NOTE

SUR LE

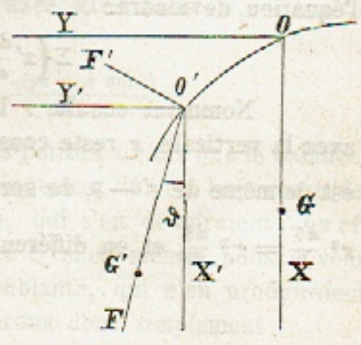
MOUVEMENT SIMULTANÉ D'UN PENDULE

ET

DE SES SUPPORTS

par Mr. Ch CELLÉRIER.

La mesure de la gravité au moyen du pendule s'effectue, dans les observations modernes, avec une extrême précision; il doit être tenu compte de causes perturbatrices qui, dans d'autres phénomènes physiques, seraient de nulle importance. Parmi ces causes il en est une qui, à ce que nous croyons, n'a pas encore été étudiée et dont l'influence a pu affecter quelques-unes des mesures déjà faites: nous voulons parler de l'oscillation ou du balancement des supports du pendule, mouvement très-faible à la vérité dans un appareil bien construit, mais qui existe nécessairement. Sa petitesse permet, comme nous allons le voir, d'apprécier avec une grande exactitude l'accroissement qui en résulte pour la durée des oscillations du pendule, en supposant qu'on donne à ces dernières une faible amplitude, comme on le fait ordinairement.



Supposons que G soit le centre de gravité du pendule dans sa position d'équilibre, et menons le plan de la figure par ce point perpendiculairement au tranchant du couteau de suspension qui le coupe en O. Prenons pour axes de coordonnées fixes la verticale OGX et l'horizontale OY.

Admettons ensuite que le couteau se déplace parallèlement à lui-même par suite du mouvement du support et rencontre le plan de la figure au point variable O' dont les coordonnées x_1, y_1, sont des fonctions du temps t. En même temps, G vient en G' sans sortir du plan de la figure; l'angle θ est celui de O′ G′ avec la verticale, considéré comme positif du côté de O Y, négatif du côté opposé; nommons h la distance $OG = O'G'$, de sorte que les nouvelles coordonnées du centre de gravité soient $x_1 + h \cos\theta$, $y_1 + h \sin\theta$; désignons aussi par m la masse du pendule; nous pourrons lui appliquer les équations différentielles du mouvement d'un solide, savoir:

$$\Sigma \frac{d^2x}{dt^2} . dm = \Sigma X, \ \Sigma \frac{d^2y}{dt^2} . dm = \Sigma Y,$$
$$\Sigma \left(x \frac{d^2y}{dt^2} - y \frac{d^2x}{dt^2} \right) dm = \Sigma R.$$

Les sommes des premiers membres s'étendent à tous les éléments de masse dm du pendule; celles des seconds membres à toutes les composantes X, Y des forces qui agissent sur lui, R étant le moment de chacune d'elles par rapport à un axe mené par O perpendiculairement au plan de la figure.

La pression du couteau sur le support se composant en grande partie du poids mg de l'appareil, nous représenterons ses composantes parallèles à OX, OY par $P + mg$ et Q; celles de l'action du support sur le pendule seront $-P - mg$ et $-Q$; son moment sera donc $y_1 (P + mg) - x_1 Q$; la seule autre force dont on ait à tenir compte est le poids mg appliqué en G′ et dont le moment est $-mg(y_1 + h \sin\theta)$; il en résulte:

$$\Sigma X = -P \qquad \Sigma Y = -Q$$
$$\Sigma R = y_1 P - x_1 Q - mgh \sin\theta$$

Multipliant les deux premières équations du mouvement par $y_1, -x_1$, et ajoutant à la 3^{me}, on trouve:

$$\Sigma \left[(x - x_1) \frac{d^2y}{dt^2} - (y - y_1) \frac{d^2x}{dt^2} \right] dm = - mgh \sin\theta$$

