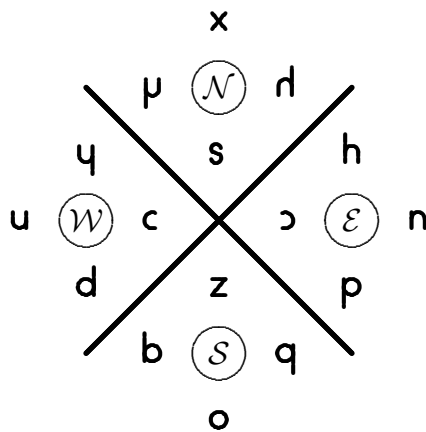


Tabla 3.2: Clasificación de los conectivos según  $x$  O  $x$ .

de la sección 2 se miran con la notación de Zellweger entonces, aunque la unosimetría y dosimetría se conservan, la tresimetría con seguridad cambia. Con el fin de profundizar en las simetrías presentadas por Peirce, en este apartado se repasarán sus tablas con la notación nueva.

La tabla 3.2 (página 40) corresponde a la tabla 2.2 (página 21) y resume el estudio de la forma  $x \circ x$ . Como allí,  $G_3 = 0$ .

La tabla 3.3 es una distribución de los signos por ‘niveles’, casi igual a la tabla 2.4 (página 23), en la cual de nuevo la reflexión de la tabla en el eje vertical corresponde al mismo movimiento rígido de los conectivos:  $G_3 = \mathbb{Z}_2$ . No es posible distribuir estos signos de manera similar en una tabla horizontal ( $\square$ ) con tresimetría no trivial.

				$\mathcal{N}$				
			$x$		$\varepsilon$			
		$n$		$h$		$w$		
	$\mu$		$n$		$y$		$S$	
$s$		$c$		$c$		$z$		
	$p$		$u$		$q$			
		$d$		$b$				
			$o$					

Tabla 3.3: Clasificación de los conectivos (Tabla por niveles).

La tabla correspondiente al estudio de la forma  $x \diamond (x \circ x)$  es la misma tabla 2.5 (página 24) y no vale la pena repetirla.

La tabla 3.4 (página 42) es la tabla dosimétrica que surge en el estudio de la forma  $(x \diamond x) \circ (x \heartsuit x)$  (tabla 2.7, página 26), con la notación de Zellweger. La reflexión de esta tabla en la diagonal principal corresponde a la reflexión de los conectivos en la segunda diagonal y viceversa —luego no se gana tresimetría al inclinarla como se hizo en el apartado 2.3—; la reflexión de la tabla en el eje vertical corresponde a la reflexión de los conectivos en el eje horizontal y viceversa; la rotación de la tabla en 90 grados corresponde

		♥			
		N	E	W	S
◇	N	<b>d</b>	<b>c</b>	<b>c</b>	<b>q</b>
	E	<b>u</b>	<b>s</b>	<b>z</b>	<b>n</b>
	W	<b>u</b>	<b>z</b>	<b>s</b>	<b>n</b>
	S	<b>b</b>	<b>o</b>	<b>o</b>	<b>p</b>

Tabla 3.4: Tautologías de la forma  $(x \diamond x) \text{ O } (x \heartsuit x)$ .

a la misma rotación de los conectivos en sentido contrario. Así,  $G_1 = 0$ ,  $G_2 = D_4$ ,  $G_3 = \mathbb{Z}_4$ : obsérvese que, en este caso, se ha ganado un poco de tresimetría con el cambio de notación.

Al rotar esta tabla 3.4 en 90 grados —o, lo que es lo mismo, reflejarla en la diagonal principal y luego en el eje horizontal— se obtiene la tabla 3.5 que es tresimétrica en el sentido de que  $G_3 = D_4$ .

