PEANO, LAWVERE, PEIRCE: TRES AXIOMATIZACIONES DE LOS NÚMEROS NATURALES

LINA MARÍA BEDOYA MEJÍA

UNIVERSIDAD DEL TOLIMA
FACULTAD DE CIENCIAS
IBAGUÉ
2003

PEANO, LAWVERE, PEIRCE: TRES AXIOMATIZACIONES DE LOS NÚMEROS NATURALES

LINA MARÍA BEDOYA MEJÍA

**Trabajo de grado para optar al título de
Profesional en Matemática con énfasis en Estadística**

**Director
M. Sc. ARNOLD OOSTRA
Profesor del Departamento de Matemáticas y Estadística**

**UNIVERSIDAD DEL TOLIMA
FACULTAD DE CIENCIAS
IBAGUÉ
2003**

Contenido

Introducción

En algunos textos aristotélicos, como el *Órganon*, se propone el método axiomático como el más adecuado para elevar determinado conjunto de proposiciones al rango de ciencia. En éste método se quiere hacer descender todas las proposiciones de algunas primitivas, llamadas axiomas del sistema deductivo.

Bajo ésta perspectiva, la primera ciencia es la geometría, pues sus enunciados fueron recopilados y organizados de manera deductiva por Euclides hacia el año 300 antes de Cristo, en el texto matemático más célebre de todos los tiempos: *Elementos*. Aunque en éste documento se utilizaron algunos axiomas no formulados y aparecen algunos razonamientos lógicamente incorrectos, *Elementos* abrió un camino hacia la formalización de la geometría. El trabajo de la axiomatización de la geometría concluye en 1899 cuando el matemático alemán David Hilbert publica *Fundamentos de la Geometría*, que contiene un sistema completo de axiomas para la geometría euclidiana. Pero Hilbert va más lejos, empleando su axiomatización para basar la consistencia de su sistema en la consistencia de la aritmética. Ésta es la llamada "aritmetización de la geometría".

En la misma época los trabajos de Weierstrass, basados en los de Cauchy, habían logrado la "aritmetización del análisis" en el sentido de que es posible construir el sistema de los números reales (espacio natural del cálculo o análisis) a partir de los números naturales.

En el círculo de estudiosos y aficionados a las matemáticas se acepta de manera generalizada que el sistema de los números naturales fué axiomatizado en 1889 por el matemático italiano Giuseppe Peano en el texto *Arithmetices Principia Nova Methodo Exposita* y, aunque no es un hecho tan conocido, se acepta que ella se basa en trabajos anteriores de Richard Dedekind. Lo que se ignora de manera casi universal es que varios años antes el norteamericano Charles S. Peirce publicó un sistema completo de axiomas para los números naturales.

Charles S. Peirce está siendo reconocido como el científico, filósofo y humanista más brillante y versátil de América. Sus aportes a la lógica y a la filosofía revolucionaron éstas ciencias. En la primera mitad de la década de los 80 (del siglo XlX), vinculado a la Universidad Johns Hopkins, produjo una serie genial de trabajos en matemáticas entre los que se cuenta el artículo *On the Logic of Number* (1881), que incluye -entre otras ideas- una axiomatización de la aritmética.

Por múltiples razones, desde personales hasta epistemológicas, la obra de Peirce no recibió desde el comienzo la atención que merecía. Pasó un siglo antes de que éste inmenso legado empezara a estudiarse con profundidad, no sólo por los filósofos sino también por algunos matemáticos. Cada fragmento de la obra de Peirce, por particular que parezca, merece un estudio cuidadoso. Aunque los trabajos sobre el legado peirceano se han multiplicado en las últimas décadas, en especial desde el punto de vista de la filosofía, los trabajos en la matemática de Peirce son aún muy escasos, aún a nivel mundial. En Colombia, aparte de un grupo de filósofos estudiosos de Peirce pueden destacarse los aportes del matemático Fernando Zalamea. En particular, sobre la axiomatización de los números naturales propuesta por Peirce sólo se conoce un estudio: una tesis de doctorado en filosofía presentada por Paul Shields en Nueva York en 1981.

En 1945 nace la teoría de categorías, una manera completamente novedosa de ver la matemática. Uno de sus mayores impulsadores, el norteamericano F. William Lawvere, tradujo los axiomas de Peano al lenguaje categórico obteniendo la noción de “objeto números naturales”, bastante empleada en ese contexto. Esa axiomatización no es muy conocida.

En este trabajo se hace una extensa presentación de las axiomatizaciones mencionadas antes, haciendo especial énfasis en la de Peirce, y se dan indicaciones acerca de la equivalencia de estos tres sistemas. En el capítulo 1 se revisa la axiomatización de los números naturales debida a Peano; en el capítulo 2 se presenta la axiomatización de Lawvere y se estudia su equivalencia con la de Peano. En el capítulo 3 se reseña con detalle el artículo *On the Logic of Number*, que contiene la axiomatización de los números naturales debida a Peirce; en el capítulo 4 se discute la equivalencia de las axiomatizaciones de Peano y de Peirce. El capítulo 5 es la traducción al español del artículo *On the Logic of Number*.

El material contenido en los capítulos 1 y 2 aparece en la bibliografía disponible de temas afines, aunque esta presentación es original. La reseña del capítulo 3 y la prueba de equivalencia en el capítulo 4 son aportes originales mientras el capítulo 5 es, hasta donde se sabe, la primera traducción al español de esta artículo de C. S. Peirce.

Capítulo 1

La axiomatización de Peano

La más conocida axiomatización de los números naturales, contenida en el escrito *Arithmetices Principia Nova Methodo Exposita* del italiano Giuseppe Peano, se presenta en este capítulo en forma detallada, al igual que la forma mas moderna de la axiomatización, la definición de las operaciones y sus propiedades debidamente demostradas.

1.1 Presentación de los números naturales por Peano

Además de ser, junto con la astronomía, las ciencias más antiguas, la geometría y la aritmética han sido consideradas desde los pitagóricos los pilares fundamentales del edificio de la matemática. La axiomatización de la geometría fué un proceso muy largo, que aunque iniciado mucho antes, se materializó por primera vez en el trabajo *Elementos* [5], de Euclides, unos 300 años antes de Cristo. Durante el siglo XlX, sin duda con el impulso de la aparición de las geometrías no euclidianas, se multiplicaron los esfuerzos por axiomatizar la geometría, empeño culminado finalmente en 1899 con la publicación de *Fundamentos de la Geometría*, de David Hilbert [3]; también se presentaron varias axiomatizaciones de la aritmética o, con más precisión, de los números naturales.

Sin lugar a dudas, la más conocida es la que presentó el matemático italiano Giuseppe Peano (1858-1932) por primera vez en 1889 en un pequeño libro publicado en Turín, titulado *Arithmetices Principia Nova Methodo Exposita* [10]. Este texto incluye sus famosos axiomas, pero más que un texto de aritmética, este documento contiene una introducción a la lógica en la cual se presentan por primera vez los símbolos actuales para representar la pertenencia, la existencia, la contenencia (en la actualidad es invertido, acorde con el de los números) y para la unión y la intersección.

Peano reconoce hacer uso de estudios de otros autores: en 1888 después de estudiar a G. Boole, E. Schröder, C. S. Peirce y otros, estableció una analogía entre operaciones geométricas y algebraicas con las operaciones de la lógica; en aritmética menciona el trabajo de Dedekind [4] publicado el año anterior -reconocido de manera generalizada como la primera axiomatización de la aritmética, aunque salió a la luz 7 años después del artículo de Peirce- y un texto de Grassmann de 1861. Este último libro posiblemente fué fuente de inspiración tanto para Peano y Dedekind como para Peirce.

Arithmetices Principia, escrito en latín, es el primer intento de Peano para lograr una axiomatización de las matemáticas en un lenguaje simbólico. Consiste en un prefacio y 10 secciones:

1. Números y Adición
2. Sustracción
3. Máximos y Mínimos
4. Multiplicación
5. Potenciación
6. División

7. Teoremas varios
8. Razones de Números
9. Sistemas de Racionales e Irracionales
10. Sistemas de Cantidades

Desarrolla en extenso el primero; en el segundo, cuarto, quinto y sexto sólo da explicaciones y definiciones omitiendo los teoremas, los otros los deja de lado. Sus estudiantes completaron la tarea, una versión alemana de E. Landau tiene todos los detalles.

Usa la lógica de Boole y Schröder e introduce innovaciones: por ejemplo, usa diferentes símbolos para las operaciones lógicas y matemáticas, distingue entre las proposiciones categóricas y condicionales y formula una teoría de cuantificación (estas fueron innovaciones relativas a Boole y Schröder - no a Frege, cuyo trabajo Peano no conocía en ese tiempo). La parte lógica de la obra presenta fórmulas del cálculo proposicional, del cálculo de clases y teoría de cuantificación.

Introduce nociones y fórmulas lógicas para reescribir la aritmética en notación simbólica, que sirve para tratar también con fracciones, números reales, incluso la noción de límite y definiciones en la teoría de conjuntos. Las fórmulas son listadas, pero no derivadas pues no posee reglas de inferencia. Prueba una lista de fórmulas, cada una relacionada con la siguiente, pero no son pruebas formales. La ausencia de una regla de eliminación parece estar vinculada con la inadecuada interpretación del condicional, el lee $a \longrightarrow b$ como "de a uno deduce b", lo cual permanece vago; no usa los valores de verdad.

A continuación se hace una presentación muy resumida de la primera parte del libro de Peano (véase también [13]). En el prefacio se introduce una gran cantidad de notación lógica. El §1 comienza con las "explicaciones" siguientes.

- El símbolo N significa *número* (entero positivo).
- El símbolo 1 significa *unidad.*
- El símbolo $a + 1$ significa *el sucesor de* a, o, a *más* 1.
- El símbolo $=$ significa *es igual a.*

En seguida se enuncian los "axiomas". En esta presentación sólo se ha modificado la notación lógica.

1. $1 \in N$
2. Si $a \in N$ entonces: $a = a$
3. Si $a \in N$ entonces: $a = b$ si y sólo si $b = a$
4. Si $a, b, c \in N$ entonces: $a = b, b = c$ implica $a = c$
5. Si $a = b$ y $b \in N$ entonces: $a \in N$
6. Si $a \in N$ entonces: $a + 1 \in N$
7. Si $a \in N$ entonces: $a = b$ si y sólo si $a + 1 = b + 1$
8. Si $a \in N$ entonces: $a + 1 \neq 1$
9. Si k es una clase, $1 \in k$, y si para $x \in N$: $x \in k$ implica $x + 1 \in k$, entonces $N \subseteq k$.

Los axiomas 2, 3, 4 y 5, que se refiern a la igualdad, hoy se consideran pertenecientes a la lógica fundamental. Los restantes cinco axiomas son conocidos como los axiomas de Peano. El último axioma, es una traducción del principio de inducción matemática, está formulado en términos de clases y contiene una clase variable k (en la presentación de Peano aparece también una clase de todas las clases, K).

Peano reconoce el aporte de Dedekind y Grassmann en la parte aritmética; en cuanto a Frege, Peano conoció su trabajo después de la publicación de *Arithmetices Principia*. Introduce la adición, multiplicación y potenciación como definiciones; estas definiciones son recursivas, pero en su sistema no hay manera de justificar tales definiciones. No afirmó explícitamente que esas definiciones eran eliminables, pero tampoco satisfacen sus propios criterios, es decir, que el lado derecho de una definición es un agregado de signos que tienen un significado conocido.

