V Jornadas “Peirce en Argentina”
23-24 de agosto del 2012

La lógica matemática de Peirce Extendida en el tiempo

Arnold Oostra[·]
aaoostra@gmail.com

1. Introducción

Es bien conocido que Carles S. Peirce se consideraba a sí mismo un lógico, y en alguna ocasión añadió el adjetivo “matemático”. Por otro lado, ya no es posible negar la influencia de Peirce en el nacimiento de la lógica matemática, ese largo proceso que se extendió, más o menos, desde 1854 con Boole hasta 1929 con Gödel. De ahí la gran importancia de estudiar la lógica matemática de Peirce.

Las primeras investigaciones en esta especialidad pueden verse como una serie de estudios de caso, más o menos inconexos. Pero al pasar de lo local a lo global, es posible proponer una primera clasificación en los trabajos del pensador en la lógica matemática: los *aportes* de Peirce, que pasaron a formar parte del corpus de la matemática aunque no siempre se le dé el crédito merecido a su autor; luego los *anticipos*, ideas que Peirce prefiguró y que fueron redescubiertas después de manera independiente por otros matemáticos; finalmente las *latencias*, proyectos en los cuales Peirce invirtió mucho esfuerzo pero que quedaron en el olvido hasta hace muy poco y en los cuales casi todo está por hacer (Oostra, 2006, 2008).

En la búsqueda por hacer visible la coherencia interna del pensamiento de Peirce, también en la lógica matemática, un siguiente paso consiste en ubicar los distintos trabajos en una línea cronológica. Esto no solo hace posible relacionar entre sí los trabajos del mismo pensador sino también permite confrontarlos con los aportes de otros matemáticos. Esta ponencia pretende mostrar uno de los primeros avances en esa dirección.

[·] Profesor del Departamento de Matemáticas y Estadística de la Universidad del Tolima y miembro del Centro de Sistemática Peirceana. Correo electrónico: aaoostra@gmail.com

2. Algunos trabajos matemáticos de Peirce

A continuación se repasa una selección de cinco de los principales logros de Peirce en la lógica matemática y se ubica cada trabajo en el tiempo, haciendo en cada caso referencia a trabajos afines realizados por otros investigadores.

La proyección quincuncial

La proyección del globo terráqueo publicada por Peirce en 1879 se enmarca en una larga tradición de dibujantes de mapamundis (Peirce, 1879). Ya en los últimos siglos, detrás de cada proyección se esconde una complicada función matemática. Por el Teorema Egregio de Gauss (probado en 1828) se sabe que no existe una función "perfecta" entre la esfera y el plano, una proyección que a la vez preserve ángulos y áreas, pero cada propuesta busca destacar algún aspecto de la mejor manera. La proyección de Peirce se distingue porque la imagen de cada hemisferio es un cuadrado, y el rectángulo resultante se puede repetir de manera indefinida llenando el plano.

Axiomas para los números naturales

En el folclor matemático se asume casi sin discusión que la primera presentación axiomática de los números naturales es la de Giuseppe Peano (Peano, 1889), aunque se reconoce que muchas de sus ideas fueron tomadas de un trabajo previo de Richard Dedekind (Dedekind, 1888). Lo que es menos conocido es que siete años antes Charles Peirce ya había publicado una axiomatización completa de los números naturales (Peirce, 1881) que difiere en muchos puntos esenciales de la de Peano (Bedoya, 2003; Oostra, 2003).

Álgebra de la lógica

Ubicándose de manera consciente en la estela de Boole y De Morgan, Peirce impulsó la versión algebraica de la lógica cuyo uso se ha generalizado en la matemática desde entonces. El impacto de su aporte se observa tanto en la lógica proposicional como en la de predicados.