En nommant x', y', les coordonnées de dm par rapport à des axes O′X′, O′Y′ parallèles aux anciens, on aura $x = x_1 + x'$, $y = y_1 + y'$, et l'équation pourra s'écrire:

$$\frac{d^2y_1}{dt^2} \Sigma x' \, dm - \frac{d^2x_1}{dt^2} \Sigma y' \, dm + \Sigma \left(x' \frac{d^2y'}{dt^2} - y' \frac{d^2x'}{dt^2} \right) dm = - mgh \sin\theta.$$

Les coordonnées du centre de gravité par rapport aux nouveaux axes étant $h \cos\theta$, $h \sin\theta$, on aura $\Sigma x' \, dm = mh \cos. \theta$, $\Sigma y' \, dm = mh \sin\theta$, et en posant:

$$\mu' = mh \left[\sin\theta \frac{d^2x_1}{dt^2} - \cos\theta \frac{d^2y_1}{dt^2} \right]$$

l'équation deviendra:

$$\Sigma \left(x' \frac{d^2y'}{dt^2} - y' \frac{d^2x'}{dt^2} \right) dm = - mgh \sin\theta + \mu'.$$

Nommant ensuite r la distance de l'élément dm au couteau, θ' l'angle qu'elle fait avec la verticale, r reste constante pendant le mouvement pour un même élément, et il en est de même de $\theta' - \theta$, de sorte que $\frac{d\theta'}{dt} = \frac{d\theta}{dt}$; on a $x' = r \cos\theta'$, $y' = r \sin\theta'$, $\frac{x' \, dy' - y' \, dx'}{dt} = r^2 \frac{d\theta'}{dt} = r^2 \frac{d\theta}{dt}$, et en différentiant,

$$\frac{x' \, d^2y' - y' \, d^2x'}{dt^2} = r^2 \frac{d^2\theta}{dt^2};$$

en nommant C le moment d'inertie du pendule par rapport au couteau, on aura $\Sigma r^2 dm = C$, et l'équation prendra la forme:

$$C\frac{d^2\theta}{dt^2} = - mgh \sin\theta + \mu'.$$

En posant $l = \frac{C}{mh}$, on pourra l'écrire:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\sin\theta + \frac{\mu'}{mhl}.$$

Cette équation coïncide avec celle qui se trouve au § 4 d'un mémoire sur le pendule inséré dans les Mémoires de la Société de Physique de Genève, t. XVIII, 2me partie. Le nombre μ' est supposé très-petit, fonction du temps, et dû à une action troublante quelconque. Nous ne répéterons pas ici les calculs, basés sur la méthode de la variation des constantes arbitraires, par lesquels on trouve l'altération correspondante de la durée d'oscillation et de l'amplitude, et nous nous bornerons à définir les lettres employées: α est à chaque instant l'amplitude du mouvement qui se réaliserait si l'action troublante venait à cesser; ϕ est un angle défini par l'équation $\cos\theta = \cos\alpha \cos^2\phi + \sin^2\phi$, de sorte qu'il croît de o à π pendant une oscillation: u représente $\frac{\mu'}{2\, mg \sin\frac{1}{2}\alpha}$; si l'on nomme δ l'accroissement relatif de la durée d'oscillation de sorte qu'elle soit augmentée dans le rapport de 1 à $1+\delta$, et α_1 la diminution de l'amplitude pendant une oscillation, on trouve: $\delta = \frac{1}{\pi h}\int_0^\pi u \cos\phi\, d\phi$, $\alpha_1 = \frac{2}{h}\int_0^\pi u \tang\left(\frac{\alpha}{2}\right) \sin\phi\, d\phi$, en négligeant les termes de l'ordre de μ'^2.

En substituant les valeurs de μ' et de u, il en résulte, dans le cas actuel:

$$\delta = \frac{1}{2\pi g}\int_0^\pi \left[\sin\theta\, \frac{d^2 x_1}{dt^2} - \cos\theta \frac{d^2 y_1}{dt^2}\right] . \frac{\cos\phi}{\sin\frac{1}{2}\alpha} . d\phi.$$

Dans cette formule il faut substituer les valeurs de x_1, y_1 en fonction du temps, et pour cela chercher le vrai mouvement du point O', mouvement dû à la pression du pendule sur le support.

