Gráficos Alfa para la lógica intuicionista

Arnold Oostra

Universidad del Tolima

Centro de Sistemática Peirceana

Los gráficos existenciales, considerados por Peirce su obra maestra, constituyen un sistema gráfico para la lógica clásica (Roberts 1973). A lo largo del siglo XX desde la matemática se estudiaron muchas lógicas alternativas, entre ellas la intuicionista (Caicedo 1990). Esta nota es una presentación de un sistema de gráficos para el cálculo proposicional intuicionista que generaliza el sistema Alfa de Peirce. De manera sorprendente, los diagramas nuevos que se introducen ya fueron usados en algunas ocasiones por el mismo Peirce.

1. El problema de los gráficos para la lógica intuicionista

El intuicionismo es una doctrina sobre los fundamentos de la matemática, impulsada desde la primera década del siglo XX por L. E. J. Brouwer como una reacción al formalismo. Para un formalista, las afirmaciones de las matemáticas y la lógica se reducen a las consecuencias de ciertos axiomas obtenidas mediante reglas de inferencia establecidas, de tal manera que las matemáticas no son mucho más que lenguaje matemático. Para un intuicionista, en cambio, las matemáticas se independizan del lenguaje y la verdad matemática se experimenta tras una construcción mental. De esta manera el intuicionismo es una clase de constructivismo matemático.

Como consecuencia, en la lógica intuicionista dejan de ser válidos diversos resultados de la lógica usual, que en adelante se denomina clásica. Por ejemplo, en el sentido intuicionista negar un enunciado significa afirmar que es refutable, esto es, que a partir de él puede construirse algo absurdo. Es claro que existen enunciados que no se pueden probar ni refutar de esta manera, luego para el intuicionista no vale el *principio del tercero excluido*. También es claro que, en el sentido intuicionista, negar que un enunciado sea refutable no implica construirlo, así que también se pierde el *principio de la doble negación*. Tampoco es válido el método de *reducción al absurdo*.

La matemática intuicionista resulta ser del todo independiente de la clásica pues en ambas hay resultados que no valen en la otra. Sin embargo en 1929 Arend Heyting, un discípulo de Brouwer, propuso dentro de la matemática clásica un sistema deductivo que de alguna manera refleja los principios intuicionistas, es decir, una suerte de "formalización del intuicionismo". Esta lógica se conoce hasta el día de hoy como el *cálculo proposicional intuicionista*. Se trata de una sintaxis estricta dada por axiomas y reglas (Caicedo 1990) aunque pronto se descubrieron diversos modelos semánticos como los modelos de Kripke y las álgebras de Heyting. Años después, en una sorprendente vuelta de tuerca, la lógica intuicionista apareció en la teoría de haces y en su generalización abstracta, la teoría de topos. Más detalles sobre el intuicionismo y su relación con el pensamiento de Peirce pueden encontrarse en (Oostra 2008).

En la matemática son bien conocidas las conexiones entre la lógica intuicionista y la especialidad conocida como topología. Por otro lado, existen relaciones muy profundas entre la topología y los gráficos existenciales de Peirce (Zalamea 2001, Zalamea 2003, Zalamea 2007, Zalamea 2010).

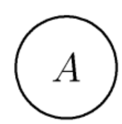
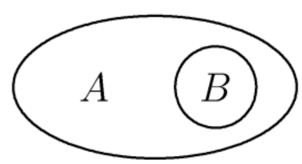
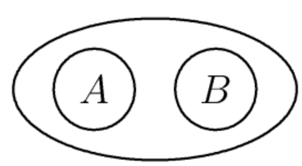
Combinando estas conexiones se puede preguntar si existen sistemas de gráficos existenciales para la lógica intuicionista. Más aún, cabe la pregunta si de alguna manera la lógica correspondiente a los gráficos existenciales es intuicionista y no clásica. Para ello, por supuesto, es preciso ampliar los sistemas originales, que Peirce concibió pensando solo en la lógica clásica.

La primera idea que surge para los gráficos existenciales intuicionistas es eliminar la regla que permite quitar el corte doble. Pero la solución no es tan simple, porque puede verse que con solo ese cambio ni siquiera se podría demostrar *Modus Ponens*. Los cambios deben ser más fundamentales y surgen varias dificultades. En primer lugar, la negación intuicionista presenta cierta asimetría. Pues allí la operación de negación permite pasar de una proposición afirmativa a una negativa, pero no hay ningún mecanismo que permita regresar de una proposición negativa a alguna afirmativa. En segundo lugar, los conectivos intuicionistas son independientes entre sí. En la lógica clásica todos los conectivos pueden expresarse los unos en términos de los otros (recuérdense, por ejemplo, las leyes de De Morgan), pero en el cálculo proposicional intuicionista casi todas esas relaciones se pierden. Así que en cualquier sistema gráfico de la lógica intuicionista se requieren signos diferentes para la negación, la implicación, la conjunción y la disyunción. Aún manteniendo la representación de Peirce para la negación y la conjunción, faltarían signos nuevos para la implicación y la disyunción.