La lógica proposicional es uno de los tópicos matemáticos que se puede presentar de más maneras equivalentes pero del todo distintas: mediante tablas de verdad, mediante álgebras booleanas, mediante árboles semánticos, mediante cálculo de secuentes, mediante deducción natural. Al mejor estilo de la matemática actual, también existen presentaciones axiomáticas determinadas por una serie de axiomas y reglas de inferencia. Estos sistemas se cristalizaron entre 1920 y 1950 con los trabajos de David Hilbert, Paul Bernays, Alfred Tarski, Jan Łukasiewicz, Kurt Gödel y Alonzo Church, si bien hubo algunos precursores en el siglo XIX. Aunque no se encuentra explícito allí, con algún esfuerzo se puede obtener una axiomatización para la lógica proposicional del famoso *Begriffsschrift* de Gottlob Frege (Frege, 1879). En cambio en 1885, Peirce dio un sistema completo y explícito de axiomas (Peirce, 1885), en el cual se destaca la tautología conocida como *ley de Peirce*:

$$((x \rightarrow y) \rightarrow x) \rightarrow x.$$

Después de estas se pueden destacar las axiomatizaciones de Russell en 1906 y de Russell y Whitehead en 1910.

La historia del cálculo de predicados, conocida de forma más técnica como "lógica de primer orden", es muy similar a la de la lógica proposicional axiomática. De manera casi universal, y solo con base en la autoridad de Russell, se trazan sus orígenes modernos al ya mencionado *Begriffsschrift* de Frege. Sin embargo, durante el lustro 1879-1884 mientras Peirce fue docente de lógica en la Universidad Johns Hopkins, con la ayuda de varios colaboradores desarrolló una versión algebraica de la lógica de relativos o predicados. Comenzando por extensiones cada vez más sofisticadas de las ideas de George Boole, de manera natural llegó a la teoría de la cuantificación. En 1885 escribió fórmulas del estilo siguiente:

$$\Sigma_i x_i \qquad \Pi_i x_i \qquad \Pi_i \Sigma_j l_{ij}$$

para indicar, respectivamente, "x es verdadero para alguno de los individuos denotados i ", "x es verdadero para todos los individuos denotados i " y "para cada individuo denotado i existe un individuo denotado j tal que i es l de j ", es decir, lo que hoy en día se simboliza como sigue.

$$\exists i\, X(i) \qquad \forall i\, X(i) \qquad \forall i\, \exists j\, L(i,j)$$

No hay fórmulas tan similares a las actuales en el escrito de Frege. Pero más que eso, se ha demostrado de manera técnica y concluyente que la línea de flujo y desarrollo de la lógica de primer orden, desde mediados del siglo XIX hasta la actualidad, sigue los trabajos de George Boole, Augustus de Morgan, Charles S. Peirce, Ernst Schröder, Leopold Löwenheim, Thoralf Skolem y, por supuesto, Alfred Tarski (Brady, 2000).

Una notación para los conectivos proposicionales

En 1902 Peirce propuso por primera vez una notación completa para los 16 conectivos proposicionales de la lógica clásica. Lo interesante de este sistema de símbolos es que se construye de manera coherente, de tal forma que cada signo contiene la tabla de verdad del conectivo correspondiente (García y Gómez, 2002). Peirce utilizó esta notación para calcular miles y miles de tautologías (Oostra, 2004a). Durante el siglo XX algunos otros autores presentaron notaciones más o menos similares y con características comparables, hasta que en 1961-62 Shea Zellweger introdujo su Alfabeto Lógico (XLA) que presenta mejoras significativas respecto a las anteriores, sin perder ninguna propiedad de la de Peirce (Clark and Zellweger, 1993; Zellweger, 1997; Cardona, 2010; Aya y Granados, 2010). Por desgracia, esta simbología no es conocida y mucho menos utilizada de manera general en la lógica matemática.

Gráficos existenciales

Aunque Peirce fue el principal creador e impulsador de la lógica de predicados, él mismo nunca estuvo del todo satisfecho con esa primera versión algebraica y desde la misma década de 1880 buscó representaciones gráficas para esta lógica. Muchos años después, entre 1897 y 1902, Peirce desarrolló un sistema de dibujos para la lógica que denominó "gráficos existenciales" y que consideró su obra maestra porque los veía como un diagrama del pensamiento mismo (Zalamea, 2010). En este sistema distinguió los niveles Alfa, que corresponde al cálculo proposicional (Acosta y Jiménez, 2010; Rodríguez y Taboada, 2010); Beta, que corresponde al cálculo de predicados o lógica de primer orden (Rueda, 2011); y Gama, que tiene muchas aplicaciones posibles.

