V Jornadas "Peirce en Argentina"
23-24 de agosto del 2012

Del sistema alpha como una deducción natural

Prof. Alejandro Adan
Universidad Nacional de Quilmes

Introducción

La idea de presentar el sistema alpha de Peirce como un sistema de deducción natural se encuentra en coincidencia con ciertas reflexiones embrionarias de Peirce sobre el carácter particular de la lógica en tanto disciplina. En este sentido, algunas ideas rectoras de los sistemas de deducción natural se encontrarían anticipadas en distintas elaboraciones tempranas de Pierce. Aportes que, en su conjunto, fundamentarían la elaboración y comprensión del sistema de gráficos alpha como un sistema de deducción natural particular. El carácter gráfico o diagramático[1] del último, a su vez, permite detectar ciertas características sistémicas propias con diferencias ostensibles respecto de sistemas lingüísticos de deducción natural difundidos. Incluso, si bien Jaśkowski propone tempranamente un sistema con características gráficas, la diagramaticidad de los gráficos alpha, presentados como un sistema de deducción natural, transgrede algunas de las características sistémicas básicas y sirve para pensar los límites mismos de la deducción natural.

[1] Shimoyina, A., 1999, "The Linguistic-Graphic Distinction: Exploring Alternatives," *Artificial Intelligence Review*, vol. 13, nº 4, pp. 313-335.

Peirce y la deducción natural

Si bien los sistemas de deducción natural fueron desarrollados en forma independiente por Stanislaw Jaśkowski y Gerhard Gentzen (1934-1935), algunas de sus ideas vectoras fueron anticipadas tempranamente, entre otros, por Peirce en su artículo *"Sobre el álgebra de la lógica"* publicado en 1880. Peirce desarrolla allí un sistema de lógica proposicional fundamentado en la implicación y la negación con algunas características propias de la deducción natural: (i) enfoque sintáctico (ii) la posibilidad de derivar implicaciones de deducciones y viceversa[2] (iii) aplicación de reglas de introducción y eliminación.

En los primeros dos puntos indicados hay una relación explícita. Peirce reconoce la ventaja de establecer una derivación recíproca entre la implicación y la deducción. Este reconocimiento de la llamada "regla de condicionalización", central para la deducción natural, posiciona a Peirce desde un enfoque sintáctico de la noción de consecuencia lógica. Puesto que, prescinde deliberadamente de la semántica y se limita a la estructura lógico-gramatical. Brady afirma: "*La implicación tiene un rol especial en lógica, entendida como la expresión directa de la existencia de una deducción del consecuente a partir del antecedente. Esto último ofrece una manera natural de introducir la implicación en cualquier sistema formal, sea clásico o no, que posea una noción de deducción, y aleja a la implicación de una perspectiva semántica de la deducción, basada en tablas de verdad, para posicionarla desde una perspectiva sintáctica"*[3]. Peirce tempranamente determina su importancia lógica como se pone en evidencia claramente en su afirmación: "Por esto identificando la relación expresada por la cópula con la ilación, estamos identificando el enunciado con la inferencia, y el término con el enunciado. Esta identificación, que establece que aquello verdadero hallado en el término, el enunciado o la inferencia deberá ser verdadero para los tres, es un importante motor para el razonamiento, que recuperamos a partir de reflexionar sobre la génesis

---

[2] Brady, G., 2000. *From Peirce to Skolem. A Neglected Chapter in the History of Logic*, Amsterdam: Elsevier, p.51.

[3] *Ibidem*, p. 52: *"Implication has a special role in logic as the direct expression of the existence of a deduction of the consequent from the antecedent. This gives a natural way to introduce implication in any formal system, classical or otherwise, that has a notion of deduction, and gives implication a syntactical origin in deductions rather than a semantic origin in truth tables"*.

de la lógica"[4]. La centralidad de la regla de condicionalización para los sistemas de deducción natural, será reconocida también por el propio Quine quién la establece como *"la cruz de la deducción natural"*.