En 1931, Kurt Gödel probó que el sistema de Peano es incompleto, esto es, allí hay afirmaciones que no se pueden demostrar ni refutar.

1.2 Axiomatización de los números naturales según Peano

Como se indicó, en la actualidad varios de los axiomas de Peano se consideran axiomas o propiedades lógicas. En esta sección se hace una presentación más moderna de la axiomatización de Peano, se puede ver con facilidad que es equivalente a la original.

Términos:

Un conjunto, N; una función, σ, de N en N; una constante, 1, en N.

Axiomas:

1. σ es inyectiva
2. 1 no pertenece al recorrido de σ
3. Si un subconjunto $S \subseteq N$ satisface
   - $1 \in S$
   - para cada $n \in N$, si $n \in S$ entonces $\sigma(n) \in S$

   entonces $S = N$

1.3 Las operaciones y sus propiedades

Ahora se definen las operaciones aritméticas y se prueban sus propiedades fundamentales. Aunque las definiciones son, en esencia, las mismas dadas por Peano, aquí se emplea la axiomatización resumida de la sección 1.2.

Definición. La operación *adición*, denotada $+$, se define en N por recurrencia así.

$$\begin{cases} x + 1 = \sigma(x) \\ x + \sigma(y) = \sigma(x + y) \end{cases}$$

El elemento $x + y$ se llama *suma* de x e y.

Propiedad 1.3.1 (Cancelativa de la adición). *$a = b$ si y sólo si $a + c = b + c$.*

Demostración. Por inducción sobre c.

Como σ es una función inyectiva (axioma 1), $a = b$ si y sólo si $\sigma(a) = \sigma(b)$; por definición, esto es $a + 1 = b + 1$.

Supóngase que $a = b$ si y sólo si $a+n = b+n$. Siendo σ inyectiva, $a+n = b+n$ si y sólo si $\sigma(a+n) = \sigma(b+n)$; por definición, esto es $a+\sigma(n) = b+\sigma(n)$. De esta manera también $a = b$ si y sólo si $a + \sigma(n) = b + \sigma(n)$. □

Propiedad 1.3.2 (Asociativa de la adición).

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$

Demostración. Por inducción sobre c.

Por definición $(a + b) + 1 = \sigma(a + b) = a + \sigma(b) = a + (b + 1)$.

Si $(a + b) + n = a + (b + n)$ entonces $(a + b) + \sigma(n) = \sigma((a + b) + n) = \sigma(a + (b + n)) = a + \sigma(b + n) = a + (b + \sigma(n))$. □

Propiedad 1.3.3 (Conmutativa de la adición).

$$a + b = b + a$$

Demostración. Por inducción sobre a.

El caso $a = 1$ se prueba, a su vez, por inducción sobre b. Es claro que $1+1 = 1+1$; si $1+m = m+1$ entonces $1+\sigma(m) = \sigma(1+m) = \sigma(m+1) = \sigma(\sigma(m)) = \sigma(m)+1$.

Si $n+b = b+n$ entonces $\sigma(n)+b = (n+1)+b = n+(1+b) = n+(b+1) = (n+b)+1 = (b+n)+1 = \sigma(b+n) = b+\sigma(n)$. □

Propiedad 1.3.4. *Si $a, b \in N$ entonces $a+b \neq a$.*

Demostración. Por inducción sobre a.

El axioma 2 indica que $\sigma(b) \neq 1$ para cada b, es decir, $1+b = b+1 = \sigma(b) \neq 1$.

Si $n+b \neq n$ entonces por el axioma 1 es $\sigma(n+b) \neq \sigma(n)$, es decir, $(n+b)+1 \neq n+1$ de donde, por propiedades aritméticas ya indicadas, $(n+1)+b \neq n+1$, esto es, $\sigma(n)+b \neq \sigma(n)$. □

Propiedad 1.3.5. *Si $a \in N$ y $a \neq 1$ entonces existe $b \in N$ tal que $a = b+1$.*

Demostración. Esta prueba, por inducción sobre a, es un ejemplo notable de un razonamiento estrictamente formal.

Si $1 \neq 1$ *entonces existe* b *tal que* $1 = b+1$. El antecedente de esta implicación es falso, luego la proposición es verdadera.

Si [Si $n \neq 1$ entonces existe b tal que $n = b+1$] *entonces* [Si $n+1 \neq 1$ entonces existe c tal que $n+1 = c+1$]. El consecuente de la segunda proposición es verdadero de manera evidente (basta tomar $c = n$) luego esta proposición es verdadera; la segunda proposición es el consecuente de la proposición completa, luego esta última también es verdadera. □

Propiedad 1.3.6. *Si $a, b \in N$ y $a \neq b$ entonces existe $p \in N$ tal que $a+p = b$ o bien existe $q \in N$ tal que $a = b+q$.*

Demostración. Por inducción sobre b.

Si $a \neq 1$, la propiedad 1.3.5 indica que existe $q \in N$ tal que $a = 1+q$.

Supóngase que la proposición es válida para $a = n$. Ahora si $a \neq n + 1$ hay dos posibilidades: $a = n$ o bien $a \neq n$. En el primer caso, existe 1 que satisface $a + 1 = n + 1$. En el segundo caso, la hipótesis inductiva presenta de nuevo dos opciones.

Si $a \neq n$ y existe p tal que $a + p = n$ entonces es claro que

$$a + (p + 1) = (a + p) + 1 = n + 1;$$

si $a \neq n$ y existe q tal que $a = n + q$, de $a \neq n + 1$ se sigue $q \neq 1$ y por la propiedad 1.3.5 existe $r \in N$ tal que $q = 1 + r$, de donde

$$a = n + q = n + (1 + r) = (n + 1) + r.$$

□

Definición. La operación *multiplicación*, denotada sin símbolo, se define en N por recurrencia así.

$$\begin{cases} x1 = x \\ x\sigma(y) = xy + x \end{cases}$$

El elemento xy se llama *producto* de x e y.

Propiedad 1.3.7 (Distributiva a la derecha).

$$(a + b)c = ac + bc$$

Demostración. Por inducción sobre c.

Por definición $(a + b)1 = a + b = (a1) + (b1)$.

Si $(a+b)c = ac+bc$ entonces $(a+b)\sigma(c) = (a+b)c+(a+b) = (ac+bc)+(a+b)$. Por propiedades de la adición presentadas antes, $(ac+bc)+(a+b) = (ac + a) + (bc + b) = a\sigma(c) + b\sigma(c)$. □

Propiedad 1.3.8 (Conmutativa de la multiplicación).

$$ab = ba$$

Demostración. Por inducción sobre a.

El caso $a = 1$ se prueba, a su vez, por inducción sobre b. Es claro que $(1)(1) = (1)(1)$; si $1m = m1$ entonces $1\sigma(m) = 1m + 1 = m1 + 1 = m + 1 = \sigma(m) = \sigma(m)1$.

Si $nb = bn$ entonces $\sigma(n)b = (n + 1)b = nb + 1b = bn + b1 = bn + b = b\sigma(n)$. □

Propiedad 1.3.9 (Distributiva a la izquierda).

$$a(b + c) = ab + ac$$

Demostración. Por propiedades anteriores se tiene

$$a(b + c) = (b + c)a = ba + ca = ab + ac.$$

□

Propiedad 1.3.10 (Asociativa de la multiplicación).

$$a(bc) = (ab)c$$

Demostración. Por inducción sobre c.

Por definición $a(b1) = ab = (ab)1$.

Si $a(bn) = (ab)n$ entonces $a(b\sigma(n)) = a(bn+b) = a(bn)+ab = (ab)n+ab = (ab)\sigma(n)$. □

Capítulo 2

La axiomatización de Lawvere

William Lawvere presenta lo que puede considerarse una nueva axiomatización de la aritmética, la traducción de los axiomas de Peano al lenguaje categórico. En el presente capítulo se muestra esta nueva axiomatización, algunos campos de la matemática en los cuales se puede utilizar esta y la respectiva demostración de la equivalencia con el sistema de Peano.

2.1 El 'objeto números naturales' introducido por Lawvere

La construcción siguiente es común en matemáticas. Dado un conjunto X y una función f de este conjunto en sí mismo, un elemento arbitrario $a \in X$ genera una sucesión, a saber

$$a, f(a), f(f(a)), f(f(f(a))), \ldots$$

Si esta sucesión se denota (s_n), sus términos pueden describirse por recurrencia como sigue.

$$\begin{cases} s_0 = a \\ s_{n+1} = f(s_n). \end{cases}$$

Un lugar "popular" en matemáticas donde se usa esta sucesión es la prueba de que toda función contractiva en un espacio métrico completo tiene algún punto fijo. En efecto, si X es un espacio métrico y la función f es contractiva, la sucesión (s_n) es de Cauchy; si además el espacio es completo, ella converge a un límite L. Este punto tiene la propiedad $f(L) = L$, es decir, es un punto fijo de f.

Otro contexto, cada vez más "popular", donde se emplea esta función es en el estudio de sistemas dinámicos (más o menos) caóticos. Si $X = \mathbb{R}$ y $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es la función definida como

$$f(x) = \lambda x(1 - x),$$

se toma $a = 0.5$ y se estudia el comportamiento de la sucesión para valores distintos del parámetro λ. Cuando $0 < \lambda < 3$, la sucesión converge a un límite; cuando λ sobrepasa "un poco" a 3, la sucesión termina oscilando entre dos valores; en $\lambda = 3.5$ la sucesión oscila entre cuatro valores; al aumentar λ el comportamiento es cada vez más extraño. Esta dependencia fuerte que presenta el comportamiento global de una variación muy pequeña en las condiciones iniciales, es la característica distintiva de lo que se denomina caos.

La teoría de categorías puede describirse, en primera instancia, como aquella que se ocupa de todo lo expresable mediante flechas (morfismos) y diagramas conmutativos [1]. En el caso de la matemática usual, se trata de ver las nociones no de manera analítica (en términos de elementos) sino sintética (en términos de funciones). William Lawvere, uno de los más importantes forjadores e impulsadores de la teoría de categorías durante el siglo XX, observó que es sencillo describir la sucesión discutida arriba mediante flechas y diagramas conmutativos.

Una sucesión en un conjunto X es una función $s : \mathbb{N} \to X$. La condición

$$s(n + 1) = f(s(n))$$

puede expresarse como $s(\sigma(n)) = f(s(n))$ o como $s\sigma(n) = fs(n)$, siendo $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ la función sucesor definida como $\sigma(n) = n + 1$. A su vez, la igualdad de funciones $s\sigma = fs$ puede expresarse afirmando que el diagrama siguiente conmuta.

$$\begin{tikzcd} N \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "s"'] & N \arrow[d, "s"] \\ X \arrow[r, "f"'] & X \end{tikzcd}$$

Por otra parte, un elemento de un conjunto arbitrario X puede verse como una función $T \to X$ siendo T un conjunto unitario. Luego la condición $s(0) = a$ puede expresarse afimando que el diagrama siguiente conmuta.

$$\begin{tikzcd} & N \arrow[dd, "s"] \\ T \arrow[ur, "0"] \arrow[dr, "a"'] & \\ & X \end{tikzcd}$$

Los dos diagramas conmutativos pueden integrarse en uno solo, como sigue.

$$\begin{tikzcd} & N \arrow[r, "\sigma"] \arrow[dd, "s"'] & N \arrow[dd, "s"] \\ T \arrow[ur, "0"] \arrow[dr, "a"'] & & \\ & X \arrow[r, "f"'] & X \end{tikzcd}$$

Una terna $(N, \sigma, 0)$ tal que para cualquier terna (X, f, a) existe un único $s : N \to X$ que hace conmutativo este diagrama, es lo que Lawvere denomina un *objeto números naturales* [7]. Se nota que en esta definición solo intervienen flechas y diagramas conmutativos, de manera que ella tiene sentido en contextos muy generales de la teoría de categorías. De hecho, la noción de objeto números naturales juega un papel importante en ciertos desarrollos recientes de esta teoría.