Aparte de una publicación fragmentaria durante los años 1930 en los *Collected Papers*, esta idea genial de Peirce quedó en el olvido hasta la década de 1960, cuando fue recuperada con las tesis doctorales de Don Roberts y Jay Zeman (Roberts, 1963; Zeman, 1964). Este último autor logró aplicar con éxito los gráficos Gama a las lógicas modales, en las cuales es experto (Molina, 2003).

Desde hace algunos años en la Universidad del Tolima se viene desarrollando con éxito el programa de aplicar los gráficos existenciales de Peirce a la lógica intuicionista. Este sistema formal fue introducida en 1929

(Heyting, 1971), mucho después de la muerte de Peirce, y tomó fuerza con la aplicación de la teoría de categorías a la lógica en la década de 1970 (Goldblatt, 1984). Por ello resulta en extremo sorprendente que un cambio muy pequeño en los gráficos existenciales originales de Peirce conduzca con exactitud a la lógica intuicionista (Oostra, 2009, 2010, 2011).

3. Conclusiones preliminares

El recuento anterior refuerza mucho la idea de que Peirce estaba adelantado a su tiempo. Aún en la lógica matemática, fue pionero y antecesor de muchos desarrollos ulteriores. En este escrito no se mencionó el famoso caso de los conectivos proposicionales completos, en el cual Peirce anticipó a Sheffer por años; pero también está el caso de la enumeración de los números racionales, en la cual Peirce fue anticipado en varias décadas por Moritz Stern y Achille Brocot. Por otro lado, una de las latencias más significativas está constituida por los estudios de Peirce sobre el continuo, con los cuales aún está adelantado al resto de la humanidad (Zalamea, 2001; Oostra, 2004b).

En la cronología de los trabajos de Peirce en la lógica matemática saltan a la vista dos períodos de intensa creatividad: los años 1879 hasta 1885, que coinciden con su docencia en la Universidad Johns Hopkins, y luego los años 1897 hasta 1905. Esta última etapa resulta más sorprendente si se tiene en cuenta que para entonces Peirce tenía alrededor de sesenta años. Una vez más se derrumba el mito de que la creatividad matemática termina a los cuarenta años.

Se espera que refinamientos posteriores de este primer intento de la cronología para la lógica matemática en el legado de Charles S. Peirce puedan arrojar más y mejor luz para la comprensión global de su pensamiento.

Bibliografía

Bedoya, Lina María (2003), *Peano, Lawvere, Peirce: Tres axiomatizaciones de los números naturales*, Trabajo de grado (Carrera de Matemáticas), Ibagué: Universidad del Tolima.

Brady, Geraldine (2000), *From Peirce to Skolem: A Neglected Chapter in the History of Logic*, Amsterdam: North-Holland.

Cardona, Oscar Abel (2010), *Álgebra en el Alfabeto Lógico de Zellweger*, Trabajo de grado (Especialización en Matemáticas avanzadas), Ibagué: Universidad del Tolima.

Clark, Glenn, and Zellweger, Shea (1993), "Let the mirrors do the thinking", *Mount Union Magazine* 93 (2) 2-5.

Dedekind, Richard (1888), *Was Sind und Was Sollen die Zahlen?* Braunschweig: Vieweg. Traducido al español: Ferreirós, José, *¿Qué son y para qué sirven los Números?* Madrid: Alianza Editorial, 1997.

Frege, Gottlob (1879), *Begriffsschrift: eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens*. Halle: Verlag von Louis Nebert.

García, Mireya y Gómez, John Fredy (2002), *Notación de Peirce para los Conectivos Binarios*, Trabajo de grado (Carrera de Matemáticas), Ibagué: Universidad del Tolima.

Goldblatt, Robert (1984), *Topoi: The Categorial Analysis of Logic*, Amsterdam: North-Holland.

Aya, Norman Raúl y Granados, Leonardo (2010), *Acerca de la geometría del Alfabeto Lógico de Shea Zellweger*, Trabajo de grado (Licenciatura en Matemáticas), Ibagué: Universidad del Tolima.

Heyting, Arend (1971), *Intuitionism: An Introduction*, Amsterdam: North-Holland.

Acosta, Jennifer Alexis y Jiménez, Edna Margarita (2010), *El método de decisión Alfa*, Trabajo de grado (Carrera de Matemáticas), Ibagué: Universidad del Tolima.