		◇			
		N	E	W	S
♥	S	<b>q</b>	<b>n</b>	<b>n</b>	<b>p</b>
	W	<b>c</b>	<b>z</b>	<b>s</b>	<b>o</b>
	E	<b>c</b>	<b>s</b>	<b>z</b>	<b>o</b>
	N	<b>d</b>	<b>u</b>	<b>u</b>	<b>b</b>

Tabla 3.5: Forma  $(x \diamond x) \text{ O } (x \heartsuit x)$  (Tabla tresimétrica).

Al traducir a la notación de Zellweger la tabla 2.12 (página 30) correspondiente a la forma  $(x \diamond y) \text{ O } (x \heartsuit y)$ , se obtiene la tabla 3.6 (página 43). De nuevo, las dosimetrías de esta tabla coinciden con las de la tabla 3.4 y aquí también se tiene  $G_1 = 0$ ,  $G_2 = D_4$ ,  $G_3 = \mathbb{Z}_4$  ganando un poco de simetría sobre la tabla 2.12. Al igual que en la forma anterior, basta rotar 90 grados la tabla 3.6 para obtener la tresimetría  $G_3 = D_4$ , es la tabla 3.7 (página 44).

En el estudio de la forma  $(x \spadesuit y) \heartsuit [(y \clubsuit z) \diamond (x \text{ O } z)]$ , la tabla para



	o	p	b	q	d	c	u	s	z	n	o	h	ρ	η	γ	x	
o	p	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	b
p	n	s	h	h	h	h	h	ρ	h	ρ	ρ	ρ	ρ	ρ	z	u	
b	n	h	s	h	h	h	ρ	h	ρ	h	ρ	ρ	ρ	z	ρ	u	
q	n	h	h	s	h	ρ	h	h	ρ	ρ	h	ρ	z	ρ	ρ	u	
d	n	h	h	h	s	ρ	ρ	ρ	h	h	h	z	ρ	ρ	ρ	u	
c	n	h	h	η	η	s	x	x	x	x	z	γ	γ	ρ	ρ	u	
u	n	h	η	h	η	x	s	x	x	z	x	γ	ρ	γ	ρ	u	
s	n	η	h	h	η	x	x	s	z	x	x	γ	ρ	ρ	γ	u	
z	n	h	η	η	h	x	x	z	s	x	x	ρ	γ	γ	ρ	u	
n	n	η	h	η	h	x	z	x	x	s	x	ρ	γ	ρ	γ	u	
o	n	η	η	h	h	z	x	x	x	x	s	ρ	ρ	γ	γ	u	
h	n	η	η	η	z	γ	γ	γ	η	η	η	s	γ	γ	γ	u	
ρ	n	η	η	z	η	γ	η	η	γ	γ	η	γ	s	γ	γ	u	
η	n	η	z	η	η	η	γ	η	γ	η	γ	γ	γ	s	γ	u	
γ	n	z	η	η	η	η	η	γ	η	γ	γ	γ	γ	γ	s	u	
x	q	c	c	c	c	c	c	c	c	c	c	c	c	c	c	d	

Tabla 3.6: Tautologías de la forma  $(x \diamond y) \text{ O } (x \heartsuit y)$ .

los conectivos ♠, ♣, O (tabla 2.15) no es dosimétrica respecto a movimiento rígido alguno,  $G_2 = 0$ , y eso no se altera al cambiar la notación luego no vale la pena repetir aquí dicha tabla.

Al variar el orden de las filas de la tabla 2.15 (página 34) con la notación de Zellweger, realizando todos los movimientos rígidos posibles sobre los conectivos en las columnas exteriores, de nuevo se obtienen solo cuatro tablas con dosimetría no trivial. Ahora en dos casos la reflexión de la tabla en la diagonal principal corresponde a la reflexión de los conectivos en la misma diagonal mientras en los otros dos corresponde a la reflexión de los