2.2 Axiomatización de los números naturales según Lawvere

La siguiente es una presentación concisa de la axiomatización de Lawvere, con el mismo estilo empleado en la sección 1.2.

Términos:

Un conjunto, N; una función, σ, de N en N; una constante, 0, en N.

Axioma:

> Para cualquier conjunto X con función $f : X \longrightarrow X$ y elemento $a \in X$, existe una única función $s : N \longrightarrow X$ tal que
>
> $$\begin{cases} s(0) = a \\ s\sigma = fs \end{cases}$$

Esta axiomatización se puede presentar con diagramas sucesivos, como sigue.

$$\begin{tikzcd} T \arrow[r, "0"] & N \arrow[r, "\sigma"] & N \end{tikzcd}$$

$\forall$

$$\begin{tikzcd} T \arrow[r, "0"] \arrow[dr, "a"'] & N \arrow[r, "\sigma"] & N \\ & X \arrow[r, "f"'] & X \end{tikzcd}$$

$\exists!$

$$\begin{tikzcd} T \arrow[r, "0"] \arrow[dr, "a"'] & N \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "s"'] & N \arrow[d, "s"] \\ & X \arrow[r, "f"'] & X \end{tikzcd}$$

2.3 Lawvere vs. Peano

Probar la equivalencia entre dos sistemas axiomáticos consiste en lo siguiente: En cada una de las teorías deben definirse o interpretarse los términos de la otra y demostrarse los axiomas de la otra como teoremas. En las axiomatizaciones de los números naturales por Peano y Lawvere los términos son los mismos (identificando el 0 de Lawvere con el 1 de Peano, lo cual no representa ningún problema de fondo para los axiomas), luego la equivalencia se prueba demostrando los axiomas de Peano en el sistema de Lawvere (o lo que es lo mismo, deduciéndolos a partir del de Lawvere) y, a continuación, demostrando el axioma de Lawvere en la aritmética de Peano.

2.3.1 De Lawvere a Peano

En este inciso, se asume la existencia de una terna N, σ, 0 que satisface el axioma indicado en la sección 2.2.

Afirmación 2.3.1. *Si $t : N \longrightarrow N$ es una función que satisface $t(0) = 0$ y $t\sigma = \sigma t$ entonces $t = i_N$ (función idéntica en N).*

Demostración. Por el axioma, para el conjunto N con la función $\sigma : N \longrightarrow N$ y el elemento $0 \in N$ existe una única función $s : N \longrightarrow N$ con $s(0) = 0$ y $\sigma s = s\sigma$.

$$\begin{tikzcd}
 & N \arrow[r, "\sigma"] \arrow[dd, "s"'] & N \arrow[dd, "s"] \\
T \arrow[ur, "0"] \arrow[dr, "0"'] & & \\
 & N \arrow[r, "\sigma"'] & N
\end{tikzcd}$$

Por hipótesis $t(0) = 0$ y $\sigma t = t\sigma$ luego, siendo s única, es $t = s$.
Por otro lado, $i_N(0) = 0$ y $\sigma i_N = i_N\sigma$ luego, siendo s única, es $i_N = s$. Por lo tanto $t = i_N$. □

Propiedad 2.3.1. *σ es inyectiva.*

Demostración. Considérese la función $f : N \times N \longrightarrow N \times N$ definida como

$$f(m, n) = (n, \sigma(n))$$

y el elemento $(0, 0) \in N \times N$. Por el axioma, existe una función $s : N \longrightarrow N \times N$ tal que $s(0) = (0, 0)$ y $s\sigma = fs$. La función s tiene dos componentes, sea $s(n) = (g(n), h(n))$ donde g, h son funciones $N \longrightarrow N$.

$$\begin{tikzcd}
& N \arrow[r, "\sigma"] \arrow[dd, "s"'] & N \arrow[dd, "s=(g,h)"] \\
T \arrow[ur, "0"] \arrow[dr, "{(0,0)}"'] & & \\
& N \times N \arrow[r, "f"'] & N \times N
\end{tikzcd}$$

En primer lugar, $(0, 0) = s(0) = (g(0), h(0))$ luego:

$$g(0) = 0, \qquad h(0) = 0.$$

En segundo lugar, $s\sigma(n) = s(\sigma(n)) = (g(\sigma(n)), h(\sigma(n))) = (g\sigma(n), h\sigma(n))$ y $fs(n) = f(s(n)) = f(g(n), h(n)) = (h(n), \sigma(h(n))) = (h(n), \sigma h(n))$. Así que $g\sigma(n) = h(n)$ y $h\sigma(n) = \sigma h(n)$ para cada $n \in N$, es decir,

$$g\sigma = h, \qquad h\sigma = \sigma h.$$

Por la afirmación, de $h(0) = 0$, $h\sigma = \sigma h$ se sigue $h = i_N$. Luego $g\sigma = i_N$ y de aquí se concluye que σ es inyectiva: $\sigma(p) = \sigma(q)$ implica $g\sigma(p) = g\sigma(q)$, es decir, $i_N(p) = i_N(q)$ de donde $p = q$. □

Propiedad 2.3.2. $0 \notin \sigma(N)$.

Demostración. Para la prueba se escoge cualquier función $f : X \longrightarrow X$ que no sea sobreyectiva; por lo tanto, existe $a \in X$ que no pertenece al recorrido $f(X)$, es decir, $f(x) \neq a$ para todo $x \in X$. (Por ejemplo, se puede escoger $X = \{a, b\}$ y f la función constante b.)

Por el axioma de Lawvere (sección 2.2), existe una función $s : N \longrightarrow X$ con

$$s(0) = a \qquad\qquad \text{y} \qquad\qquad fs = s\sigma.$$

Supóngase ahora que 0 pertenece al recorrido de σ, es decir, $\sigma(n) = 0$ para algún $n \in N$. Entonces también $s(\sigma(n)) = s(0)$; pero $s(\sigma(n)) = f(s(n))$ y $s(0) = a$. Luego $f(s(n)) = a$, lo cual contradice la elección $f(x) \neq a$ para cada x.

Luego 0 no pertenece al recorrido de σ. $\square$

Propiedad 2.3.3. *Si un subconjunto $S \subseteq N$ satisface*

- $0 \in S$
- *para cada $n \in N$, si $n \in S$ entonces $\sigma(n) \in S$*

entonces $S = N$.

Demostración. Por la segunda hipótesis la función σ puede restringirse a S. Es decir, existe la función restringida $\widehat{\sigma} : S \longrightarrow S$ definida como $\widehat{\sigma}(n) = \sigma(n)$ para cada $n \in S$. Si $j : S \longrightarrow N$ denota la función inclusión ($j(n) = n$ para cada $n \in S$) entonces $j\widehat{\sigma}(n) = j(\sigma(n)) = \sigma(n) = \sigma(j(n)) = \sigma j(n)$ para cada $n \in S$, es decir, $j\widehat{\sigma} = \sigma j$.

Por el axioma de 2.2, para $\widehat{\sigma} : S \longrightarrow S$ y $0 \in S$ existe $s : N \longrightarrow S$ tal que $s(0) = 0$ y $s\sigma = \widehat{\sigma}s$.

$$\begin{tikzcd}
& N \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "s"'] & N \arrow[d, "s"] \\
T \arrow[ur, "0"] \arrow[r, "0"'] \arrow[dr, "0"'] & S \arrow[r, "\widehat{\sigma}"'] \arrow[d, "j"'] & S \arrow[d, "j"] \\
& N \arrow[r, "\sigma"'] & N
\end{tikzcd}$$

Ahora $js(0) = j(s(0)) = j(0) = 0$ y $(js)\sigma = j(s\sigma) = j(\widehat{\sigma}s) = (j\widehat{\sigma})s = (\sigma j)s = \sigma(js)$.

$$\begin{tikzcd}
 & N \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "js"'] & N \arrow[d, "js"] \\
T \arrow[ur, "0"] \arrow[dr, "0"'] & N \arrow[r, "\sigma"'] & N
\end{tikzcd}$$

De las dos condiciones $js(0) = 0$ y $(js)\sigma = \sigma(js)$, por la afirmación se sigue $js = i_N$ y de aquí se concluye que j es sobreyectiva: para cada $r \in N$ existe $s(r) \in N$ con $j(s(r)) = js(r) = i_N(r) = r$. Siendo sobreyectiva la inclusión $j : S \longrightarrow N$ se tiene $S = N$. □

2.3.2 De Peano a Lawvere

Ahora se asumen válidos los axiomas dados en 1.2. Dada una función $f : X \longrightarrow X$ y un elemento $a \in X$, se debe probar la existencia y unicidad de una función $s : N \longrightarrow X$ tal que $s(0) = a$ y $fs = s\sigma$.

Se define la función s como sigue:

- $s(0) = a$
- Conocido $s(n)$, se define $s(\sigma(n))$ como $f(s(n))$

Afirmación 2.3.2. *La función s está definida en todo N.*

Demostración. Sea D el dominio de s.

1. $0 \in D$ porque se ha definido $s(0) = a$.
2. Supóngase que $n \in D$, es decir, $s(n)$ está definido. Por construcción, también está definido $s(\sigma(n)) = f(s(n))$ luego $\sigma(n) \in D$.

Por el axioma 3 de la sección 1.2, $D = N$. □

Afirmación 2.3.3. *La función s es única.*

Demostración. Sea $t : N \longrightarrow X$ una función tal que $t(0) = a$, $ft = t\sigma$. Sea C el subconjunto de N donde s y t coinciden,

$$C = \{n \in N \mid s(n) = t(n)\}.$$

1. $0 \in C$ porque $s(0) = a$ y $t(0) = a$.

2. Supóngase que $n \in C$, es decir, $s(n) = t(n)$. Entonces

   $$s(\sigma(n)) = f(s(n)) = f(t(n)) = t(\sigma(n))$$

   de manera que $\sigma(n) \in C$.

Por el axioma 3 de 2.2, $C = N$ luego s, t son iguales. $\square$

Capítulo 3

La axiomatización de Peirce

En el presente capítulo se da una biografía de Charles S. Peirce y una presentación de su artículo *On the Logic of Number*, en el cual axiomatiza los números naturales y que aparece traducido en el capítulo 5 de esta monografía. A su vez se define en términos actuales la axiomatización de los números naturales según Peirce, su definición de las operaciones por recurrencia y las propiedades de estas operaciones.

3.1 Acerca de Charles S. Peirce

La figura de Peirce ha adquirido un gran relieve en diferentes campos de la cultura: lógica, filosofía, semiótica, astronomía, geodesia, matemáticas, teoría e historia de la ciencia, semiótica, econometría y psicología. El interés por el pensamiento de Peirce se ha incrementado de manera notable en los últimos años y ha llegado a ser considerado como el más profundo y original pensador americano [14].