La aplicación de reglas de introducción y eliminación de las constantes lógicas es una de las características más extendidas de la mayoría los sistemas de deducción natural. Peirce vislumbra la aplicación de reglas de introducción y de eliminación que se derivan como definiciones de la implicación y la negación como conectivas primitivas. Específicamente, define la suma + (disyunción) y la multiplicación *x* (conjunción) en términos de la implicación, y las determina como reglas de introducción–eliminación[5]. Así se observa como Peirce anticipa características centrales de los sistemas de deducción natural, y las aplica en un cálculo primigenio. Estas mismas ideas embrionarias las aplicará elegantemente en sus gráficos alpha para elaborar una importante máquina deductiva indicada por él mismo como su *chef de ouvre*.

El sistema alpha como un sistema de deducción natural

En los gráficos existenciales Peirce combina los aportes de dos sistemas lógicos anteriores, su lógica de relaciones y su cálculo de deducción natural. Con la reducción de un sistema al otro Peirce formula un sistema diagramático completo para la lógica proposicional que denomina sistema alpha[6].

El sistema alpha está formado por íconos que pueden ser analizados en detalle. Una deducción en alpha consiste en la construcción de un ícono (conclusión) a partir de otros íconos (premisas) por aplicación de ciertas reglas de transformación definidas. El carácter particular del ícono es funcional al sistema puesto que permite visualizar las relaciones en el argumento, característica particular los sistemas diagramáticos.

---

[4] *Ibidem*, p. 61: *"By thus identifying the relation expressed by the copula with that of illation, we identify the proposition with the inference, and the term with the proposition. This identification, by means of which all that is found true of term, proposition, or inference is at once known to be true of all three, is a most important engine of reasoning, which we have gained by beginning with a consideration of the genesis of logic"*.
[5] *Ibidem*, p. 66.
[6] Roberts, D.D., 1973. *The Existencial Graphs of Charles S. Peirce*. The Hague: Mouton.

El carácter diagramático del sistema se justifica sobre la necesidad de la observación y la experimentación sobre los elementos del lenguaje lógico propuesto. *Peirce sostiene: "Todo razonamiento deductivo, incluso un simple silogismo, encierra un elemento de observación; pues la deducción consiste en construir un icono o un diagrama en el que las relaciones entre las partes presentan una analogía completa con las relaciones entre las partes del objeto del razonamiento; después en experimentar sobre esta imagen en la imaginación y en observar el resultado de forma que se descubran entre las partes relaciones no percibidas hasta entonces"* (CP 3.363). Actitud consistente con su modo de caracterizar a la matemática. Peirce considera que la observación es relevante para el quehacer matemático y coincide con Gauss en que "el álgebra es la ciencia del ojo". Así pues, la diagramaticidad será inherente a la investigación lógica y matemática, e incluso las palabras proveen, para él, una suerte de diagrama que puede ser experimentado y observado[7].

Esta característica particular del sistema lógico de Peirce, sumado al carácter general que le atribuye a la lógica como teoría general de demostración, que contiene a la matemática como un caso particular de demostración necesaria, hace evidente la aplicabilidad del sistema alpha como un sistema de deducción natural , poniendo en cierta concordancia las ideas de Peirce con los objetivos sistémicos que apunta Gentzen: "Queremos ofrecer un formalismo que refleje del modo preciso posible el razonamiento lógico propio de las pruebas matemáticas"[8]. Esta idea particular es determinante para entender el carácter natural de estos sistemas. La naturalidad se comprende en tanto existe una similitud entre los procesos deductivos en el sistema y el razonamiento informal (matemático). Cuando se formalizan pruebas informales (matemáticas) en estos sistemas el carácter informal se preserva en las pruebas. Esta característica muestra a los sistemas de deducción natural como un modo de elucidación posible del concepto informal de consecuencia lógica.

