Annexe I[c].

Erste Note zu Herrn Peirce's Mittheilung

„De l'influence du trépied sur l'oscillation du pendule à réversion"

von Th. von Oppolzer.

Mit Beibehaltung der Bezeichnungen, die Herr Peirce gewählt hat, erscheint das Problem auf die Integration der beiden simultanen Differentialgleichungen

$$l \frac{d^2 \phi}{dt^2} + \frac{d^2 \varsigma}{dt^2} = - g\phi \quad (1),$$

$$h \frac{d^2 \phi}{dt^2} + \frac{d^2 \varsigma}{dt^2} = - \frac{\varepsilon\varsigma}{\mathrm{M}} \quad (2),$$

zurückgeführt. Die Integration dieser Gleichungen kann nun in wesentlich einfacherer Form, als dies in der angezogenen Abhandlung geschehen ist, vorgenommen werden, und da dadurch das allgemeine Verständniss dieser so wichtigen Abhandlung mir in Etwas erleichtert erscheint, so meine ich die folgende Beweisführung nicht unterdrücken zu sollen.

Es wird ς im Allgemeinen eine Funktion von ϕ sein. Man wird daher der für ein unbewegliches Stativ und für kleine Amplituden geltenden bekannten Differentialgleichung für die Bewegung eines Pendels

$$L \frac{d^2 \phi}{dt^2} = - g\phi \quad (3)$$

durch Variation der Constante L in $[l + f(\phi)]$ für die Beweglichkeit des Stativs genügen können, wo $f(\phi)$ eine vorerst nicht näher bekannte Funktion darstellt; man wird also haben

$$[l + f(\phi)] \frac{d^2 \phi}{dt^2} = - g\phi \quad (4).$$

Substituirt man den aus dieser Gleichung für $l\,\frac{d^2\phi}{dt^2}$ resultirenden Werth in die Gleichung (1) ein, so wird man sofort erhalten

$$f(\phi)\,\frac{d^2\phi}{dt^2} = \frac{d^2\varsigma}{dt^2} \quad (5).$$

Die Integration wird ergeben

$$F(\phi) = \varsigma \quad (6),$$

wobei $F(\phi)$ eine vorerst wieder völlig unbestimmte Funktion sein wird.

Substituirt man diese Werthe für ς und $\frac{d^2\varsigma}{dt^2}$ aus den Gleichungen (5) und (6) in die Gleichung (2), und ersetzt ε gemäss der Peirce'schen Definition, dass

$$\varepsilon = \frac{g}{S},$$

wobei S die durch den horizontalen Zug der Gewichtseinheit bewirkte Verschiebung des Schneidenlagers vorstellt, so folgt unmittelbar

$$\frac{d^2\phi}{dt^2}\,[h + f(\phi)] = -\,\frac{g}{SM}\,F(\phi);$$

ersetzt man überdies $\frac{d^2\phi}{dt^2}$ in dieser letzten Gleichung durch den aus (4) resultirenden Werth, so erhält man nach einer einfachen Umsetzung

$$\frac{h + f(\phi)}{l + f(\phi)}\,SM = \frac{F(\phi)}{\phi} \quad (7).$$

Bedenkt man die solide Construktion des Dreifusses, so wird man sofort zugeben, dass $f(\phi)$ und S nothwendig kleine Grössen sein müssen, vernachlässigt man dabei, wie dies Herr Peirce ebenfalls thut, die Producte (also die zweiten Dimensionen) derselben, so verwandelt sich (7) in

$$\frac{h\,SM}{l} = \frac{F(\phi)}{\phi} \quad (8).$$

Diese Gleichung lehrt, da links vom Gleichheitszeichen eine Constante steht, dass die unbekannte Funktion $F(\phi)$ nothwendig von der Form

$$F(\phi) = \gamma\phi \quad (9)$$

sein muss, da sonst der Relation (8) für die verschiedenen Werthe von ϕ nicht genügt werden könnte.

Hiermit nimmt die Gleichung (6) die Gestalt an:

$$\varsigma = \gamma\phi \quad (10),$$

und die zweimalige Differentiation ergibt

$$\frac{d^2 \varsigma}{dt^2} = \gamma \frac{d^2 \phi}{dt^2} \quad (11),$$

woraus durch Substitution in die Gleichung (1) resultirt

$$(l + \gamma) \frac{d^2 \phi}{dt^2} = - g\phi \quad (12).$$

Vergleicht man nun diese Gleichung mit der Differentialgleichung (3) ,so resultirt sofort das von Herrn Peirce gefundene wichtige Resultat, dass die unmittelbar beobachtete Pendellänge um γ zu verbessern ist, nun ergibt sich aber aus der Verbindung der Gleichungen (8) und (9) das Peirce'sche Resultat

$$\gamma = \frac{h\,\mathrm{SM}}{l}.$$