Charles Sanders Peirce, científico, filósofo y humanista, es uno de los últimos científicos universales; padre de la semiótica contemporánea, teoría filosófica de la significación y la representación; fundó el pragmatismo auténtico; redujo a un mínimo de tres las categorias ontológicas.

Nació en Cambridge (Massachusetts, Estados Unidos) el 10 de septiembre de 1839. Era hijo de Benjamin Peirce (1809-1880), reconocido matemático y astrónomo, profesor de la Universidad de Harvard en Boston de cuya mano Charles estudió, desde muy pequeño, matemáticas, física y astronomía. Desde temprana edad Peirce mostró su curiosidad por las ciencias y el conocimiento en general, tanto es así que con tan solo 12 años construye su propio laboratorio de química. A través de la obra de Kant y de la filosofía escocesa del sentido común, se introdujo al estudio de la filosofía y la lógica, ramas en las que haría aportes relevantes.

A los 20 años obtiene la Licenciatura en Matemáticas en la Universidad de Harvard y su Maestría a los 23; más tarde, en 1863, se gradúa en Química en la misma Universidad. Dos años después comienza a trabajar como asistente de investigación en el *Coast and Geodetic Survey* de los Estados Unidos, actividad que desarrolló a lo largo de treinta años, dejando varias contribuciones tales como: la medición de la tierra; la medición del metro a partir de la longitud de onda de la luz; un mapa de proyecciones del globo terráqueo usando funciones elípticas (proyección quincuncial); el desarrollo de métodos para el cálculo del valor de la gravedad con el uso del péndulo; recorre Europa buscando las mejores condiciones para observar el eclipse de sol del 22 de diciembre de 1870. En *Photometric Researches* (1878), único libro publicado por Peirce, incluye otros estudios y resultados de investigaciones en estas ramas, artículos técnicos de lógica, matemática y metodología científica.

Durante cinco años (1879-1884) enseñó lógica en Johns Hopkins University, siendo este su único trabajo estable en una Universidad a pesar de su tenacidad y capacidad de trabajo. Debido a que era una persona de carácter extraño y de difícil trato, no llegó a desarrollar una carrera académica. Pero todo en la vida de Peirce no fué estudio, también hubo lugar para su vida sentimental, encontrándose a sus 23 años y durante 14 casado con una señorita de la alta sociedad de Cambridge; luego se une a quien lo acompañaría hasta el día de su muerte, la actriz francesa Juliette Annette Pourtalais. En 1883 recibió una cuantiosa herencia que le duraría solamente 10 años, quedando luego en la ruina y viviendo de la caridad pública hasta el 19 de abril de 1914, día de su muerte.

En 1887 se trasladó con su segunda esposa a Milford (Pensylvania), en donde se dedica a escribir acerca de lógica y filosofía, corrigiéndose a sí mismo con, según sus mismas palabras, “la persistencia de la avispa dentro de una botella”. Entre 1884 cuando fué despedido de la Universidad Johns Hopkins y su muerte, Peirce escribió la mayor parte de las 80.000 páginas manuscritas que su esposa cedió a la Universidad de Harvard.

Aunque sus aportes más reconocido están en la filosofía, no pueden pasarse por alto las enormes contribuciones a la lógica y la matemática [6, 9, 14], entre ellas: axiomatizó el cálculo proposicional distinguiendo la implicación de la deducibilidad relacionándolas mediante un teorema de deducción; anticipó calculos implicativos débiles y lógicas trivalentes; propuso una notación homogénea para la totalidad de los conectivos binarios clásicos y estudió entre ellos los conectivos completos; desarrolló el cálculo de predicados, la teoría de cuantificadores y las formas normales; discutió la noción de conjunto, diversas definiciones de infinito y las comparaciones cardinales; estudió el continuo de manera original; desarrolló un sistema muy amplio de lógica gráfica que permite, entre otros estudios, realizar deducciones formales de manera visual.

El pensamiento de Peirce ha estado hasta ahora envuelto en una cierta oscuridad, ya que por un cúmulo de razones de toda índole, geográficas, circunstanciales, personales, metódicas, conceptuales, fué olvidado y marginado. El rechazo no terminó con su muerte pues sus manuscritos fueron relegados al olvido por mucho tiempo y cuando se hicieron esfuerzos por editar parte de ellos, los documentos fueron alterados y recortados. En 1907, William James afirmó que los escritos de Peirce eran “destellos de luz deslumbrante sobre un fondo de oscuridad tenebrosa”. Hacia 1923, Morris R. Cohen publica la primera antología de textos de Peirce, *Chance, Love and Logic*, que incluye un artículo de Dewey acerca de la originalidad y fecundidad del pensamiento de Peirce y una bibliografía detallada; en este mismo año se publica la célebre obra de Ogden y Richards, *The Meaning of Meaning* que trajo la atención del público sobre la semiótica de Peirce. Entre 1931 y 1935 se publicaron los 6 primeros volúmenes de *Collected Papers* (Harvard University Press) bajo la dirección de Charles Hartshorne y Paul Weiss quienes menospreciaron los trabajos de Peirce desmembrando y mutilando su obra. Otros dos volúmenes aparecieron en 1958 bajo la dirección de Arthur Burks. Durante la última década del siglo XX se ha puesto de manifiesto la sistematicidad de su pensamiento y se iniciaron esfuerzos serios y cuidadosos por restaurar la obra y darle el lugar que se merece. Desde 1976 se desarrolla en la Universidad de Indiana el *Peirce Edition Project*, encaminado a producir la edición completa y cronológica de los escritos de Peirce, proyectada para 30 volúmenes de los cuales solamente se han publicado 6.

La obra de Charles Peirce se caracteriza por su extensión y profundidad, debido a que a lo largo de su vida escribió acerca de una gran variedad de temas, haciendo aportes de singular interés en todas las áreas que abordó. Dentro de la gran cantidad de escritos que produjo -muchos con el fin de ganar dinero para sobrevivir- se incluyen artículos, conferencias, espacios en revistas y voces en diccionarios de filosofía. El difícil acceso a sus escritos, junto con el marcado carácter evolutivo de su pensamiento, han complicado la interpretación de su obra. En la tarea de recuperación del legado peirceano pueden distinguirse tres niveles: en primer lugar, es preciso leer a Peirce, abordar los temas presentes en sus escritos y estudiarlos con rigor; en segundo lugar cada aspecto de la obra de Peirce debe interpretarse en contextos variados, sus aportes pueden compararse con otros trabajos en el desarrollo de la ciencia y por otra parte deben mirarse con el contexto filosófico global de la obra de Peirce; por último, la tarea más difícil pero a su vez fructífera es la construcción, las ideas presentes en el legado de Peirce deben desarrollarse y explotarse para avanzar en el planteamiento y la solución de problemas abiertos importantes.

El escrito *On the Logic of Number*, de Charles S. Peirce, fué publicado en 1881 en las páginas 85 a 95 del volumen 4 de la revista *The American Journal of Mathematics*. Esto fue un año después de la muerte de su padre; en el mismo volumen del *American Journal* apareció una reimpresión póstuma del texto *Linear Associative Algebra*, de Benjamin Peirce, quizás el más destacado de sus escritos y el que comienza con la famosa definición:

> La matemática es la ciencia que obtiene conclusiones necesarias.

Aparentemente, la intención de Peirce hijo era reforzar esta visión de su padre acerca de la matemática, mostrando que la aritmética obtiene conclusiones necesarias [12]. A la sazón ya se había logrado la aritmetización del análisis y poco después se lograría la de la geometría, de suerte que como nunca antes la matemática podía verse como una teoría de conclusiones necesarias.

3.2 Contenido del artículo *On the Logic of Number*

Desde las primeras frases del escrito *On the Logic of Number*, el autor indica la intención de su cometido.

> Nadie puede poner en duda las propiedades elementales concernientes al número: las que no son manifiestamente verdaderas a primera vista se verifican mediante las demostraciones usuales. Pero aunque vemos que *son* verdaderas, no vemos tan fácilmente con precisión *por qué* son verdaderas; tanto es así que un lógico inglés de renombre ha abrigado la duda si serían verdaderas en todo el universo. El objetivo de éste artículo es mostrar que ellas son consecuencias estrictamente silogísticas de unas pocas proposiciones primarias [11].

En pocas palabras, el propósito de Peirce es axiomatizar la aritmética.

En seguida el autor postula un "término relativo" -lo que hoy se denomina una relación binaria- del cual pide, en primer lugar, que sea transitivo; luego, que sea (en terminología actual) reflexivo; además que sea antisimétrico. A eso lo denomina un "relativo fundamental de cantidad" y al sistema obtenido, un "sistema de cantidad". Esto se llama ahora una relación de orden y un conjunto (parcialmente) ordenado: según algunos historiadores este es el primer lugar en que aparecen así juntas estas conocidas definiciones.

A continuación Peirce distingue entre "sistema múltiple", en el cual hay pares de elementos que no se relacionan entre sí y "sistema simple", que corresponde a un conjunto linealmente ordenado (o totalmente ordenado). Cabe anotar que Peirce, anterior al auge de la teoría de conjuntos y muy anterior a Bourbaki, por supuesto no habla de elementos: dice "cantidades". Los "sistemas simples" a su vez los clasifica en "continuos", "discretos" y "mixtos": en los primeros, entre cada par de elementos relacionados hay un tercero, es lo que hoy se denomina un orden denso; en un sistema "discreto", cualquier elemento mayor que otro es sucesor inmediato de algún elemento o, lo que es lo mismo, todo elemento no minimal posee antecesor inmediato; un sistema "mixto" es "continuo" en unas partes y "discreto" en otras. Luego un "sistema simple discreto" puede ser "limitado", "semilimitado" o "ilimitado", según tenga mínimo y máximo, o sólo uno, o ninguno de los dos.

Para terminar su clasificación, Peirce afirma que un "sistema simple, discreto y no limitado (semi-limitado o ilimitado)" puede ser "infinito" o "superinfinito" y da varias descripciones del primer caso, definiendo el segundo como su complemento. En un sistema "infinito", todo elemento mayor que uno dado puede ser alcanzado por pasos sucesivos, cada uno hacia el sucesor inmediato. En otras palabras, si es cierto que todo elemento sucesor inmediato de cualquier integrante de cierta clase pertenece a la clase. O bien un sistema "infinito" puede ser definido como uno en el que, del hecho de que una proposición dada, si es válida para algún elemento entonces es válida para todo elemento mayor. Es, con toda exactitud, lo que hoy se conoce como el principio de inducción.

Luego Peirce cambia un poco las condiciones para estudiar un "sistema simple, discreto, ilimitado, infinito en ambas direcciones", lo que hoy se conoce como números enteros. Aquí ya no existe un mínimo, pero cierto elemento se designa uno, 1, mientras su antecesor inmediato es el cero, 0. Los elemento mayores que cero constituyen un "sistema simple, discreto, semi-limitado, infinito" en el cual es válido todo el planteamiento definido anteriormente. Las definiciones de las operaciones al igual que sus propiedades demostradas, se extienden al "sistema ilimitado".