La propuesta adelantada por el autor, y que se desglosa en la tercera parte de esta nota, surgió del experimento consistente en tomar cierto signo nuevo para la implicación (dos cortes encajados y *unidos*). Todo el resto del sistema fluyó de manera natural a partir de ahí. Durante esos experimentos iniciales el autor no tenía conciencia de un hecho asombroso y es que ese signo ya aparecía en los escritos de Peirce, quien lo utilizó durante años para representar la implicación. Esa indicación tan significativa se debe a Fernando Zalamea, también fue él quien propuso el problema de los gráficos existenciales para la lógica intuicionista.

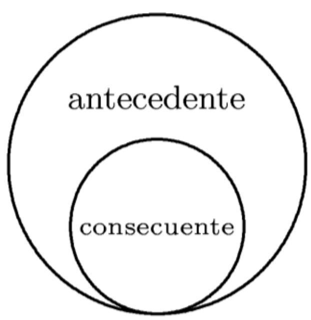
2. Los gráficos Alfa usados por Peirce

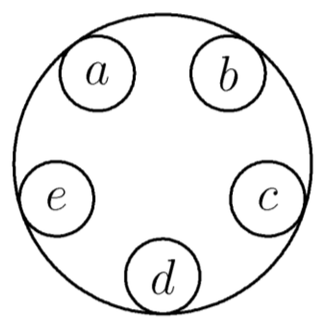
Se asume que el lector conoce el sistema Alfa de los gráficos existenciales de Peirce (por ejemplo, véase Zeman 1964, Roberts 1973, Thibaud 1982), pero sigue una descripción brevísima. Los gráficos Alfa se construyen sobre una superficie plana denominada *hoja de aserción* a partir de *letras* proposicionales y curvas cerradas llamadas *cortes*. Escribir uno o varios gráficos en la hoja significa afirmarlos; encerrar un gráfico en un corte significa negarlo. De esta manera, los siguientes son los gráficos correspondientes a los conectivos proposicionales básicos.

A y B	$A \qquad B$
no A	
A implica B	
A o B	

Pero los gráficos existenciales no solo permiten representar las expresiones de la lógica, Peirce también dio reglas que permiten transformarlos: *escritura* en impar, *borramiento* en par; *iteración* hacia adentro, *desiteración* hacia afuera; escritura y borramiento de cualquier *corte doble*. Existen diversas pruebas de la equivalencia lógica del sistema así resultante con el cálculo proposicional clásico.

Durante años Peirce representó la implicación adhiriendo el corte interno al externo en un punto, llamando *scroll* a la curva compuesta resultante (CP 4.436). En un par de ocasiones también representó una disyunción múltiple con los cortes internos adheridos al externo (CP 4.457). Las siguientes son muestras de esos dos diagramas, que también aparecen en el *Logic Notebook* de Peirce (Zalamea 2010).





Parece que Peirce empleó por primera vez el signo compuesto en 1900. Después aparece con frecuencia creciente y ya en las notas para las *Lowell Lectures* de 1903 su uso es casi sistemático, como se observa en muchos manuscritos inéditos. En la misma época Peirce comenzó a designar este signo compuesto con el nombre *scroll* (CP 4.436–437) y el gráfico constituido por dos cortes encajados que no se tocan lo denomina *double cut* (CP 4.414) aunque de manera ocasional también lo llama *scroll* (CP 4.400). Peirce no solo le dio un nombre al signo compuesto, también indicó una secuencia para dibujarlo (Roberts 1973).

En 1906 Peirce destacó de manera explícita el *scroll* como una forma primera y necesaria en el sistema de gráficos existenciales, cuando expresó: "Pensé que debería tomar la forma general de argumento como la forma fundamental de composición de signos en mi diagramatización, y de manera necesaria esta tomó la forma de un "*scroll*", esto es una curva sin cambio de flexión que vuelve sobre sí misma después de cruzarse una vez" [1]. Más adelante escribió: "El *scroll* no se tomó al azar para este propósito sino fue el resultado de experimentos y razonamientos por los que fui llevado a ver que proporcionaba el diagrama más fiel de tal proposición. Una vez obtenida esta forma, el desarrollo lógico inevitable me condujo pronto al sistema de los gráficos existenciales" [2].