Por otra parte, podemos comprender el carácter natural de los sistemas de deducción natural en tanto las reglas de inferencia se encuentran sistematizadas a partir de la interpretación de las constantes lógicas. Por estos motivos, los sistemas de deducción natural constituyeron

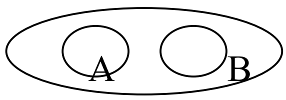
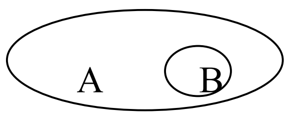
---

[7] Roberts, D.D., 1973. *The Existencial Graphs of Charles S. Peirce*. The Hague: Mouton, pp. 16-17.

[8] "*We wish to set up a formalism that reflects as accurately as possible the actual logical reasoning involved in mathematical proofs"*.

una manera diferente y novedosa de presentación lógica donde la noción de demostración cumplía un rol central. Los sistemas de deducción natural constan de reglas de inferencia que permiten la introducción y la eliminación del conjunto de las constantes lógicas. Según Gentzen “las introducciones representan, por así decirlo, las definiciones de los símbolos en cuestión, y las eliminaciones son, al final de cuentas, tan sólo consecuencias de aquellas” (Gentzen 1934-1935, p. 189). Estas ideas tienen una filiación directa con las ideas embrionarias de Peirce, como se justificó en el apartado anterior.

Peirce establece la sintaxis del sistema alpha a partir de 3 tipos de símbolos: la hoja de aserción (SA), el corte (Cut) y el gráfico (Graph), y una serie de convenciones que determinan las condiciones de su uso. Utilizando estas convenciones produce un interesante sistema de notación diagramático que por su versatilidad expresiva resulta adecuado para describir el conjunto de las relaciones posibles para la lógica proposicional. Podemos caracterizar, por ejemplo, las conectivas básicas de la lógica proposicional de la siguiente manera:

$\neg A$		<A>
$A \wedge B$	A B	A B
$A \vee B$		<<A><B>>
$A \rightarrow B$		<A <B>>

Como se indica arriba, los gráficos pueden dar lugar a un sistema de representación lineal donde se utiliza “<…>” como figura análoga al corte. Peirce afirma que los enunciados que aparecen en la hoja de aserción se afirman como verdaderos (Peirce CP 4.421)y que los “cortes” indican negaciones.

Los sistemas de deducción natural tienen, en general, algunas características especiales que los determinan. Las características más reconocidas son:

a. Ausencia de axiomas
b. Reglas de introducción y eliminación para cada una de las constantes lógicas.
c. Las inferencias son naturales o traducen el razonamiento informal (matemática).

Si bien es una noción difundida que los sistemas de deducción natural carecen de axiomas. En los gráficos alpha, sin embargo, se pueden establecer con claridad algunos axiomas, pero su método de prueba no se vale de los mismos y coincide con el modo de prueba que Church (1956a) atribuye a los métodos de Deducción Natural[9]. El propio Peirce relativiza la aplicación de sus axiomas cuando afirma en 1870: "Pero tales axiomas son meros sustitutos de definiciones de relaciones lógicas universales y, en la medida en que se las puede definir, se puede prescindir de todos los axiomas. Los principios fundamentales de la lógica proposicional no son propiamente axiomas sino definiciones y divisiones..." (CP 3.149).

A su vez, Peirce establece reglas de transformación que permiten obtener gráficos nuevos a partir de la operación sobre los gráficos disponibles. El Sistema Alpha cuenta con 5 reglas de transformación:

R1: Borrado (*erasure*): En un área par puede borrarse cualquier gráfico. Esta estrategia se corresponde con el refuerzo del antecedente.

R2: Inserción (*insertion*): En un área impar puede agregarse cualquier gráfico. Esta estrategia se corresponde con debilitar el consecuente.

