V Jornadas “Peirce en Argentina”
23-24 de agosto del 2012

La Validez Constructiva de la Ley de Peirce

Wagner de Campos Sanz (Universidade Federal de Goiás)
wagnersanz@gmail.com
Thomas Piecha (Tübingen Universität) /
piecha@informatik.uni-tuebingen.de
Peter Schroeder-Heister (Tübingen Univesität)
psh@uni-tuebingen.de

Resumen

La ley de Peirce – ((pq)p)p – es considerada un principio lógico no-constructivo. En efecto, de su adición a la lógica proposicional intuicionista resulta la lógica clásica. Curiosamente, existen bases para considerar este principio como válido desde el punto de vista constructivo. Mostraremos una construcción que justifica intuicionistamente la ley de Peirce, desarrollando ideas presentes en un artículo de Sandqvist [6] en el cual se presenta la validación de la regla de eliminación de doble negación sin utilizar el principio de bivalencia.

Abstract

Peirce’s law –((pq)p)p– is a non-constructive logical principle. In fact, we obtain classical logic by adding it to the intuitionist logic. Indeed, there are bases on which this principle can be regarded as acceptable from a constructivist point of view. We will show a construction justifying Peirce’s law intuitionistically by developing some ideas exposed in an article by Sandqvist [6] in which he presents a validation of the principle of double negation elimination without using the bivalence principle.

1) Introducción

Nuestro propósito aquí es el de examinar el constructivismo intuicionista y evaluar la posibilidad de validar la ley de Peirce desde el punto de vista intuicionista.

La así llamada ley de Peirce – ((pq)p)p – viene presentada por primera vez en *On the Algebra of Logic* del 1885 de C.S. Peirce y es un principio a partir del cual se puede derivar el principio del tercero excluido. La formalización de la lógica clásica puede ser tanto presentada con el tercero excluido cuanto con la ley de Peirce. En particular, para obtener la lógica clásica a partir de la lógica intuicionista, solo se requiere adicionar uno de estos dos principios.

Sabemos que hay varias semánticas distintas para la lógica intuicionista, la más conocida es la semántica de los mundos posibles de Kripke. Esta semántica hace uso de un principio considerado como no-constructivo para demostrar la completitud de la lógica proposicional intuicionista. Por lo tanto, hay objeciones a tener en cuenta como constructiva a este tipo de semántica, o por lo menos la prueba de completitud no es aceptable desde el punto de vista constructivo.

En general, se considera que una semántica para la lógica intuicionista debe estar en acuerdo con las llamadas cláusulas BHK (por Brouwer-Heyting-Kolmogorov) enunciadas por Heyting [2]. Sin embargo, no es exactamente claro cómo estas cláusulas deben ser interpretadas. A la continuación vamos a analizar una semántica que se pretendió fuera una aclaración a BHK. Veremos que esta semántica valida, contrario a lo que se esperaría, a la ley de Peirce.

La ley de Peirce contiene solamente la constante lógica de implicación. Por esta razón, restringimos nuestro análisis de BHK a la cláusula de implicación. Se debe recordar que todas las condiciones necesarias y suficientes para establecer el uso de una constante lógica se formulan en la respectiva cláusula.

La cláusula BHK para la implicación es como sigue ([2], pág. 103 y sig.)

pq puede ser aseverada si y solamente si poseemos una construcción r que, cuando aplicada a cualquiera construcción que prueba a p (asumiendo que esta última pueda ser efectuada), automáticamente efectuaría una construcción que prueba a q.

Aquí, “aseverar” significa lo mismo que “ser teorema”, y una proposición solo es un teorema cuando viene acompañada de una construcción probatoria.

2) Elucidación propuesta por Prawitz en 1971 para BHK

Una primera lectura de las cláusulas BHK, incluso acompañadas de las aclaraciones por parte de Heyting, dejan muchas preguntas en el aire. Por ejemplo, no está claro que deberíamos entender por el concepto de construcción. Sin embargo, sabemos, tal como se indica explícitamente, que el principio del tercero excluido no puede ser considerado intuicionistamente válido. En efecto, de acuerdo a la cláusula BHK para la disyunción, con el fin de aseverar p~p se requiere o que p sea aseverable o que ~p sea aseverable.

El problema de determinar qué son construcciones también se extendiendo al caso de las proposiciones atómicas. A menudo, se supone que estas construcciones dependen de la teoría que es objeto de examen y del lenguaje respectivo.