Pour cela reprenons les deux premières équations du mouvement, savoir:

$$\Sigma\frac{d^2x}{dt^2}\, dm = \Sigma X = - P, \qquad \Sigma\frac{d^2y}{dt^2} . dm = - Q;$$

les coordonnées du centre de gravité par rapport aux axes fixes étant $x_1 + h\cos\theta$, $y_1 + h\sin\theta$, ces équations pourront s'écrire:

$$P = - m\frac{d^2 . (x_1 + h\cos\theta)}{dt^2}, \qquad Q = - m\frac{d^2 . (y_1 + h\sin\theta)}{dt^2}$$

Ces valeurs des pressions P et Q ne sont point très-petites, tandis que le balancement des supports, ou le mouvement d'O', qui leur est uniquement dû, est imperceptible. Elles n'entrent donc dans les valeurs rigoureuses de x_1, y_1 qui s'en déduiraient, qu'affectées de très-faibles coefficients; par suite, dans P et Q elles-mêmes nous devons négliger x_1, y_1 ou les termes de l'ordre de l'action troublante, qui n'en produiraient dans δ que de l'ordre du carré de cette action. Nous aurons donc simplement:

$$P = -mh\frac{d^2.(\cos\theta)}{dt^2} = F\cos\theta - F'\sin\theta.$$

$$Q = -mh\frac{d^2.(\sin\theta)}{dt^2} = F\sin\theta + F'\cos\theta.$$

en posant:

$$F = -mh\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2, \qquad F' = -mh\frac{d^2\theta}{dt^2}.$$

On voit que P et Q pourraient être remplacées par deux forces F, F', dirigées, la première suivant O′ G′, la seconde à angle droit; la première est évidemment la force centrifuge. Dans les expressions de F, F′ nous devons considérer le mouvement comme non troublé, et substituer en conséquence:

$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\sin\theta$, $\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \frac{2g}{l}(\cos\theta - \cos\alpha)$, d'où résulte que la première devient maxima pour $\theta = o$, la seconde pour $\theta = \alpha$, ces valeurs maxima étant $\frac{mgh}{l}. 4\sin^2\frac{\alpha}{2}$, $\frac{mgh}{l}\sin\alpha$, ou sensiblement $\frac{mgh}{l}\alpha^2$, $\frac{mgh}{l}\alpha$;

la seconde est donc beaucoup plus grande, et par suite la pression est plus énergique dans le sens horizontal. Le mouvement du support, par suite de cette circonstance, devrait déjà être plutôt horizontal que vertical, et on verra en outre qu'il doit être considéré comme uniquement horizontal et rectiligne, parce que la courbe OO′ doit être symétrique de part et d'autre de O, et par suite tangente à OY; or elle peut, dans une très-petite étendue, être confondue avec la tangente. Nous devrons donc, dans la valeur de δ, négliger $\frac{d^2x_1}{dt^2}$ qui a d'ailleurs un faible coefficient $\sin\theta$.

Le mouvement du support est alors dû uniquement à la force horizontale Q; or on sait que, si celle-ci était constante, la déviation qui en résulterait pour le point O lui serait proportionnelle, de sorte qu'on aurait $y_1 = KQ$, K étant une constante; il en serait du moins ainsi après que le solide élastique formant le support aurait pris sa position d'équilibre. On peut dire que KQ est la valeur statique de l'écart y_1, mais il ne s'ensuit pas que ce soit sa valeur dynamique, ou qu'il soit encore égal à KQ quand Q est variable; on peut seulement conjecturer qu'il en est à peu près ainsi quand Q varie très-lentement. Nous allons cependant achever le calcul de δ dans cette hypothèse, et nous vérifierons ensuite que l'erreur dont elle peut être affectée est complétement négligeable. La valeur exacte de Q est:

$$Q = \frac{2gmh}{l}(\cos\theta - \cos\alpha)\sin\theta + \frac{mgh}{l}\sin\theta\cos\theta = \frac{mgh}{l}(\theta + \text{etc.}),$$

les termes suivants étant très-petits de l'ordre α^3 ou θ^3; on doit substituer dans la valeur de δ, $y_1 = KQ$, d'où

$$\frac{d^2y_1}{dt^2} = K\frac{d^2Q}{dt^2} = \frac{mghK}{l}\left(\frac{d^2\theta}{dt^2} + \text{etc.}\right) = \frac{Kmgh}{l}\left(-\frac{g}{l}\sin\theta + \text{etc.}\right).$$