R3: Iteración (*iteration*) : Puede repetirse cualquier gráfico en su misma área o en un área anidada a la anterior.

R4: Deiteración (*deiteration*): Si es posible que un gráfico sea entendido como el resultado de una iteración puede ser borrado.

R5: Doble corte (*double cut*): El doble corte puede ser insertado o borrado de cualquier gráfico y en cualquier área.

[9] Roberts, D.D., 1973. *The Existencial Graphs of Charles S. Peirce*. The Hague: Mouton, p. 120.

Son el conjunto de estas reglas de transformación las que permiten la derivación de un teorema *n* a partir de un número finito de pasos. De esta manera, el sistema alpha puede estructurarse como un sistema de deducción natural completo para la lógica proposicional. Para lograr el objetivo anterior podríamos eliminar los axiomas y ordenar las derivaciones a partir de las reglas de transformación. Con ese fin, eliminaremos la convención que establece a la hoja de aserción como un gráfico (C1). Roberts considera también la necesidad de agregar una regla adicional que denomina (a):

(a) Si A puede transformarse en B, podremos escribir que <A<B>> .

Este agregado es necesario, según Roberts, puesto que él considera que el doble corte puede comprenderse como un axioma del sistema (al igual que SA y la línea de identidad). Según Roberts para establecer esta nueva versión de alpha como un sistema completo es suficiente obtener el doble corte como un teorema del sistema. Pero esta comprobación lleva a circularidades en la demostración lo que se supone como innecesario:

1. A supuesto
2. <<A>> (R5) 1
3. A (R5) 2
4. <A <A> > (a) 1-3
5. < <<A>> <A> > (R5) 4
6. << > <A>> (R4) 5
7. << > < >> (R1) 6
8. << >> (R4) 7

Una vez establecido que el doble corte puede derivarse en el sistema alpha, también es posible derivar el conjunto de los axiomas del Sistema P propuesto por Church (1956a), lo que constituye una prueba adecuada de su completitud. Analicemos como más detalle las presentes afirmaciones:

Sistema P Church

P1: $p \to (q \to p)$
P2: $((p \to (q \to r)) \to ((p \to q) \to (p \to r)))$
P3: $((\neg p \to \neg q) \to (q \to p))$
R1: De $p \to q$ y p se infiere q

Expresión equivalente con Gráficos alpha:

P1: <A <<B <A >>>>

P2: <<A<<B<C>>>><<<A<B>><<A<C>>>>>>

P3: <<<A><<B>>><<B<A>>>>

R1: De <A <B>> y A se infiere B

Derivación de P1 con Peirce:

1. << >> (R5)
2. <A B < >> (R2) en 1
3. <A B <A >> (R3)
4. <A <<B <A >>>> (R5)

Derivación de P2 con Peirce:

1. << >> (R5)
2. <<A<<B<C>>>>< >> (R2) en 1
3. <<A<<B<C>>>>< <A<<B<C>>>>>> (R3) en 2
4. <<A<<B<C>>>>< <A B<C>>>> (R5) en 3
5. <<A<<B<C>>>>< <A <<B>><C>>>> (R5) en 4
6. <<A<<B<C>>>>< <A <A<B>><C>>>> (R3) en 5
7. <<A<<B<C>>>><<<A<B>><<A<C>>>>>> (R5) en 6

Derivación de P3 con Peirce:

1. << >> (R5)
2. << >B< A>> (R2) en 1
3. << < A>B >B< A>> (R3) en 2
4. <<<A><<B>>><<B<A>>>> (R5) dos veces.

Derivación de R1 con Peirce:

1. A <A <B>> Premisa
2. <A <B>> (R3) en 1
3. < <B>> (R4) en 2
4. B (R5) en 3

Deducción natural y Gráficos alpha

Hay una tendencia a preferir los sistemas de deducción natural sobre otras presentaciones de los sistemas lógicos. Una de las causas de esta preferencia se fundamenta sobre aspectos didácticos que poseen estos últimos sobre otras presentaciones lógicas. Analizaremos la propuesta de Sun Joo Shin, quién compara las características del sistema de deducción natural de los gráficos alpha con una idealización particular de los sistemas de deducción natural. El primer elemento que considera Shin es la distribución de las reglas del sistema.