En 1971, Prawitz [4] propone un esclarecimiento parcial de las cláusulas BHK. Básicamente consiste en la relativización de las construcciones para las proposiciones atómicas a un sistema Post S de reglas para las proposiciones atómicas. La formulación de un sistema Post S se lleva a cabo mediante la presentación de esquemas de reglas de inferencia. Pueden ser más convenientemente propuestas por medio de secuentes con un sucedente unitario y un antecedente que sea un conjunto finito: $p_1,\ldots,p_n p_{n+1}$, donde cada p_i es una proposición atómica. Para ser más precisos, el conjunto de instancias concretas de estos esquemas son las reglas de inferencia que componen el sistema S. La justificación para la adopción de un sistema Post como base para definir las construcciones de las proposiciones atómicas es simplemente que ellos son suficientes para definir el concepto de función recursiva o de computabilidad.

En la aclaración propuesta por Prawitz hay una única cláusula para definir las construcciones para proposiciones atómicas ([4], p 278.):

> i) k es una construcción para una sentencia atómica p sobre S si y solamente si k es una derivación de p en S.

Frecuentemente en la literatura, el conjunto de las sentencias atómicas válidas según la cláusula (i) arriba es llamado de *base*.

A continuación, la elucidación de la cláusula BHK para la implicación en el contexto de los sistemas Post es dada por Prawitz de la siguiente forma (*ibíd.*):

> ii) k es una construcción de una sentencia $p \rightarrow q$ sobre S si y solamente si k es un objeto constructivo del tipo $p \rightarrow q$ y para cada extensión S’ de S y para cada construcción k’ de p sobre S, k(k’) es una construcción de q sobre S.

Para sistemas Post cuando S’ se extiende a S (S’S) todas las reglas Post de S pertenecen a S’, consecuentemente todas las sentencias atómicas demostrables en S son demostrables en S’.

Desde el punto de vista intuicionista, parece razonable suponer que cuando una construcción ha sido efectuada, esta construcción permanece como una adquisición de cualquier evolución futura de las matemáticas. Esta es una justificación conceptual de la existencia de un requisito de monotonicidad para extensiones presente en la cláusula (ii) anterior. Sin embargo, hay todavía una manera de mostrar con precisión por qué el requisito es exigido. Tengamos en cuenta que para los intuicionistas la inexistencia de una construcción probatoria para una proposición p debe proporcionar fundamentos para concluir que cualquier construcción prueba la sentencia $p \rightarrow q$ (esto es particularmente cierto cuando q es el absurdo - - en la definición de la negación de p). Por lo tanto, si en una extensión S’ de S no hubiera una construcción probatoria para q, pero hubiese construcción probatoria para p, y p→q fuera considerada probada en S, la última sentencia pasaría a ser considerada no constructible en la extensión S.

3) Adaptaciones a la semántica de Sandqvist

Sandqvist [6] nos da una manera de validar el principio (clásico) de eliminación de la doble negación -~~AA- por medio de una semántica que contiene cláusulas de implicación, del absurdo y del cuantificador universal. Las cláusulas de esta semántica son tales que su formulación se puede encontrar en distintas versiones de la literatura intuicionista contemporánea en versiones idénticas y/o formas más restringidas. En consecuencia, Sandqvist dice, sería posible validar la lógica clásica sin tener que recurrir al principio de bivalencia, usando sólo "ingredientes" de naturaleza constructivista. Por ejemplo, la cláusula para implicación formulada por Sandqvist guarda similitud con la cláusula (ii) anterior de Prawitz, y la diferencia esencial consiste en la ausencia del requisito de poseer una construcción k.

Aquí, mostraremos que una semántica para la implicación en los moldes de la cláusula de Sandqvist con la restricción adicional de tener la posesión de una construcción k, al igual que en las cláusulas (ii) de Prawitz, ya se valida la ley de Peirce. Es decir, la semántica de Prawitz valida un principio lógico que no es aceptable intuicionistamente. En nuestra opinión, debe haber un error en la semántica para el intuicionismo, la cuestión crucial es saber dónde esta ese error. Creemos, además, que ese error es también el responsable por la validación de la lógica clásica realizada por Sandqvist.

4) Construcciones en la base

La cláusula semántica (i) de Prawitz indica cuáles son las construcciones de las proposiciones atómicas y se basa en el concepto de derivabilidad. De acuerdo a (i), una construcción de p en S es una derivación de p en S.

La definición de la validez para las sentencias atómicas en el artículo de Sandqvist se hace por medio de una definición ligeramente diferente de la de Prawitz. Se considera sólo el cierre transitivo de las reglas de p. Sin embargo, en la definición de las derivaciones en S podemos tanto adicionar el cierre por regla de debilitamiento a la izquierda para los secuentes:

$$\frac{p_1,...,p_n p_{n+1}}{q,p_1,...,p_n p_{n+1}}$$

(para $p_1,...,p_n,p_{n+1},q$ proposiciones atómicas) cuanto el cierre por secuentes básicos pp (para sentencias atómicas p) sin cambiar el conjunto de las proposiciones básicas probable por construcción en el sistema Post como tampoco cambia el conjunto sentencias no atómicas validadas a través de la cláusula (ii).