◇

	o	p	b	q	d	c	u	s	z	n	o	h	p	d	y	x
x	b	u	u	u	u	u	u	u	u	u	u	u	u	u	u	d
y	o	z	p	p	p	p	p	y	p	y	y	y	y	y	s	c
d	o	p	z	p	p	p	y	p	y	p	y	y	y	s	y	c
p	o	p	p	z	p	y	p	p	y	y	p	y	s	y	y	c
h	o	p	p	p	z	y	y	y	p	p	p	s	y	y	y	c
o	o	p	p	h	h	z	x	x	x	x	s	d	d	y	y	c
n	o	p	h	p	h	x	z	x	x	s	x	d	y	d	y	c
z	o	h	p	p	h	x	x	z	s	x	x	d	y	y	d	c
s	o	p	h	h	p	x	x	s	z	x	x	y	d	d	y	c
u	o	h	p	h	p	x	s	x	x	z	x	y	d	y	d	c
c	o	h	h	p	p	s	x	x	x	x	z	y	y	d	d	c
d	o	h	h	h	s	d	d	d	h	h	h	z	d	d	d	c
q	o	h	h	s	h	d	h	h	d	d	h	d	z	d	d	c
b	o	h	s	h	h	h	d	h	d	h	d	d	d	z	d	c
p	o	s	h	h	h	h	d	h	d	d	d	d	d	z	c	
o	p	n	n	n	n	n	n	n	n	n	n	n	n	n	n	q

♡

Tabla 3.7: Forma  $(x \diamond y) \cup (x \heartsuit y)$  (Tabla tresimétrica).

conectivos en la segunda diagonal. Así pues, con este método sólo pueden obtenerse dos tablas con tresimetría no trivial, ambas horizontales y en ambas  $G_1 = 0$ ,  $G_2 = \mathbb{Z}_2$ ,  $G_3 = \mathbb{Z}_2$ . En la tabla 3.8 (página 45), las columnas exteriores se obtienen de las filas correspondientes por rotación de 90 grados de cada conectivo; en la tabla 3.9 (página 46), por reflexión en la diagonal principal. A pesar de la ‘isomorfía’ aparente, el orden de las filas *no* es el mismo que en las tablas 2.16 y 2.17.

p	q	o	p	b	q	d	c	u	s	z	n	▷	h	μ	η	γ	x
b	d	x	γ	η	μ	h	▷	n	z	s	u	c	d	q	b	p	o
o	x	x	x	x	x	x	n	x	x	u	x	u	n	u	n	o	o
q	μ	x	x	x	μ	h	▷	n	h	μ	u	x	u	n	b	p	o
p	γ	x	x	x	γ	η	c	n	η	γ	u	x	u	n	d	q	o
d	h	x	μ	h	x	x	x	n	μ	h	u	▷	b	p	u	n	o
b	η	x	γ	η	x	x	x	n	γ	η	u	c	d	q	u	n	o
u	n	x	u	n	x	x	x	n	u	n	u	o	o	o	u	n	o
▷	c	c	c	c	c	c	c	q	c	c	d	c	d	q	d	q	o
z	s	x	γ	η	μ	h	▷	n	z	s	u	c	d	q	b	p	o
s	z	x	μ	h	γ	η	c	n	s	z	u	▷	b	p	d	q	o
c	▷	▷	▷	▷	▷	▷	p	▷	▷	b	▷	b	p	b	p	o	o
n	u	x	x	x	u	n	o	n	n	u	u	x	u	n	o	o	o
η	b	▷	▷	▷	b	p	o	p	p	b	b	▷	b	p	o	o	o
h	d	c	c	c	d	q	o	q	q	d	d	c	d	q	o	o	o
γ	p	▷	b	p	▷	▷	▷	p	b	p	b	o	o	o	b	p	o
μ	q	c	d	q	c	c	c	q	d	q	d	o	o	o	d	q	o
x	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o

Tabla 3.8: Forma  $(x \spadesuit y) \heartsuit [(y \clubsuit z) \diamond (x \circ z)]$  (Primera tabla tresimétrica).