Advierte que en los sistemas mas difundidos *"todas las reglas deductivas de la lógica proposicional están construidas sobre conectivas. Las reglas instruyen al usuario cómo eliminar y cómo introducir cada uno de estos objetos sintácticos. Esta es la manera más natural de manipular las unidades significativas del sistema, puesto que las fórmulas se construyen inductivamente a partir de símbolos y conectivas. Cuando las reglas de inferencia se basan en el modo como las unidades significativas se construyen, es fácil para el usuario seleccionar la regla apropiada en cada paso de la prueba. Por ejemplo, cuando una premisa es una conjunción sabemos que la regla de eliminación nos permite analizar esa línea. Si la conclusión es condicional, sabemos que la regla de introducción del condicional será necesaria en esa derivación. Esta es la razón principal porque los sistemas de deducción natural reciben su nombre"*[10].

Considerando la idea de naturalidad en tanto aplicación de reglas de introducción y eliminación, afirma que las reglas de transformación quitan simetría al sistema. Y sin esa simetría de operación el sistema de Peirce carece de naturalidad y eficacia. La crítica de Shin aquí cala más hondo, porque si esta característica es definitoria de los sistemas de deducción natural, se podría justificar que los gráficos alpha no constituyen un sistema de deducción tal.

---

[10] "*All natural deductive rules of propositional logic are built around connectives. The rules instruct the user how to eliminate and how to introduce each of these syntactic objects. This is the most natural way to manipulate the system's meaningful units, because formulas are inductively built out of sentential symbols and connectives. When inference rules are based on how meaningful units of a system are built, it is easy for the user to choose an appropriate rule in each proof step. For example, when a premise is a conjunctive sentence, we know that the conjunction-elimination rule is needed to use this premise. If the conclusion is a conditional sentence, we know that the conditional introduction rule is needed somewhere in the proof. This is a main reason why natural deductive systems received their name*".

¿Qué es lo que hace que un sistema lógico pueda ser considerado un sistema de deducción natural? Según Pelletier & Hazen, si bien hay un conjunto de características prototípicas que contribuyen para que un sistema de prueba pueda considerarse un sistema de deducción natural, no hace falta contar con todas estas para conformar uno. Basta con escalar más en otros aspectos que nivelen esa carencia. La distribución de las reglas a partir de las introducciones y eliminaciones de las constantes no es común al conjunto de los sistemas de deducción natural. Por ejemplo, el sistema de Copi (1956) distribuye las reglas por fuera de estos parámetros, incluso determina un subconjunto de equivalencias que podrían interpretarse como axiomas del sistema. En el caso de Peirce, sin embargo, algunas de sus reglas guardan esa doble relación, como es el caso de la inserción y el borrado. Pero se advierte que la organización de las mismas no se apega estrictamente a la definición de constantes aunque no por ello carece de naturalidad. No se trata de establecer introducciones o eliminaciones sino de centrar el análisis a partir de los elementos lógicos del sistema. Y este objetivo lo cumple Peirce elegantemente considerando las particularidades gráficas de su sistema.