En este sentido, teniendo en cuenta que las derivaciones en S son el cierre transitivo, por debilitamiento y por recuentes básicos se desprende de la cláusula (i) que:

Lema 1: k es una construcción para una proposición atómica p en S si y solamente si k es una derivación (cerrada) de p en S.

Este lema tiene un papel esencial en la prueba que seguirá pronto.

Observamos, además, que una semántica para la lógica intuicionista debe ser tal que en ella se valide las dos reglas para la implicación de la lógica proposicional intuicionista en deducción natural, la introducción y la eliminación de la implicación (de lo contrario, la semántica sería simplemente inapropiada):

$$\dfrac{\begin{array}{c}[A]^j \\ \vert \\ B\end{array}}{AB}\,{}^{j}\ (i)$$	$$\dfrac{A \quad AB}{B}\ (e)$$

5) La validez de la ley de Peirce según las cláusulas semánticas (i) y (ii)

La validez de la ley de Peirce es demostrada en varios pasos. Primero, demostramos la validez de esta ley para sentencias atómicas p y q según las cláusulas semánticas.

Lema 2: La ley de Peirce para sentencias atómicas p y q es válida según las cláusulas semánticas (i) y (ii).

Demostración: Para demostrar que ((pq)p)p es válido en un sistema Post S cualquiera debemos demostrar que poseemos una construcción k tal que para toda extensión S' de S, si k' es una construcción de (pq)p en S', entonces k(k') es una construcción de p en S', según la cláusula (ii). Sea S' una extensión de S en la cual k' es una construcción de (pq)p. Luego, también según la cláusula (ii), para toda extensión S'' de S' donde hay una construcción k'' de pq, habrá una construcción k'(k'') de p. Aquí empieza nuestra descripción del procedimiento que constituye la construcción k que se requiere. Sea S'' obtenida a partir de S' por la adición de la regla pq. Como las construcciones de proposiciones atómicas son dadas por las derivaciones en el sistema Post, según la cláusula (i), es justo decir que esta regla Post corresponde a la construcción k'' de pq sobre S''. Obviamente, esta extensión a S'' siempre puede ser efectuada para cualquier S'. Por lo tanto, hay una construcción k'(k'') de p en S''. Como p es una sentencia atómica, k'(k'') es una derivación en el sistema Post S'', según el lema 1. Dos alternativas, o esta derivación no contiene aplicaciones de la regla pq o la contiene. Si no contiene, entonces la derivación de p ya es una derivación en S'. Si lo contiene, entonces existe una aplicación de la regla pq que está mas arriba en la derivación en S'', y, consecuentemente, hay una derivación de la premisa p que no contiene la regla y ya es, de este modo, una derivación en S'. Así, dada la derivación k'(k'') basta buscar dentro de ella la primera derivación de p que no contenga a la regla pq (supongamos que el procedimiento tomará la derivación mas arriba y mas a la izquierda de la sentencia p, ya que las derivaciones están en forma de árbol). El procedimiento de extender S' con la regla y después buscar la derivación de p nos da exactamente el procedimiento k que buscábamos. **QED**

Con base en el lema 2 podemos generalizar la validez de la ley de Peirce para una sentencia q cualquier, por inducción.

Lema 3: La ley de Peirce para una sentencia q cualquier y para sentencias atómicas p es válida.

Demostración: Por inducción en la complejidad de q. Si q es una sentencia atómica, la validez sigue por el lema 2. Suponiendo que vale para q de grado menor a n, mostramos a seguir que vale para q de grado n. Sea qrs. Por hipótesis de inducción (HI), ((ps)p)p es válido ya que el grado de s es menor que n. Como, supuestamente, la semántica debe validar (i) y (e), la siguiente derivación muestra la validez de ((pq)p)p:

[p]^1 [ps]^2
——— (e)
s
—— (i)
rs
———^{1} (i)
p(rs) [(p (rs))p]^3
———————— (e)
p
p/(HI)
———^{2} (i) ———
——
(ps) p ((ps) p)p
————————
——— (e)
p
————^{3}
(i)
((p (rs))p)p

QED.

Finalmente, probamos la validez irrestricta de la ley de Peirce para la semántica.

Teorema 1: La ley de Peirce – ((pq)p)p – es válida para cualesquiera sentencias p y q según las cláusulas (i) y (ii).