En la última sección del artículo da un uso nuevo a los números recién construidos. Define una "cuenta" como una correspondencia biyectiva entre una "clase" y un segmento inicial de los números naturales. Mediante una compleja demostración inductiva asegura que el número de números menores o iguales que un natural x es x, sin importar la forma u orden en que se "cuenten", garantizando así la unicidad del número de elementos de cualquier conjunto finito. Afirma luego que si un subconjunto de un conjunto finito posee tantos elementos como este conjunto, entonces es igual a él, lo cual ilustra con un "modo de razonamiento frecuente en teoría de números":

> Todo Texano mata un Texano,
> Nadie es muerto por más de una persona,
> Por tanto, todo Texano es muerto por un Texano.

De esta sección pueden extraerse con facilidad dos nociones de conjunto finito precisadas de nuevo más tarde en la historia de la matemática, a saber:

(a) Un conjunto es finito si está en correspondencia biyectiva con un segmento inicial de los números naturales.

(b) Un conjunto es finito si no está en correspondencia biyectiva con ningún subconjunto propio.

De hecho, Peirce deduce **(b)** de **(a)**.

3.3 Axiomatización de los números naturales según Peirce

Una presentación -con terminología y simbología actuales- de la axiomatización para los números naturales contenida en *On the Logic of Number* es la siguiente.

Términos:

Un conjunto, N, y una relación binaria, R, en N.

Axiomas:

1. R es un orden lineal en N
2. N posee elemento R-mínimo y no posee elemento R-máximo
3. Todo elemento de N distinto del R-mínimo posee R-antecesor inmediato
4. Si un subconjunto $S \subseteq N$ satisface:

   para cada $n \in N$, si S contiene el R-antecesor inmediato de n entonces contiene a n

   entonces S satisface:

   si S contiene un elemento k entonces contiene todos los R-sucesores de k

3.4 Las operaciones y sus propiedades

Asumidos los axiomas -"sistema de cantidad simple, discreto, semi-limitado, infinito"- Peirce procede a dar algunas definiciones. El mínimo lo llama uno, 1. La suma $x + y$ y el producto xy los define por recursión -de nuevo, según algunos estudiosos esta es la primera vez que aparecen tales definiciones en matemáticas-:

- Si x carece de antecesor inmediato, entonces es el mínimo y $x+y$ se define como el sucesor inmediato de y; en caso contrario, si x tiene antecesor inmediato x' entonces $x+y$ se define como el sucesor inmediato de $x'+y$.
- De manera similar, si x carece de antecesor inmediato, xy se define como y; en caso contrario, se define como $y+x'y$.

Las definiciones de las operaciones pueden parafrasearse como sigue. Aunque Peirce no enuncia de manera explícita estas igualdades, sí las emplea varias veces en las pruebas de las propiedades. Obsérvese la equivalencia con las definiciones dadas por Peano.

$$\begin{cases} 1+y = \text{siguiente de } y \\ (1+x)+y = 1+(x+y) \end{cases} \qquad \begin{cases} 1y = y \\ (1+x)y = y+xy. \end{cases}$$

A continuación el autor prueba -por inducción- las propiedades siguientes de las operaciones recién definidas. Las demostraciones dadas por Peirce pueden consultarse en el capítulo 5 (traducción de *On the Logic of Number*) y, de nuevo, son muy similares a las presentadas en la sección 1.3.

1. $(x+y)+z = x+(y+z)$
2. $x+y = y+x$
3. $(x+y)z = xz+yz$
4. $x(y+x) = xy+xz$
5. $(xy)z = x(yz)$
6. $xy = yx$

Capítulo 4

Peirce vs. Peano

En este último capítulo se elabora una comparación entre las axiomatizaciones de los números naturales presentadas por C. S. Peirce y G. Peano. Un primer acercamiento, en el contexto de la lógica clásica, arroja la equivalencia formal de los sistemas resultando así tres axiomatizaciones equivalentes para los números naturales. Pero al mirar mejor se vislumbran diferencias de fondo que deberán precisarse en contextos más generales que la matemática clásica.

4.1 Equivalencia entre las axiomatizaciones

Como en la sección 2.3, aquí se quiere probar la equivalencia entre los sistemas axiomáticos de Peirce y de Peano pero contrario a lo que sucede allí, en este caso no todos los términos coinciden. El conjunto subyacente N sí es el mismo luego no necesita mencionarse; en una dirección es preciso definir la relación binaria y probar que satisface los axiomas indicados por Peirce (véase la sección 3.3); en el otro sentido debe precisarse la función y la constante, además de probar los axiomas de Peano (sección 1.2).

4.1.1 De Peano a Peirce

Aunque Peano define antes la sustracción, en esencia su definición de orden es la siguiente.

Definición. La relación R se define para cada $a, b \in N$ como sigue: $a\ R\ b$ si $a = b$ o existe $p \in N$ tal que $a + p = b$.

A continuación se verifican los axiomas de Peirce para esta relación binaria.

Teorema 4.1.1. *La relación R es un orden lineal en N.*

Demostración.

Supóngase que $a\ R\ b$ y $b\ R\ c$. Si en alguno de los dos casos se tiene la igualdad entonces se recibe $a\ R\ c$ por sustitución. En caso contrario, sean $p, q \in N$ tales que $a + p = b$, $b + q = c$ entonces

$$a + (p + q) = (a + p) + q = b + q = c,$$

es decir, $a\ R\ c$. Así que R es una relación transitiva.

Por definición $a\ R\ a$ para cada $a \in N$, es decir, R es reflexiva.

Para probar el carácter antisimétrico de R, supóngase por el contrario que existen elementos $a, b \in N$ tales que $a\ R\ b$, $b\ R\ a$ y $a \neq b$. Por la definición, existen entonces $p, q \in N$ con $a + p = b$ y $b + q = a$ de donde

$$a + (p + q) = (a + p) + q = b + q = a,$$

lo cual contradice la propiedad 1.3.4 probada antes.

Sean a, b elementos arbitrarios de N. Si $a = b$ entonces $a\ R\ b$. Si $a \neq b$, por la propiedad 1.3.6 existe $p \in N$ tal que $a + p = b$ (es decir, $a\ R\ b$) o bien existe $q \in N$ tal que $b + q = a$ (esto es, $b\ R\ a$). Luego el orden R es lineal. □

Teorema 4.1.2. *Con el orden R, N posee mínimo y no posee máximo.*

Demostración.

Si $a = 1$ se tiene $1\ R\ a$. Si $a \neq 1$ entonces por la propiedad 1.3.5 existe $b \in N$ tal que $1 + b = b + 1 = a$, de donde $1\ R\ a$. Así que 1 es el mínimo.

Para cualquier $a \in N$, por definición $a\ R\ (a + 1)$ y (por la propiedad 1.3.4) $a + 1 \neq a$, luego a no es el máximo. □

Teorema 4.1.3. *Todo elemento de N distinto del mínimo posee antecesor inmediato respecto al orden R.*

Demostración. Si $a \neq 1$, por la propiedad 1.3.5 existe $b \in N$ tal que $a = b+1$ luego $b\ R\ a$ y además $b \neq a$ pues, por la propiedad 1.3.4, $b \neq b + 1$. Así b es antecesor estricto de a.

Además b es antecesor inmediato de a pues no existe $c \in N$ con $b\ R\ c\ R\ (b + 1)$ y $c \neq b$, $c \neq b + 1$. Supóngase, por el contrario, que sí existe tal elemento c, entonces existen $p, q \in N$ tales que $c = b + p$ y $b + 1 = c + q$, de donde

$$b + 1 = c + q = (b + p) + q = b + (p + q).$$

Pero $1\ R\ p\ R\ (p + q)$ con $p \neq p + q$ (por la propiedad 1.3.4) luego también $p + q \neq 1$ y, según la propiedad 1.3.5, existe $r \in N$ tal que $p + q = r + 1$. Ahora

$$b + 1 = b + (p + q) = b + (r + 1) = (b + r) + 1,$$

es decir, $\sigma(b) = \sigma(b + r)$ de donde $b = b + r$ (axioma 1 de 1.2). Lo cual es absurdo porque esta igualdad contradice la propiedad 1.3.4. □

Teorema 4.1.4. *Sea S un subconjunto de N tal que si S contiene el antecesor inmediato de un elemento de N entonces también contiene el elemento. Si $k \in S$ entonces también $m \in S$ para todo m con $k\ R\ m$.*

Demostración. Ante todo, debe observarse en la prueba del teorema precedente que el antecesor de un elemento $a \neq 1$ es el (único) elemento b tal que $a = b + 1 = \sigma(b)$. En consecuencia, la condición “Si S contiene el antecesor inmediato de un elemento de N entonces también contiene el elemento" es equivalente a: "Si $n \in S$ entonces $\sigma(n) \in S$".

Si $k = 1$, por el axioma 3 se tiene $S = N$, es decir, $m \in S$ para todo m con $1 \; R \; m$.

Si $k \neq 1$, por la propiedad 1.3.5 existe $j \in N$ tal que $k = j+1$ y se escoge un nuevo subconjunto S' como sigue.

$$S' = \{ \, i \in N \mid j + i \in S \, \}$$

Puesto que $k = j + 1$ y $k \in S$, es claro que $1 \in S'$. Si $n \in S'$ entonces $j+n \in S$ de donde, por la observación de arriba, $\sigma(j+n) \in S$ pero $\sigma(j+n) = (j+n)+1 = j+(n+1) = j+\sigma(n)$ luego la pertenencia anterior significa $\sigma(n) \in S'$. Por el axioma 3 es $S' = N$.

Sea ahora $m \in N$ con $k \; R \; m$. Si $m = k$ entonces $m \in S$ porque, por hipótesis, $k \in S$. Si $k \neq m$, existe $p \in N$ tal que $k + p = m$ de donde $m = (j+1)+p = j+(1+p)$. Pero $1+p \in N = S'$ luego $j+(1+p) \in S$, es decir, $m \in S$. □

4.1.2 De Peirce a Peano

En la axiomatización de los números naturales por Peirce (sección 3.3) sólo se hace referencia a antecesores inmediatos, pero no es difícil garantizar la existencia de sucesores.

Teorema 4.1.5. *Todo elemento tiene un único sucesor inmediato.*

Demostración. Supóngase que algún elemento x no posee sucesor inmediato. Esto implica que no existe ningún elemento cuyo antecesor inmediato es x y que el conjunto unitario $S = \{ \, x \, \}$ satisface la condición "para cada n, si S contiene el antecesor inmediato de n entonces contiene a n", por cuanto no hay ningún elemento n cuyo antecesor inmediato sea x. Por el axioma 4 de 3.3, de $x \in S$ se sigue que S contiene todos los sucesores de x; como S es unitario, el único sucesor de x es el mismo x, es decir, x es un elemento maximal; como el orden es lineal, x es el elemento máximo. Lo cual contradice el axioma 2.

Así, todo elemento posee sucesor inmediato. Puesto que el orden es lineal, el sucesor inmediato es único. □

Ahora es posible introducir los términos de la axiomatización de Peano.

Definiciones.

La función $\sigma : N \longrightarrow N$ se define para cada elemento $x \in N$ como

$$\sigma(x) = \textit{ sucesor inmediato de } x.$$

La constante 1 es el mínimo de N.

A continuación se verifican los axiomas de Peano.