p	q	o	p	b	q	d	c	u	s	z	n	▷	h	μ	η	γ	x
b	d	x	γ	η	μ	h	▷	n	z	s	u	c	d	q	b	p	o
o	x	x	x	x	x	x	n	x	x	u	x	u	n	u	n	o	o
d	h	x	μ	h	x	x	n	μ	h	u	▷	b	p	u	n	o	o
b	η	x	γ	η	x	x	n	γ	η	u	c	d	q	u	n	o	o
q	μ	x	x	x	μ	h	▷	n	h	μ	u	x	u	n	b	p	o
p	γ	x	x	x	γ	η	c	n	η	γ	u	x	u	n	d	q	o
n	u	x	x	x	u	n	o	n	n	u	u	x	u	n	o	o	o
▷	c	c	c	c	c	c	q	c	c	d	c	d	q	d	q	o	o
s	z	x	μ	h	γ	η	c	n	s	z	u	▷	b	p	d	q	o
z	s	x	γ	η	μ	h	▷	n	z	s	u	c	d	q	b	p	o
c	▷	▷	▷	▷	▷	▷	p	▷	▷	b	▷	b	p	b	p	o	o
u	n	x	u	n	x	x	x	n	u	n	u	o	o	o	u	n	o
γ	p	▷	b	p	▷	▷	▷	p	b	p	b	o	o	o	b	p	o
μ	q	c	d	q	c	c	c	q	d	q	d	o	o	o	d	q	o
η	b	▷	▷	▷	b	p	o	p	p	b	b	▷	b	p	o	o	o
h	d	c	c	c	d	q	o	q	q	d	d	c	d	q	o	o	o
x	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o

Tabla 3.9: Forma  $(x \spadesuit y) \heartsuit [(y \clubsuit z) \diamond (x \circ z)]$  (Segunda tabla tresimétrica).

# Conclusiones

El estudio presentado en esta monografía puede conducir a diversas reflexiones, algunas de las cuales se indican a continuación.

- El desarrollo del trabajo enfatiza un mensaje implícito en la teoría de los signos formulada por Peirce: *la elección de una notación es relevante, más aun, puede jugar un papel decisivo en el trabajo en cuestión*. Por ejemplo con la notación usual de los conectivos, las tablas de Peirce ni siquiera podrían escribirse por falta de signos; con la notación empleada por los editores de *Collected Papers* [15], las simetrías observadas en ellas se pierden del todo. La relevancia de la notación, ya subrayada antes por Leibniz (véase por ejemplo [11]), por desgracia se pasa por alto muchas veces en matemáticas y en lógica
- En una tabla tresimétrica, la simetría *local* de las componentes armoniza con la simetría *global* de la tabla y a veces, incluso, la determina. Por ejemplo en algunas tablas con la notación de Peirce, la tresimetría solo se logra inclinando la tabla; en la misma tabla con la notación de Zellweger, la tresimetría solo se logra con la tabla horizontal. Esta interacción mutua entre lo local y lo global quizás puede —debe— verse como otra aparición del *continuo* de Peirce [18].
- Al final de su tesis sobre los gráficos existenciales de Peirce, Jay Zeman escribió: “...es otro tributo al poder de los gráficos y al ingenio



del hombre que pensó por primera vez en ellos” [20]. En todos los trabajos alrededor del legado de Charles S. Peirce vuelven a encontrarse la agudeza y la versatilidad de su mente privilegiada. En este caso, no solo el diseño de la notación y el planteamiento de la búsqueda de tautologías —y su solución— son geniales, también lo es el hecho de que para presentar sus resultados Peirce siempre escogió con exactitud la manera más (tre)simétrica y sencilla.