Demostración: Por inducción en la complejidad de p. Si p es una sentencia atómica, la validez sigue por el lema 3. Suponiendo que vale para p de grado menor a n, mostramos a seguir que vale para p de grado n. Sea prs. Por hipótesis de inducción (HI), ((sq)s)s es válido ya que el grado de s es menor que n. Otra vez, como la semántica debe validar (i) y (e), la siguiente derivación muestra la validez de ((pq)p)p:

$[r]^3$ $[rs]^1$

———————— (e)

s $[sq]^2$

——————————— (e)

q

———^{1} (i)

(rs)q $[((r\ s)q)(rs)]^4$

——————————————————————

– (e)

$[r]^3$ rs

———————————————— (e)

s

p/(HI)

———^{2} (i)   ——————

——

(sq)s   ((sq)s)s

——————————————————————

—— (e)

s

———^{3} (i)

rs

——————————————————

^{4} (i)

(((rs)q)(rs))(rs)

QED.

6) Crítica a la semántica intuicionista

Ciertamente, la validez de la ley de Peirce no es algo que se esperaría de una semántica intuicionista. Hay varias hipótesis para localizar dónde esta el problema de la semántica que se ofreció arriba.

La idea de utilizar sistemas Post para describir las construcciones de proposiciones atómicas parecería razonable, ya que con estos sistemas se puede representar todas las funciones recursivas. Todavía, una forma de intentar escapar a la conclusión de validez sería la de postular que no podemos especificar con precisión ni mismo lo que es la construcción de una proposición atómica. Por lo tanto, la cláusula (i) debería ser reformulada sin el uso de la expresión "si y sólo si". Desafortunadamente, esta alternativa se traduciría en la adición de más incertidumbre sobre el concepto de construcción, ahora para el caso de las proposiciones atómicas.

Una crítica que se puede hacerse con respecto a la formulación de las bases (con reglas Post) es la de notar la disparidad de sus reglas en comparación con las reglas de deducción natural (i). Ella admite el descarte de hipótesis, pero las reglas de los sistemas de Post no incluyen esta posibilidad. Si el descarte de hipótesis fuera contemplado por las reglas de la base, la validez de la ley de Peirce ya no sería demostrable. Es algo difícil para los intuicionistas adoptar esta solución, pues admitir descartes en las reglas para las proposiciones atómicas es equivalente a admitir el uso de la implicación con asociación por paréntesis a la derecha en las premisas de estas reglas. El problema está en que ahora uno tendría que argumentar que este concepto de implicación es primitivo con respecto al concepto de implicación descrito por la cláusula semántica. De lo contrario, la explicación de la implicación por las cláusulas semánticas seria inútil.

Nuestra hipótesis es que el problema no está localizado originalmente en la elucidación propuesto por Prawitz. El problema podría estar ya presente en la formulación de las cláusulas BHK. En efecto, la cláusula de implicación exige como condición necesaria y suficiente la posesión de una construcción que se aplicará a cualquier construcción del antecedente de la implicación y resultará una construcción para el consecuente de la implicación. Aunque esta es una condición necesaria para hacer valer una implicación, no hay garantía de que sea suficiente, como lo había postulado Heyting. En efecto, nuestra hipótesis es que la demostración de la validez de la ley de Peirce por medio de las cláusulas (i) y (ii) es el resultado del hecho de que esta condición se había tomado como condición suficiente para la afirmación de una implicación por medio de las cláusulas BHK.

Bibliografía

[1] Dummett, M. (1991). *The Logical Basis of Metaphysics*. London: Duckworth.

[2] Heyting, A. (1956). *Intuitionism. An Introduction. Studies in Logic and the Foundations of Mathematics*. Amsterdam: North-Holland.

[3] Prawitz, D. (1965). *Natural Deduction: A Proof-Theoretical Study*. Stockholm: Almqvist & Wiksell; reimpressa por Dover Publications, Mineola, N.Y. (2006).

[4] Prawitz, D. (1971). "Ideas and Results in Proof Theory". En Fenstad, J. E. (ed.), *Proceedings of the Second Scandinavian Logic Symposium* (pp. 235–307). *Studies in Logic and the Foundations of Mathematics* 63. Amsterdam: North-Holland.

[5] Prawitz, D. (2006). "Meaning Approached Via Proofs". En Kahle, R. & Schroeder-Heister, P. (eds.), *Proof-Theoretic Semantics*. Edición especial de *Synthese*, 148, 507–524.

[6] Sandqvist, T. (2009). "Classical logic without bivalence", *Analysis*, 69, 211–217.

[7] Schroeder-Heister, P. (2006). "Validity Concepts en Proof-Theoretic Semantics. em Kahle", R. Schroeder-Heister, P. (eds.), *Proof-Theoretic Semantics*. Edición especial de *Synthese*, 148, 525–571.

[8] Schroeder-Heister, P. (2008). *Remarks on Sandqvist's observation concerning the double negation law (based on Prawitz's reconstruction)*. Manuscrito no publicado, 5 páginas.