Teorema 4.1.6. *La función σ es inyectiva.*

Demostración. Puesto que el orden es lineal, dos elementos con el mismo sucesor inmediato son iguales. □

Teorema 4.1.7. *El elemento 1 no pertenece al recorrido de σ.*

Demostración. El elemento mínimo no puede ser sucesor inmediato de ningún elemento. □

Teorema 4.1.8. *Si un subconjunto $S \subseteq N$ satisface*

- $1 \in S$
- *para cada $n \in N$, si $n \in S$ entonces $\sigma(n) \in S$*

entonces $S = N$.

Demostración. Sea S un subconjunto que satisface las condiciones indicadas. Si S contiene el antecesor inmediato m de un elemento n, según la hipótesis también contiene a $\sigma(m)$; pero $\sigma(m) = (\textit{sucesor inmediato de } m) = n$; así

S contiene a todo elemento cuyo antecesor inmediato pertenezca a S. Por el axioma 4 esto implica que S contiene todo sucesor de cada uno de sus elementos.

Ahora de $1 \in S$ se sigue que para cada $p \in N$ con $1 \leq p$ se tiene $p \in S$. Siendo 1 el mínimo, esto significa $S = N$. $\square$

4.2 Comparación conceptual de las axiomatizaciones

En esta sección se intenta plantear y precisar un problema inspirado en los capítulos anteriores y, en particular, en la sección 4.1. Las siguientes son algunas observaciones que surgen de una comparación superficial de los sistemas de axiomas presentados por Peirce y Peano.

Es claro que los axiomas de Peano son mucho más elegantes y concisos que los de Peirce. Aún si se expresan con la notación actual de la teoría de los conjuntos, como en la sección 3.3, estos últimos tampoco tienen la aptitud para el manejo matemático y algebraico que tienen los primeros.

Por otra parte, los términos de la axiomatización de Peano aparecen de manera muy artificial. Aunque es un caso particular abarcado por la teoría de modelos y el álgebra universal, la estructura $(Conjunto, Endofunción)$ no es usual en matemáticas. La presentación de Peirce, en cambio, es contextual y natural. Se inicia con una noción muy común en matemáticas y se empiezan a añadir condiciones que van restringiendo el universo de posibilidades hasta que en la intersección queda un solo objeto, precisamente el que se quería axiomatizar. En este caso se comienza con una relación, mientras las condiciones requeridas son: relación binaria, transitiva, de orden, lineal, con mínimo y sin máximo, con antecesores, inductivo...

El hecho de tratarse de una función en un caso y de una relación en el otro, parece esconder una diferencia más profunda entre las axiomatizaciones de Peano y de Peirce, diferencia oculta o ahogada en la demostración formal de la equivalencia. Así se plantea el problema de detectar y explicitar las diferencias de fondo (si las hay) entre estas axiomatizaciones.

4.3 Contextos categóricos para la equivalencia

En esta sección se indica un posible camino en la solución del problema planteado en la sección precedente. Una forma de encontrar las diferencias entre dos sistemas es recorrer un espectro amplio de contextos posibles en los cuales ellos dos son expresables y comparables.

Tal haz de contextos lo provee la ya mencionada teoría de categorías. Desde un punto de vista más conceptual, es una ciencia que puede pensarse como un lenguaje universal y sintético para la matemática, que permite verla de una forma esencialmente distinta pues cambia el lenguaje interno, analítico, atomista de la teoría de conjuntos por un lenguaje externo, sintético, libre. La teoría de categorías no mira lo que hay dentro de los objetos sino analiza las relaciones entre los mismos. La libertad del lenguaje sintético hace ver relaciones y similitudes entre conceptos que con la visión conjuntista ni siquiera eran pensadas, lo cual se ha comprobado de manera efectiva en varios casos concretos. Por ejemplo, con la teoría de categorías se pudo demostrar que la construcción de los números reales mediante cortaduras de Dedekind es esencialmente distinta a la construcción mediante sucesiones de Cauchy, si bien en el contexto restringido de la teoría de conjuntos clásica dan el mismo resultado porque allí solo existe un campo ordenado y completo.

Demostrar con la teoría de categorías que hay una diferencia esencial entre las axiomatizaciones de los números naturales dadas por Peano y Peirce consistiría en encontrar alguna categoría en las cuales los correspondientes "objetos números naturales" no son isomorfos.

Puede considerarse que el "objeto números naturales" de Lawvere es la traducción al lenguaje categórico de los axiomas de Peano, pues los términos son los mismos. Falta encontrar una traducción al mismo lenguaje de los axiomas de Peirce, para luego empezar a recorrer un espectro de posibilidades en búsqueda de un contexto apropiado para ver las diferencias.

El problema concreto que se plantea, y que en este trabajo se deja abierto, es: traducir la axiomatización de Peirce al lenguaje de las flechas.

Capítulo 5

Traducción de *On the Logic of Number*

Sobre la Lógica del Número

Charles S. Peirce

Nadie puede poner en duda las propiedades elementales concernientes al número: las que no son manifiestamente verdaderas a primera vista se verifican mediante las demostraciones usuales. Pero aunque vemos que *son* verdaderas, no vemos tan fácilmente con precisión *por qué* son verdaderas; tanto es así que un lógico inglés de renombre ha abrigado la duda si serían verdaderas en todo el universo. El objetivo de éste artículo es mostrar que ellas son consecuencias estrictamente silogísticas de unas pocas proposiciones primarias. La cuestión acerca del origen lógico de éstas últimas, que aquí considero como definiciones, requeriría una discusión aparte. En mis pruebas me veo obligado a emplear la lógica de relativos, en la cual las formas de inferencia no son, en un sentido estricto, reducibles a silogismos ordinarios. Sin embargo ellas son de la misma naturaleza, siendo simplemente silogismos en los cuales los objetos referidos son parejas o triplas. Su validez no depende de otras condiciones que aquellas de las cuales depende la validez del silogismo simple excepto la suposición de la existencia de singularidades, que no es requerida por el silogismo.

Confío que la selección de proposiciones probadas será suficiente para mostrar que todas las demás podrían ser probadas con métodos similares.

Sea r cualquier término relativo, de manera que de una cosa puede decirse que es r de otra y que la última es r-afectada por la primera. Si en cierto sistema de objetos, todo lo que sea r de un r de cualquier cosa es, él mismo,

r de esa cosa, entonces se dice que r es un relativo transitivo en ese sistema. (Relativos como "amantes de cualquier cosa amada por" son transitivos.) En un sistema en el cual r es transitivo, supóngase que los q de cualquier cosa incluyen esa misma cosa y asimismo cualquier r de ella que no esté r-afectada por ella. Entonces q puede llamarse un relativo fundamental de cantidad, siendo sus propiedades: primera, que es transitivo; segunda, que cualquier cosa en el sistema es q de sí mismo y tercera, que nada es a la vez q de y q-afectada por cualquier cosa excepto ella misma. Los objetos de un sistema con un relativo fundamental de cantidad se llaman cantidades y el sistema se llama un sistema de cantidad.

Un sistema en el cual ciertas cantidades pueden ser q de o q-afectadas por la misma cantidad sin ser la una q de o q-afectada por la otra, se llama múltiple;[1] un sistema en el cual de cada dos cantidades alguna es q de la otra se denomina simple.

Cantidad Simple.

En un sistema simple toda cantidad es o bien "tan grande como" o bien "tan pequeña como" cualquier otra; cualquier cosa que sea tan grande como algo que a su vez es tan grande como una tercera cosa, es ésta misma tan grande como esa tercera, y ninguna cantidad es a la vez tan grande como y tan pequeña como alguna otra, excepto sí misma.

Un sistema de cantidad simple es continuo, discreto o mixto. Un sistema continuo es uno en el que cualquier cantidad mayor que otra, es también mayor que alguna cantidad intermedia, mayor que la otra. Un sistema discreto es uno en el que cualquier cantidad mayor que otra es el sucesor inmediato de alguna cantidad (esto es, mayor que ésta sin ser mayor que ninguna otra mayor que ella). Un sistema mixto es uno en el cual algunas cantidades

[1] Por ejemplo en el álgebra ordinaria de imaginarios, dos cantidades pueden resultar ambas de la adición de cantidades de la forma $a^2 + b^2 i$ a la misma cantidad, sin estar ninguna en esta relación con la otra.

mayores que otras son sucesoras inmediatas, mientras algunas son continuamente mayores que otras cantidades.

Cantidad Discreta.

Un sistema simple de cantidad discreta es limitado, semi-limitado o ilimitado. Un sistema limitado es aquel que tiene una cantidad máxima absoluta y una mínima absoluta; un sistema semi-limitado tiene una pero no la otra (generalmente se considera la mínima); un sistema ilimitado no tiene ninguna.

Un sistema simple, discreto, ilimitado en la dirección de crecimiento o decrecimiento, es en ésta dirección infinito o super-infinito. Un sistema infinito es aquel en el que cualquier cantidad mayor que x puede ser alcanzada de x por pasos sucesivos hacia el sucesor (o antecesor) inmediato. En otras palabras, un sistema infinito, discreto, simple es uno en el que, si el sucesor inmediato de una cantidad alcanzada también es accesible, entonces cualquier cantidad mayor que una alcanzada es accesible; y por la clase de cantidades obtenidas se entiende cualquier clase que satisfaga estas condiciones. Así, podríamos decir que una clase infinita es una en la cual si es cierto que toda cantidad que sucede inmediatamente a una cantidad de una clase dada pertenece también a esa clase, entonces es cierto que toda cantidad mayor que una cantidad de esa clase pertenece a esa clase. Si la clase de números en cuestión está constituida por todos los números en los que una cierta proposición es verdadera, entonces un sistema infinito puede ser definido como uno en el que del hecho de que para cualquier proposición, si es verdadera para algún número, es verdadera para el sucesor inmediato, puede inferirse que si esta proposición es cierta para algún número, es cierta para todo número mayor.

En un sistema super-infinito esta proposición, en sus diversas formas, es falsa.

Cantidad Semi-infinita.

Ahora procedemos a estudiar las proposiciones fundamentales de la cantidad semi-infinita, discreta y simple, que es el número ordinario.

Definiciones.

El número mínimo se llama uno.

Por $x+y$ se entiende, en el caso $x=1$, el sucesor inmediato de y; y en los otros casos, el sucesor inmediato de $x'+y$, donde x' es el antecesor inmediato de x.

Por $x \times y$ se entiende, en el caso $x=1$, el número y; y en los otros casos $y+x'y$, donde x' es el antecesor inmediato de x.

Puede notarse que los símbolos $+$ y $\times$ son relativos ternarios, sus dos correlatos puestos uno antes y el otro después del símbolo mismo.

Teoremas.

En todos los casos la prueba consistirá en mostrar, 1º, que la proposición es verdadera para el número uno, y 2º, que si es verdadera para el número n, es verdadera para el número $1+n$, sucesor inmediato de n. Las diferentes transformaciones de cada expresión se alinearán la una debajo de la otra en una columna, con las indicaciones de principios de transformación en otra columna.