Molina, Fabián Augusto (2003), *Correspondencia entre algunos sistemas de Lógica modal y los gráficos existenciales Gama de Peirce*, Trabajo de grado (Carrera de Matemáticas), Ibagué: Universidad del Tolima.

Oostra, Arnold (2003), "Acerca del artículo *On the Logic of Number*, de Charles S. Peirce", *Boletín de Matemáticas* 10 (1) 14-21.

Oostra, Arnold (2004a), "La notación diagramática de C. S. Peirce para los conectivos proposicionales binarios", *Revista de la Academia Colombiana de Ciencias* 28 (106) 57-70.

Oostra, Arnold (2004b), "C. S. Peirce y el análisis. Una primera lectura de *El Continuo Peirceano*", *Boletín de Matemáticas* 11 (1) 19-30

Oostra, Arnold (2006), "Peirce y la matemática", *Anthropos* 212 151-159.

Oostra, Arnold (2008), "Una reseña de la lógica matemática de Charles S. Peirce (1839-1914)", *Revista Universidad EAFIT* 44 9-20.

Oostra, Arnold (2009), "La matemática intuicionista y sus conexiones con el pensamiento de Peirce", *Cuadernos de Sistemática Peirceana* 1 9-31.

Oostra, Arnold (2010), "Los gráficos Alfa de Peirce aplicados a la lógica intuicionista", *Cuadernos de Sistemática Peirceana* 2 25-60.

Oostra, Arnold (2011), "Gráficos existenciales Beta intuicionistas", *Cuadernos de Sistemática Peirceana* 3 53-78.

Peano, Giuseppe (1889), *Arithmetices Principia Nova Methodo Exposita*, Turin: Bocca.

Peirce, Charles S. (1879), "A Quincuncial Projection of the Sphere", *American Journal of Mathematics* 2 (4) 394-396.

Peirce, Charles S. (1881), “On the Logic of Number”, *American Journal of Mathematics* **4** 85-95. Traducido al español: Bedoya, Lina María (2003), “Sobre la lógica del número”, *Boletín de Matemáticas* 10 (1) 1-13.

Peirce, Charles S. (1885), “On the Algebra of Logic: A Contribution to the Philosophy of Notation”, *American Journal of Mathematics* 7 180-202.

Peirce, Charles S. (1931), *Collected Papers of Charles Sanders Peirce* (Hartshorne, Charles; Weiss, Paul; Burks, Arthur W. eds.), Cambridge: Harvard University Press.

Peirce, Charles S. (1976), *The New Elements of Mathematics* (Eisele, Carolyn ed.), Den Haag: Mouton.

Peirce, Charles S. (1982), *Writings of Charles S. Peirce: A Chronological Edition* (Fisch, Max H. *et al*, eds.), Bloomington and Indianapolis: Indiana University Press.

Roberts, Don D. (1963), *The Existential Graphs of Charles S. Peirce*, Ph.D. dissertation, Urbana: University of Illinois.

Rueda, Ricardo (2011), *Matemáticas básicas con gráficos existenciales Beta*, Trabajo de grado (Carrera de Matemáticas), Ibagué: Universidad del Tolima.

Rodríguez, Edgar Danilo y Taboada, Jorge Enrique (2010), *Una demostración de la equivalencia entre los gráficos Alfa y la lógica proposicional*, Trabajo de grado (Carrera de Matemáticas), Ibagué: Universidad del Tolima.

Zalamea, Fernando (2001), *El continuo peirceano*, Bogotá: Universidad Nacional de Colombia.

Zalamea, Fernando (2010), *Los gráficos existenciales peirceanos*, Bogotá: Universidad Nacional de Colombia.

Zellweger, Shea (1997), “Untapped potential in Peirce's iconic notation for the sixteen binary connectives”, in: Houser, Nathan; Roberts, Don D. and Van Evra, James (Eds.), *Studies in the logic of Charles Sanders Peirce*, Bloomington and Indianapolis: Indiana University Press, 334-386.

Zeman, J. Jay (1964), *The Graphical Logic of C. S. Peirce*, Ph.D. dissertation, Chicago: University of Chicago. Disponible: http://web.clas.ufl.edu/users/jzeman/graphicallogic/index.htm