# Bibliografía

- [1] Glenn Clark and Shea Zellweger, *Let the mirrors do the thinking*, Mount Union Magazine **93** (1993), 2–5.
- [2] Glenn Clark, *New light on Peirce's iconic notation for the sixteen binary connectives*, in: Nathan Houser, Don D. Roberts and James Van Evra (Eds.), *Studies in the Logic of Charles Sanders Peirce*, Indiana University Press, Bloomington and Indianapolis (1997), 304–333.
- [3] Gerard Deledalle, *Leer a Peirce Hoy*, Gedisa, Barcelona, 1996.
- [4] M. C. Escher, *Estampas y Dibujos*, Taschen, Köln, 1992.
- [5] Ramón Eduardo Fandiño Arbeláez, *Reflexión de Matrices y Palíndromía con Resultados Estadísticos*, Tesis de Magister (Estadística), Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, 1984.
- [6] John B. Fraleigh, *A First Course in Abstract Algebra* (Third Edition), Addison-Wesley, Reading (Massachusetts), 1982.
- [7] Mireya García, Jhon Fredy Gómez y Arnold Oostra, *Simetría y Lógica: La notación de Peirce para los 16 conectivos binarios*, Memorias del XII Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones, Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá (2001) 1–26.

- [8] Mireya García y Jhon Fredy Gómez, *Notación de Peirce para los Conectivos Binarios*, Tesis (Matemáticos), Universidad del Tolima, Ibagué, 2002.
- [9] Kenneth Hoffman y Ray Kunze, *Álgebra Lineal*, Prentice-Hall Hispanoamericana, México, 1971.
- [10] Nathan Houser, *Introduction: Peirce as logician*, in: Nathan Houser, Don D. Roberts and James Van Evra (Eds.), *Studies in the Logic of Charles Sanders Peirce*, Indiana University Press, Bloomington and Indianapolis (1997), 1–22.
- [11] Frederick C. Kreiling, *Leibniz*, in: Morris Kline (Ed.), *Mathematics: An Introduction to its Spirit and Use*, W. H. Freeman, San Francisco (1978), 33–38.
- [12] Serge Lang, *Algebra*, Addison-Wesley, Reading (Massachusetts), 1965.
- [13] Saunders MacLane and Garrett Birkhoff, *Algebra*, MacMillan, London, 1967.
- [14] Arnold Oostra, *Acercamiento lógico a Peirce*, Boletín de Matemáticas - Nueva Serie **VII** (2000), 60–77.
- [15] Charles S. Peirce, *Collected Papers of Charles Sanders Peirce*, vols. 1–6, Charles Hartshorne and Paul Weiss (Eds.), Harvard University Press, 1931–1934.
- [16] Humberto Sarria, *Algunos problemas de preservación lineal sobre los espacios de matrices simétricas, antisimétricas y hermitianas*, Revista de la Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, **XXVI** 99 (2002), 261–270.

- [17] Fernando Zalamea, *Una jabalina lanzada hacia el futuro: anticipos y aportes de C. S. Peirce a la lógica matemática del siglo XX*, *Mathesis* **9** (1993), 391–404.
- [18] Fernando Zalamea, *El Continuo Peirceano. Aspectos globales y locales de genericidad, reflexividad y modalidad: Una visión del continuo y la arquitectónica pragmática peirceana desde la lógica matemática del siglo XX*, Universidad Nacional de Colombia, Facultad de Ciencias, Bogotá, 2001.
- [19] Shea Zellweger, *Untapped potential in Peirce's iconic notation for the sixteen binary connectives*, in: Nathan Houser, Don D. Roberts and James Van Evra (Eds.), *Studies in the Logic of Charles Sanders Peirce*, Indiana University Press, Bloomington and Indianapolis (1997), 334–386.
- [20] J. Jay Zeman, *The Graphical Logic of C. S. Peirce*, Ph. D. dissertation, University of Chicago, 1964.

Arnold Oostra  
Departamento de Matemáticas y Estadística  
Universidad del Tolima  
AA 546  
Ibagué, COLOMBIA  
oostra@bunde.tolinet.com.co