1. A probar la ley asociativa de la adición,

$$(x+y)+z = x+(y+z)$$

   para cualesquier números x, y y z. Primero, esto es verdadero para $x=1$; porque

$(1 + y) + z$

$= 1 + (y + z)$ por la definición de la adición, 2ª cláusula. Segundo, si es cierto para $x = n$, es cierto para $x = 1 + n$; esto es, si $(n + y) + z = n + (y + z)$ entonces $((1 + n) + y) + z = (1 + n) + (y + z)$. Pues

$$
\begin{aligned}
&((1 + n) + y) + z && \\
&= (1 + (n + y)) + z && \text{por la definición de adición:} \\
&= 1 + ((n + y) + z) && \text{por la definición de adición:} \\
&= 1 + (n + (y + z)) && \text{por hipótesis:} \\
&= (1 + n) + (y + z) && \text{por la definición de adición.}
\end{aligned}
$$

2. A probar la ley conmutativa de la adición,

$$x + y = y + x$$

para cualesquier números x y y. Primero, esto es cierto para $x = 1$ y $y = 1$, siendo en este caso una identidad explícita. Segundo, si es verdadero para $x = n$ y $y = 1$, es verdadero para $x = 1 + n$ y $y = 1$, esto es, si $n + 1 = 1 + n$, entonces $(1 + n) + 1 = 1 + (1 + n)$. Porque $(1 + n) + 1$

$$
\begin{aligned}
&= 1 + (n + 1) && \text{por la ley asociativa:} \\
&= 1 + (1 + n) && \text{por hipótesis.}
\end{aligned}
$$

Así hemos probado que, para todo número x, $x + 1 = 1 + x$, o que $x + y = y + x$ para $y = 1$. Ahora debe mostrarse que si ésto es verdadero para $y = n$, es verdadero para $y = 1 + n$; ésto es, si $x + n = n + x$

entonces $x + (1 + n) = (1 + n) + x$. Ahora,

$$\begin{aligned} & x + (1 + n) & \\ &= (x + 1) + n & \text{por la ley asociativa:} \\ &= (1 + x) + n & \text{como se acaba de ver:} \\ &= 1 + (x + n) & \text{por la definición de adición:} \\ &= 1 + (n + x) & \text{por hipótesis:} \\ &= (1 + n) + x & \text{por la definición de adición.} \end{aligned}$$

Luego la prueba está completa.

3. A probar la ley distributiva, primera cláusula. La ley distributiva está compuesta de dos proposiciones:

$$\begin{aligned} &1^{\text{a}}, \qquad (x + y)z = xz + yz \\ &2^{\text{a}}, \qquad x(y + z) = xy + xz. \end{aligned}$$

Ahora intentaremos probar la primera de estas. Primero, es cierta para $x = 1$. Pues

$$\begin{aligned} & (1 + y)z & \\ &= z + yz & \text{por la definición de multiplicación:} \\ &= 1z + yz & \text{por la definición de multiplicación.} \end{aligned}$$

Segundo, si es verdadera para $x = n$, es verdadera para $x = 1 + n$; esto es, si $(n + y)z = nz + yz$ entonces $((1 + n) + y)z = (1 + n)z + yz$. Porque

$$\begin{aligned} & ((1 + n) + y)z & \\ &= (1 + (n + y))z & \text{por la definición de adición:} \\ &= z + (n + y)z & \text{por la definición de multiplicación:} \\ &= z + (nz + yz) & \text{por hipótesis:} \\ &= (z + nz) + yz & \text{por la ley asociativa de la adición:} \\ &= (1 + n)z + yz & \text{por la definición de multiplicación.} \end{aligned}$$

4. A probar la segunda proposición de la ley distributiva,

$$x(y+z) = xy + xz.$$

Primero, esto es verdadero para $x = 1$; porque

$$\begin{aligned} & 1(y+z) \\ &= y + z && \text{por la definición de multiplicación:} \\ &= 1y + 1z && \text{por la definición de multiplicación.} \end{aligned}$$

Segundo, si es verdadero para $x = n$, es verdadero para $x = 1+n$; esto es, si $n(y+z) = ny+nz$, entonces $(1+n)(y+z) = (1+n)y+(1+n)z$. Pues

$$\begin{aligned} & (1+n)(y+z) \\ &= (y+z) + n(y+z) && \text{por la definición de multiplicación:} \\ &= (y+z) + (ny+nz) && \text{por hipótesis:} \\ &= (y+ny) + (z+nz) && \text{por las leyes de la adición:} \\ &= (1+n)y + (1+n)z && \text{por la definición de multiplicación.} \end{aligned}$$

5. A probar la ley asociativa de la multiplicación; esto es, que

$$(xy)z = x(yz)$$

para cualesquier números x, y y z. Primero, ésto es verdadero para $x = 1$, porque

$$\begin{aligned} & (1y)z \\ &= yz && \text{por la definición de multiplicación:} \\ &= 1 \cdot yz && \text{por la definición de multiplicación.} \end{aligned}$$

Segundo, si es verdadero para $x = n$, es verdadero para $x = 1+n$; esto es, si $(ny)z = n(yz)$, entonces $((1+n)y)z = (1+n)(yz)$. Porque

$$\begin{aligned} & ((1+n)y)z & \\ &= (y+ny)z && \text{por la definición de multiplicación:} \\ &= yz + (ny)z && \text{por la ley distributiva:} \\ &= yz + n(yz) && \text{por hipótesis:} \\ &= (1+n)(yz) && \text{por la definición de multiplicación.} \end{aligned}$$

6. A probar la ley conmutativa de la multiplicación, que

$$xy = yx$$

para cualesquier números x y y. En primer lugar, probamos que ésto es verdadero para $y = 1$. Para tal fin, primero mostramos que es verdadero para $y = 1$, $x = 1$; y entonces que si es verdadero para $y = 1$, $x = n$, es verdadero para $y = 1$, $x = 1 + n$. Para $y = 1$ y $x = 1$, ésta es una identidad explícita. Ahora tenemos que mostrar que si $n1 = 1n$, entonces $(1+n)1 = 1(1+n)$. Ahora,

$$\begin{aligned} & (1+n)1 & \\ &= 1 + n1 && \text{por la definición de multiplicación:} \\ &= 1 + 1n && \text{por hipótesis:} \\ &= 1 + n && \text{por la definición de multiplicación:} \\ &= 1(1+n) && \text{por la definición de multiplicación.} \end{aligned}$$

Habiendo mostrado así que la ley conmutativa es verdadera para $y = 1$, procedemos a probar que si es verdadera para $y = n$, también lo es para

$y = 1 + n$; ésto es, si $xn = nx$, entonces $x(1 + n) = (1 + n)x$. Porque

$(1 + n)x$	
$= x + nx$	por la definición de multiplicación:
$= x + xn$	por hipótesis:
$= 1x + xn$	por la definición de multiplicación:
$= x1 + xn$	como ya probamos:
$= x(1 + n)$	por la ley distributiva.

Cantidad Discreta Simple Infinita en ambas direcciones.

Un sistema de números infinito en ambas direcciones no tiene mínimo, pero cierta cantidad se llama *uno*, y los números tan grandes como este constituyen un sistema parcial de números semi-infinito, del cual éste es mínimo. Las definiciones de adición y multiplicación no requieren cambios, excepto que el *uno* debe entenderse en el nuevo sentido.

Para extender las pruebas de las leyes de la adición y la multiplicación a números ilimitados, es necesario mostrar que si son verdaderas para algún número $(n + 1)$ entonces también lo son para el antecesor inmediato n. Para éste fin podemos usar las mismas transformaciones que en la segunda cláusula de la prueba anterior; sólo tenemos que hacer uso del siguiente lema.

Si $x + y = x + z$ entonces $y = z$, para cualesquier números x, y y z. Primero, ésto es verdadero para el caso $x = 1$, porque entonces y y z son ambos antecesor inmediato del mismo número. Por consiguiente, ninguno es más pequeño que el otro, de otro modo no podría ser el antecesor inmediato de $1 + y = 1 + z$. Pero en un sistema simple, de dos números diferentes siempre alguno es más pequeño que el otro. De aquí que y y z son iguales. Segundo, si la proposición es verdadera para $x = n$, es verdadera para $x = 1 + n$. Si $(1 + n) + y = (1 + n) + z$, entonces por la definición de adición

$1 + (n + y) = 1 + (n + z)$; de donde se sigue que $n + y = n + z$, y, por hipótesis, que $y = z$. Tercero, si la proposición es verdadera para $x = 1 + n$, es verdadera para $x = n$. Pues si $n+y = n+z$, entonces $1+n+y = 1+n+z$, porque el sistema es simple. Así la certeza de la proposición ha sido probada para 1, para todo número mayor y para todo número menor, y por lo tanto es universalmente cierta.

Una inspección de las pruebas anteriores de las propiedades de la adición y la multiplicación para números semi-infinitos mostrará que estas realmente se extienden a números doblemente infinitos por medio de la proposición recién probada.

El antecesor inmediato de uno es llamado cero, 0. De manera simbólica, esta definición puede expresarse como $1 + 0 = 1$. Para probar que $x + 0 = x$, sea x' el antecesor inmediato de x. Entonces,

$$\begin{aligned}
& x + 0 & & \\
&= (1 + x') + 0 & & \text{por la definición de } x'\text{:} \\
&= (1 + 0) + x' & & \text{por las leyes de la adición:} \\
&= 1 + x' & & \text{por la definición de cero:} \\
&= x & & \text{por la definición de } x'.
\end{aligned}$$

A probar que $x0 = 0$. Primero, en el caso $x = 1$, la proposición vale por la definición de multiplicación. Además, si es verdadera para $x = n$ también es verdadera para $x = 1 + n$. Porque

$$\begin{aligned}
& (1 + n)0 & & \\
&= 1 \cdot 0 + n \cdot 0 & & \text{por la ley distributiva:} \\
&= 1 \cdot 0 + 0 & & \text{por hipótesis:} \\
&= 1 \cdot 0 & & \text{por el último teorema:} \\
&= 0 & & \text{como antes.}
\end{aligned}$$

Tercero, si la proposición es verdadera para $x = 1 + n$ entonces también es verdadera para $x = n$. Porque, cambiando el orden de las transformaciones,

$$1 \cdot 0 + 0 = 1 \cdot 0 = 0 = (1 + n)0 = 1 \cdot 0 + n \cdot 0.$$

Entonces por el lema mencionado, $n \cdot 0 = 0$, de suerte que la proposición está probada.

Un número que sumado a otro da cero, se llama el negativo del último. A probar que todo número mayor que cero tiene un negativo. Primero, el antecesor inmediato de cero es el negativo de uno; pues por la definición de adición, uno más éste número es cero. Segundo, si un número cualquiera n tiene un negativo, entonces el sucesor inmediato de n tiene como negativo el antecesor del negativo de n. Porque sea m el antecesor inmediato del negativo de n. Entonces $n + (1 + m) = 0$. Pero

$$\begin{aligned} & n + (1 + m) & \\ &= (n + 1) + m & \text{por la ley asociativa de la adición:} \\ &= (1 + n) + m & \text{por la ley conmutativa de la adición.} \end{aligned}$$

Así que $(1+n)+m = 0$. *Q.E.D.* De aquí, todo número mayor que cero tiene un negativo y cero es el negativo de sí mismo.

A probar que $(-x)y = -(xy)$. Tenemos

$$\begin{aligned} 0 &= x + (-x) & \text{por la definición de negativo:} \\ 0 &= 0y = (x + (-x))y & \text{por la penúltima proposición:} \\ 0 &= xy + (-x)y & \text{por la ley distributiva:} \\ -(xy) &= (-x)y & \text{por la definición de negativo.} \end{aligned}$$

El negativo del negativo de un número es ese número. Porque $x+(-x) = 0$. De donde por la definición de negativo $x = -(-x)$.

Cantidad Discreta Simple Limitada.