Or, de la relation $\cos\theta = \cos\alpha\cos^2\phi + \sin^2\phi$, on tire:

$$\sin\theta = 2\sin\tfrac{1}{2}\alpha.\cos\phi\sqrt{1 - \sin^2\tfrac{1}{2}\alpha.\cos^2\phi},$$

et en supposant que α ne dépasse pas 2°, le radical précédent peut être remplacé par l'unité, l'erreur relative ne dépassant pas $\frac{1}{6000}$; on aura ainsi, en n'ayant égard qu'au premier terme de la série:

$$\frac{d^2 y_1}{dt^2} = -\frac{2\mathrm{K}mg^2 h}{l^2} \sin \tfrac{1}{2}\alpha \cos\phi,$$

d'où résulte, en remplaçant de même $\cos\theta$ par 1,

$$\delta = \frac{\mathrm{K}mhg}{\pi l^2}\int_0^\pi \cos^2\phi \, . \, d\phi = \frac{\mathrm{K}\,mgh}{2 l^2}.$$

On voit qu'en ne conservant dans le calcul que les termes principaux, tous les éléments de l'intégrale relative à ϕ se trouvent de même signe; par suite, l'influence des termes négligés, qui par rapport à ceux-là sont de l'ordre de θ^2, est tout à fait insignifiante. Il n'en est plus de même pour la valeur de α_1, car, en y répétant les mêmes substitutions, l'intégrale serait remplacée par:

$$\int_0^\pi \cos\phi \sin\phi d\phi \text{ ou } o;$$

les termes négligés subsisteraient seuls, et l'expression contient de plus $\tang \frac{1}{2}\alpha$ comme facteur. On peut en conclure que l'influence du balancement des supports sur la variation de l'amplitude est insensible.

Il reste à apprécier l'erreur provenant de l'hypothèse que $y_1 = \mathrm{KQ}$, ou à vérifier que les termes à ajouter, pour avoir la valeur exacte de y_1, sont très-petits par rapport à KQ.

La fonction du temps représentée par Q, étant périodique, peut être exprimée par une somme de termes de la forme:

$$\mathrm{Q} = \Sigma\gamma\cos(\rho t + \rho'),$$

dans laquelle γ, ρ, ρ', sont des constantes ayant des valeurs particulières pour chaque terme de Σ. Mais cette fonction présente une particularité importante. Le terme principal de Q est, comme on l'a vu:

$$\frac{mgh}{l}\sin\theta \quad \text{ou} \quad \frac{2\,mgh}{l}\sin\tfrac{1}{2}\alpha\cos\phi.$$

De plus on a, d'après le mémoire déjà cité, en négligeant l'action troublante:

$$d\,\phi = \sqrt{\frac{g}{l}}\sqrt{1 - \sin^2\tfrac{1}{2}\alpha\cos^2\phi}. \; dt,$$

ou, avec grande approximation, $\phi = \sqrt{\frac{g}{l}}\,.\,t + \text{const.}$

et par suite:

$$\mathrm{Q} = \frac{2\,mgh}{l}\sin\tfrac{1}{2}\alpha.\cos.(\rho t + \rho')$$

en posant $\rho = \sqrt{\frac{g}{l}}$; c'est-à-dire que la somme désignée Σ se réduit presque à ce terme unique, les autres ayant des coefficients beaucoup plus petits.

Pour calculer le mouvement du support, nous devons lui attribuer en premier lieu une forme arbitraire; nous verrons ensuite comment le résultat peut s'étendre à d'autres cas.

Nous supposerons que le corps élastique dont il s'agit ait la forme d'un cylindre ou prisme horizontal, appuyé en A contre un plan fixe vertical, de longueur $AO = c$, et sur lequel agit en O la force Q, normalement à sa face terminale. Chaque section MM' a alors un mouvement commun à tous ses points.