Por otra parte, Shin critica que las fórmulas en el sistema de Peirce, por su ambigüedad, no se pueden rastrear con facilidad. Muestra que las historias derivacionales en los Gráficos Existenciales pueden ser más variadas que las resultantes de otros sistemas difundidos. En el ejemplo se muestra cómo la fórmula <A <B> >, equivalente al condicional material, puede surgir de una multiplicidad de condiciones iniciales:

1. B se sigue <B> se sigue A <B> se sigue <A <B> >
2. A B se sigue A <B> se sigue <A <B> >
3. < > se sigue <B> se sigue A <B> se sigue <A <B> >
4. A se sigue <A> se sigue <A < > > se sigue <A <B> >

Sin embargo, estas historias derivacionales se determinan contextualmente en cada deducción, y si bien no tienen la transparencia histórica de la conectiva, tienen un valor agregado didáctico puesto que permiten a los usuarios entrenados en el uso de conectivas ver una pluralidad de significados diversos equivalentes. En los gráficos alpha esta falencia se nivela a partir del carácter icónico de las expresiones que permiten reforzar el carácter visual de las demostraciones.

Los fundamentos que inspiran la resignación de métodos y propuestas enriquecedoras como la presente responden más a rasgos accidentales de la evolución y selección de los sistemas de representación lingüística sobre los sistemas diagramáticos por parte de las comunidades académicas, que por la determinación de una ineficacia real[11]. El sistema de Peirce marca una nueva tipología de sistemas gráficos de deducción natural de los cuales, la versión de Jaśkowski para dar cuenta de los supuestos con cajas, representa una versión moderada. En conclusión las afirmaciones críticas de Sun Joo Shin sobre los gráficos alpha como sistema de deducción natural son relativas y no determinan razones de peso para justificar la preeminencia de otros sistemas más difundidos. Incluso podemos afirmar que muchas de las características y riquezas del sistema gráfico de Peirce, en tanto ingeniería para pensar, permanecen inexploradas[12].

---

[11] PELLETIER, F.J. & HAZEN, A. "Natural Deduction" in Dov Gabbay & John Woods Handbook of the History of Logic; Vol. 11 "Central Concepts". 2012.

[12] Brady, G., 2000. From Peirce to Skolem. A neglected chapter in the history of logic, Amsterdam: Elsevier, p.73 : "his natural deduction system for propositional logic, however, is quite beautiful".

Bibliografía

Barwise, J. / E. Hammer, 1994. "Diagrams and the Concept of a Logical System", en *What is a logical system?*, D. Gabbay (ed.), Oxford, Clarendom Press, 73-106.

Boole, G., 1847. *The Mathematical Analysis of Logic*, traducción española: *El análisis matemático de la lógica*, Madrid, Cátedra, 1984.

Erad, Y. G., 2000. *From Peirce to Skolem. A Neglected Chapter in the History of Logic*, Amsterdam, Elsevier.

Brent, J., 1993. *C.S. Peirce. A Life*, Bloomington, Indiana University Press.

Castrillo, P. 2007. "Antecedentes matemáticos del pensamiento lógico de C. S. Peirce", *Éndoxa: Series Filosóficas*, n. 22, 2007, pp. 9-30. UNED, Madrid.

De Morgan, A., 1966. *On the Syllogism and Other Logical Writings*, P. Heath (ed.), New Haven, Yale University Press.

Dlpert, R., 1977. "Peirce's Theory of Geometrical Structure of Physical Space", en *Isis* 68, pp. 404-413.

Elsele, C., 1979. *Studies in the Scientific and Mathematical Philosophy of C.S. Peirce*, R. Martin (ed.), La Haya, Mouton Publishers.

Pelletier, F. J., 1999. *A History of Natural Deduction and Elementary Logic Textbooks. History and Philosophy of Logic*, v. 20, pp. 1-31.

Pelletier, F.J. y Hazen, A., 2012. "Natural Deduction" en Dov Gabbay y John Woods (eds.), *Handbook of the History of Logic*, vol. 11: "Central Concepts".

Shimojima, A., 1999. "The Linguistic-Graphic Distinction: Exploring Alternatives," *Artificial Intelligence Review*, vol. 13, n. 4, pp. 313-335.

Shin, S. J., 2002. *The Iconic Logic of Peirce's Graphs*, Cambridge, MA, MIT Press.