Un término relativo c tal que todo c de cualquier cosa es el único c de esa cosa, y es un c sólo de esa cosa, se llama un relativo de correspondencia simple. En la notación de la lógica de relativos,

$$c\breve{c} \multimap 1, \qquad \breve{c}c \multimap 1.$$

Si todo objeto s de una clase está en una relación tal, siendo c-afectado por un número de un sistema discreto simple semi-infinito y si, además, todo número menor que un número c de un s es él mismo c de un s, entonces se dice que los números c de los s los cuentan, y el sistema de correspondencia se llama una cuenta. En notación lógica, poniendo g por tan grande como y n por un número entero positivo,

$$s \multimap \breve{c}n \qquad \breve{g}cs \multimap cs.$$

Si en una cuenta hay un número máximo, la cuenta se dice finita y ese número se llama el número de la cuenta. Si $[s]$ denota el número de una cuenta de los s, entonces

$$[s] \multimap cs \qquad \bar{g}cs \multimap \overline{[s]}$$

El relativo "ser idéntico con" satisface la definición de un relativo de correspondencia simple, y la definición de una cuenta es satisfecha poniendo "ser idéntico con" por c, y "número entero positivo tan pequeño como x" por s. En éste modo de contar, el número de números tan pequeños como x es x.

Supóngase que en una cuenta cualquiera se halla que el número de números tan pequeños como el número mínimo, uno, es n. Entonces, por la definición de cuenta, todo número tan pequeño como n cuenta un número tan pequeño como uno. Pero por la definición de uno sólo hay un número tan pequeño como uno. Por lo tanto, por la definición de correspondencia singular, ningún número diferente de uno cuenta a uno. Por lo tanto, por la definición de uno, ningún número diferente de uno cuenta un número tan pequeño como uno. Por lo tanto, por la definición de cuenta, el número de números tan pequeños como uno es, en toda cuenta, uno.

Si el número de números tan pequeños como x en alguna cuenta es y, entonces el número de números tan pequeños como y en alguna cuenta es x. Porque si la definición de correspondencia simple es satisfecha por el relativo c, igualmente es satisfecha por el relativo c-afectado.

Puesto que el número de números tan pequeños como x en alguna cuenta es y tenemos, siendo c algún relativo de correspondencia simple,

1º. Todo número tan pequeño como x es c-afectado por un número.

2º. Todo número tan pequeño como un número que es c de un número tan pequeño como x es él mismo c de un número tan pequeño como x.

3º. El número y es c de un número tan pequeño como x.

4º. Cualquier cosa que no es tan grande como un número que es c de un número tan pequeño como x no es y.

Ahora sea c_1 el converso de c. Entonces el converso de c_1 es c; de donde, puesto que c satisface la definición de un relativo de correspondencia simple, lo mismo hace c_1. Por la 3ª proposición anterior, todo número tan pequeño como y es tan pequeño como un número que es c de un número tan pequeño como x. De donde, por la 2ª proposición, todo número tan pequeño como y es c de un número tan pequeño como x; y de ésto sigue que todo número tan pequeño como y es c_1-afectado por un número. Se sigue además que todo número c_1 de un número tan pequeño como y es c_1 de alguna cosa c_1-afectada por (esto es, siendo c_1 un relativo de correspondencia simple, es idéntico con) algún número tan pequeño como x. También, siendo "tan pequeño como" un relativo transitivo, todo número tan pequeño como un número c_1 [2] de un número tan pequeño como y es tan pequeño como x. Ahora por la 4ª proposición y es tan grande como cualquier número que es c de un número

[2] Aunque en las ediciones en *Collected Papers* y en *Writings* aquí dice c, es claro que debe ser c_1. *[NOTA DE TRADUCCIÓN.]*

tan pequeño como x, de modo que lo que no es tan pequeño como y no es c de un número tan pequeño como x; de donde cualquier número que es c-afectado por un número no tan pequeño como y no es un número tan pequeño como x. Pero por la 2ª proposición todo número tan pequeño como x no c-afectado por un número no tan pequeño como y es c-afectado por un número tan pequeño como y. Por lo tanto, todo número tan pequeño como x es c-afectado por un número tan pequeño como y. Por tanto, todo número tan pequeño como un número c_1 de un número tan pequeño como y es c_1 de un número tan pequeño como y. Más aún, puesto que hemos mostrado que todo número tan pequeño como x es c_1 de un número tan pequeño como y, lo mismo es cierto para x mismo. Más aún, puesto que hemos visto que cualquier cosa que sea c_1 de un número tan pequeño como y es tan pequeño como x, se sigue que cualquier cosa que no es tan grande como un número c_1 de un número tan pequeño como y no es tan grande como un número tan pequeño como x; esto es (siendo "tan grande como" un relativo transitivo), no es tan grande como x, y consecuentemente no es x. Ahora hemos mostrado—

1º, que todo número tan pequeño como y es c_1-afectado por un número;

2º, que todo número tan pequeño como un número que es c_1 de un número tan pequeño como y es él mismo c_1 de un número tan pequeño como y;

3º, que el número x es c_1 de un número tan pequeño como y; y

4º, que cualquier cosa que no es tan grande como un número que es c_1 de un número tan pequeño como y no es x.

Éstas cuatro proposiciones tomadas juntas satisfacen la definición del número de números tan pequeños como y que cuentan hasta x.

De aquí, puesto que el número de números tan pequeños como uno no puede ser mayor que uno en cuenta alguna, se sigue que el número de números tan pequeños como alguno mayor que uno no puede ser uno en cuenta alguna.

Supóngase que hay una cuenta en la cual se ha hallado que el número de números tan pequeños como $1 + m$ es $1 + n$, puesto que acabamos de ver que no puede ser 1. En ésta cuenta, sea m' el número que es c de $1 + n$, y n' el que es c-afectado por $1 + m$. Consideremos ahora un relativo, e, que difiere de c solamente en excluir la relación de m' a $1 + n$ así como la relación de $1 + m$ a n' y en incluir la relación de m' a n'. Entonces e será un relativo de correspondencia singular; porque c lo es y ninguna exclusión de relaciones de una correspondencia singular afecta este carácter, mientras la inclusión de la relación de m' a n' deja a m' como el único e de n' y un e sólo de n'. Más aún, todo número tan pequeño como m es e de un número, puesto que todo número excepto $1+m$ que es c de algo es e de alguna cosa y todo número excepto $1 + m$ que es tan pequeño como $1 + m$ es tan pequeño como m. También, todo número tan pequeño como un número e-afectado por un número es e-afectado él mismo por un número; porque todo número c-afectado es e-afectado excepto $1 + m$, y éste es mayor que todo número e-afectado. Se sigue que e es la base de un modo de contar en el cual los números tan pequeños como m cuentan hasta n. De ésta manera hemos mostrado que si de alguna forma $1 + m$ cuenta hasta $1 + n$, entonces en alguna manera m cuenta hasta n. Pero ya hemos visto que para $x = 1$ el número de números tan pequeños como x no puede en manera alguna contar hasta otro distinto x. De donde se sigue que lo mismo es cierto cualquiera sea el valor de x.

Si todo S es un P y si los P son una agrupación finita que cuenta hasta un número tan pequeño como el número de los S, entonces todo P es un S. Porque si, contando los P, empezamos con los S (que son una parte de ellos), y habiendo contado todos los S llegamos al número n, no quedarán ni P ni S. Pues si hubiera alguno, el número de los P contaría hasta más que n. De ésto deducimos la validez del siguiente modo de inferencia:

> Todo Texano mata un Texano,
> Nadie es muerto por más de una persona,
> Por tanto, todo Texano es muerto por un Texano,

suponiendo que los Texanos son una agrupación finita. Porque por la primera premisa, todo Texano muerto por un Texano es un Texano asesino de un Texano. Por la segunda premisa, los Texanos muertos por Texanos son tantos como los Texanos asesinos de Texanos. De donde concluimos que todo Texano asesino de un Texano es un Texano muerto por un Texano, o, por la primera premisa, todo Texano es muerto por un Texano. Éste modo de razonamiento es frecuente en la teoría de números.

NOTA.— Se puede observar que cuando razonamos que cierta proposición, si es falsa para algún número, es falsa para algún número más pequeño, y puesto que ningún número (en un sistema semi-limitado) es más pequeño que todo número, la proposición debe ser verdadera, entonces nuestro razonamiento es una simple transformación lógica del razonamiento que una proposición verdadera para n, es verdadera para $1 + n$, y que es verdadera para 1.

Bibliografía

[1] APONTE, Julio César y CÉSPEDES, Carlos Andrés. *Caracterización de Morfismos en Algunas Categorías Algebraicas.* Tesis (matemáticos), Universidad del Tolima, 2000.

[2] ARISTÓTELES. *Tratados de Lógica (El Órganon).* México: Porrúa, 1975.

[3] CAMPOS, Alberto. *Axiomática y Geometría desde Euclides hasta Hilbert y Bourbaki.* Bogotá: edición privada, 1994.

[4] DEDEKIND, Richard. *Was Sind und Was Sollen die Zahlen?* Braunschweig: Vieweg, 1888. Traducido al español: *¿Qué son y para qué sirven los Números?* Madrid: Alianza Editorial.

[5] EUCLIDES. *Elementos.* Libros I-VI. Traducción: María Luisa Puertas Castaños. Madrid: Planeta-De Agostini, 1999.

[6] GRATTAN-GUINNESS, Ivor. *Peirce: Entre la Lógica y las Matemáticas.* Mathesis **8** (1992) 55-72.

[7] LAWVERE, F. William. *An Elementary Theory of the Category of Sets.* Proc. Nat. Acad. Sci. **52** (1964): 1506-1511.

[8] MAC LANE, Saunders y BIRKHOFF, Garrett. *Algebra.* London: Macmillan, 1970.

BIBLIOGRAFíA

[9] OOSTRA, Arnold. *Acercamiento Lógico a Peirce*. Boletín Matemáticas Nueva Serie VII (2000) 60-77.

[10] PEANO, Giuseppe. *Arithmetices Principia Nova Methodo Exposita*. Turín: Bocca, 1889. Traducido al inglés: VAN HEIJENOORT. *The Principles of Arithmetic*, presented by a new method.

[11] PEIRCE, Charles S. *On the Logic of Number*. *American Journal Mathematics* 4 (1881): 85-95. Reimpreso en: *Collected Papers of Charles Sanders Peirce*. Harvard University Press (1931–1958) Vol 3 §252–288. Reimpreso también en: *Writings of Charles S. Peirce: A Chronological Edition*, Indiana University Press (1982–) Vol 4 p. 299–309.

[12] SHIELDS, Paul. *Peirce's Axiomatization of Arithmetic*. En: HOUSER, Nathan; ROBERTS, Don D. and VAN EVRA, James (Eds). *Studies in the Logic of Charles Sanders Peirce*. Bloomington and Indianapolis: Indiana University Press, 1997. p. 43-52.

[13] TREJO, César A. *El Concepto de Número*. Monografía 7, serie Matemáticas. Washington, D. C.: Organización de los Estados Americanos, 1968.

[14] ZALAMEA, Fernando. *Una jabalina lanzada hacia el futuro: anticipos y aportes de C. S. Peirce a la lógica matemática del siglo XX*, *Mathesis* 9 (1993), 391-404.

Algunos sitios recomendados en Internet

- http://www.unav.es/gep/
- http://www.iupui.edu/_peirce/web/index.htm
- http://www.cspeirce.com