En nommant z la distance AM dans l'état d'équilibre, et $z + v$ ce qu'elle devient dans l'état de mouvement, quand la section est en M'M', v sera une fonction des deux variables z et t, satisfaisant l'équation aux différences partielles

$$\frac{d^2 v}{dt^2} = n^2 \frac{d^2 v}{dz^2},$$

où n est une constante, représentant la vitesse de propagation des vibrations longitudinales; on devra avoir en outre, quel que soit t, $v = o$ pour $z = o$, le plan A étant fixe, et en outre la pression sur chaque tranche étant proportionnelle à $\frac{dv}{dz}$, il faudra supposer aussi

$$\frac{dv}{dz} = a\,Q \quad \text{pour} \quad z = c,$$

a étant une constante.

En substituant $Q = \Sigma \gamma \cos(\rho t + \rho')$, on satisfera à toutes ces conditions par la valeur particulière $v = v'$, en posant:

$$v' = \Sigma \frac{\gamma a n}{\rho} \cdot \frac{\cos(\rho t + \rho') \sin\left(\frac{\rho z}{n}\right)}{\cos\left(\frac{\rho c}{n}\right)},$$

et par suite pour un mouvement quelconque, en nommant v'' la différence $v - v'$, il faudra qu'on ait

$$\frac{d^2 v''}{dt^2} = n^2 \frac{d^2 v''}{dz^2},\ v'' = o \text{ pour } z = o,\ \frac{dv''}{dz} = o \text{ pour } z = c.$$

Ainsi le mouvement sera la somme algébrique de ceux qui seraient représentés par $v = v'$, $v = v''$; or ce dernier est celui du corps élastique écarté de sa position d'équilibre et livré à lui-même sans qu'il agisse sur lui aucune pression; c'est donc un simple mouvement vibratoire très-rapide, et ses vibrations, malgré la fixité attribuée au plan A, se disperseraient dans le sol; le seul mouvement persistant est donc rigoureusement représenté par la formule $v = v'$.

Si $\frac{\rho c}{n}$ et par suite $\frac{\rho z}{u}$ est très-petit et cela pour tous les termes de la somme Σ, en substituant $\sin \frac{\rho z}{n} = \frac{\rho z}{n}$, $\cos \frac{\rho c}{n} = 1$, on aura à très-peu près:

$$v' = a\,z\,\Sigma \gamma \cos(\rho t + \rho'') = z\,a\,Q,$$

et en particulier au point O, v' étant au signe près le même que y_1, on aura $z = c$

et $y_1 = acQ$; cela ayant lieu d'autant plus exactement que les valeurs de ρ sont plus petites, ou les changements de Q plus lents, on peut en conclure que $ac = K$, K correspondant à la valeur statique de l'écart.

Or, pour le terme principal de Q, on a $\rho = \sqrt{\frac{g}{l}}$, ou nommant T la durée d'oscillation du pendule,

$$\rho = \frac{\pi}{T}, \quad \frac{\beta c}{n} = \frac{\pi c}{nT};$$

ici nT, ou l'espace parcouru par le son pendant le temps T, est incomparablement plus grand que la longueur c du support; le résultat ci-dessus est donc très-exact, et l'on peut supposer $y_1 = KQ$.

On trouverait, sauf la complication plus grande du calcul, qu'il en est encore de même en assimilant les supports à deux prismes ou cylindres verticaux ayant par suite un mouvement transversal et non longitudinal.

Pour étendre ce résultat au cas général, il nous faut rappeler la marche que l'on suivrait pour intégrer les équations du mouvement vibratoire. En nommant x, y les coordonnées d'un point quelconque dans l'état d'équilibre, et $x + u, y + v$ ce qu'elles deviennent dans celui de mouvement, les équations ont la forme:

$$\frac{d^2u}{dt^2} = U, \qquad \frac{d^2v}{dt^2} = V,$$

U et V étant fonctions linéaires des diverses dérivées partielles de u, v par rapport à x et y. Quant aux conditions relatives aux surfaces, il faut qu'on ait $u = o$, $v = o$ aux points où elles sont fixes, que la pression soit nulle aux points où elles sont libres, et qu'elle soit égale à Q aux points où cette force agit; ces pressions dépendent d'ailleurs des dérivées du premier ordre de u et v. Toutes ces conditions seraient satisfaites par des expressions de la forme:

$$u = u' = \Sigma p \cos(\rho t + \rho'), \; v = v' = \Sigma q \cos(\rho t + \rho'),$$

les divers termes des sommes Σ correspondant à ceux dont se compose Q, et p, q étant des fonctions de x, y, déterminées par des équations, différentielles ordinaires. Pour toute autre solution des équations, en posant $u - u' = u''$, $v - v' = v''$, on verrait que u'', v'' devraient satisfaire les mêmes conditions, sauf que la force Q n'agirait plus nulle part; il en résulterait, comme on l'a vu plus haut, que le mouvement représentée par $u = u'$, $v = v'$ subsisterait seul. Nous n'en devons pas moins mentionner la forme qu'auraient u'', v'', car c'est d'elle que dépend la propriété cherchée. On les trouverait en assimilant u'', v'' à une suite de termes de la forme Σ (S $\cos st$ + S$'\sin st$), où s est une constante, et S, S$'$ des fonctions de x, y; celles-ci seraient alors assujetties à satisfaire des équations différentielles linéaires; et pour chaque terme de la somme Σ elles contiendraient des cosinus, sinus, ou exponentielles portant sur des expressions de la forme $s\beta x$, $s\beta y$, où β serait une constante absolue. Dans les conditions relatives aux limites, x, y se trouveraient remplacées par diverses dimensions c, c', c'' du corps, et il en résulterait une équation transcendante déterminant les diverses valeurs de s, en général en nombre infini. Les expressions cos $s\,\beta\,c$, cos $s\,\beta\,c'$, etc., qui s'y trouvent, changeant de signe quand s varie, de manière que $s\beta c$ ou $s\beta c'$.. augmentent de π, il y aura en général au moins une racine s pour laquelle ces produits $s\beta c$.. seront plus petits que $2\,\pi$ ou d'un ordre de grandeur peu supérieur. Supposons maintenant que dans Q les diverses valeurs de ρ soient beaucoup plus petites que toutes celles de s, ou que la durée T de l'oscillation du pendule soit très-grande en comparaison de celle des vibrations naturelles du support. Alors, la constante s étant remplacée par ρ, il arrivera que les valeurs de $\rho\,\beta\,x$, $\rho\,\beta\,y$, qui entrent dans p et q sous les signes cosinus et sinus, à la place de $s\,\beta\,x$, $s\,\beta\,y$, seront de très-petits nombres, et l'on pourra remplacer les cosinus et les exponentielles par le premier terme de leur développement; mais alors la forme de p et q sera la même que si ρ était infiniment petit ou Q sensiblement constante; les valeurs qui en résultent pour u' et v' doivent donc reproduire celles de l'état statique, et en particulier au point O on devra avoir $v = \mathrm{KQ}$.

De ce qui précède résulte que la valeur trouvée pour δ doit être regardée comme très-exacte, quelle que soit la forme des supports. Pour la traduire en nombre, on doit faire sur l'appareil une observation, en faisant agir au point O du support une force horizontale de valeur connue p, et mesurant au micromètre la déviation ε qu'elle produit; on aura alors $\mathrm{K} = \frac{\varepsilon}{p}$; en substituant cette valeur dans celle de δ et nommant en outre p' le poids mg du pendule, on trouvera;

$$\delta = \frac{1}{2} \cdot \frac{\varepsilon}{l} \cdot \frac{h}{l} \cdot \frac{p'}{p}.$$

expression où n'entrent que des rapports abstraits. En supposant, par exemple, que la force p soit égale au poids même du pendule, et qu'on ait en mètres $l = 1$, $h = \frac{2}{3}$, on trouvera $\delta = \frac{1}{3} \cdot \varepsilon$, et l'erreur relative qui résulterait de celle-là pour la valeur de g serait $\frac{2}{3}\,\varepsilon$. Pour qu'elle n'affectât pas la quatrième décimale de g, il faudrait qu'on eût:

$$\frac{2}{3}\,\varepsilon < \frac{1}{1000000}, \quad \varepsilon < 0^{\mathrm{mm}},015.$$