Aunque le otorga trascendencia notable al *scroll*, Peirce siempre señaló que este diagrama es equivalente al corte doble constituido por dos cortes que no se tocan. De manera repetida, Peirce indicó que el *scroll* se puede dibujar como un corte doble y que consta de dos cortes que pueden o no estar unidos en un nodo (CP 4.436–437). Incluso propuso varios argumentos, unos más detallados que otros, que sustentan la equivalencia de estos diagramas. Ya en los últimos años de su vida Peirce poco a poco dejó de usar el *scroll*, por

[1] I thought I ought to take the general form of argument as the basal form of composition of signs in my diagrammatization; and this necessarily took the form of a "scroll", that is a curved line without contrary flexure and returning into itself after once crossing itself. (CP 4.564)

[2] The scroll was not taken for this purpose at hap-hazard, but was the result of experiments and reasonings by which I was brought to see that it afforded the most faithful Diagram of such a Proposition. This form once obtained, the logically inevitable development brought me speedily to the System of Existential Graphs. (CP 4.564)

ejemplo en una anotación en el *Logic Notebook* con fecha 7 de septiembre de 1908 y en una carta a Lady Welby fechada 31 de enero de 1909, Peirce dibujó gráficos existenciales con el corte doble constituido por dos cortes encajados y bien separados.

Como se verá en la sección siguiente, la distinción entre el *scroll* y el corte doble determina para los gráficos existenciales una lógica distinta a la clásica. Es claro que Peirce no prefiguró esa lógica, pero su insistencia repetitiva y el detalle de sus pruebas hace pensar que le inquietaba la identificación lógica de estos gráficos tan distintos desde la perspectiva geométrica. De esta manera puede pensarse en lo cerca que estuvo Peirce de anticipar la lógica intuicionista.

3. Los gráficos Alfa intuicionistas

Esta tercera sección contiene una propuesta de gráficos existenciales para la lógica intuicionista. Es una generalización del sistema Alfa de Peirce, que consiste en enriquecerlo con los diagramas mencionados en la sección anterior. El resultado es un sistema completo de gráficos, con el mismo estilo de los gráficos Alfa introducidos por Peirce, pero cuya lógica correspondiente es el cálculo proposicional intuicionista. Aunque aquí no se profundiza en todos los detalles técnicos, el desarrollo es riguroso y puede precisarse en un contexto matemático formal.

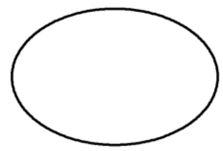
3.1. Formación

Aquí se detallan las componentes de los dibujos y la interpretación o lectura que se asigna a los diagramas resultantes. Los siguientes son los elementos con los cuales se elaboran los gráficos.

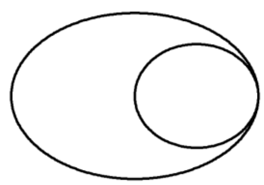
- La superficie sobre la cual se escribe, denominada *hoja de aserción*.

- Proposiciones, por lo general abreviadas mediante *letras*.

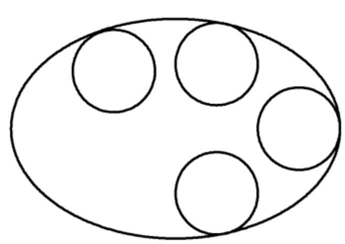
- Curvas cerradas simples, llamadas *cortes*.



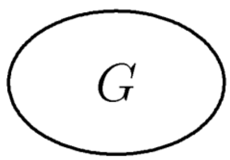
- Curvas llamadas *rizos* que están compuestas por dos curvas cerradas simples que se intersecan en un solo punto y una de las cuales está en el interior de la otra. La curva exterior de un rizo se denomina *corte* y la interior, *lazo*.

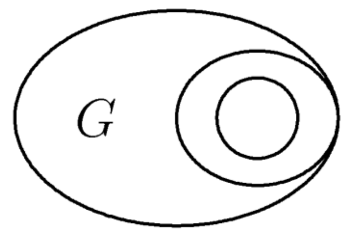


- Curvas llamadas *bucles* que están compuestas por $n+1$ curvas cerradas simples, n de ellas contenidas en el interior de la restante (se asume $n>1$). Las curvas interiores no se intersecan entre sí, se intersecan con la exterior en un solo punto y este punto es distinto para cada una de ellas. De nuevo, la curva exterior se denomina *corte* y cada curva interior, lazo.



Aquí se adopta un importante acuerdo, que en realidad se aproxima más a una regla de transformación: *el corte (simple) es la abreviatura de un rizo cuyo lazo contiene solo el corte vacío y cuya área exterior contiene solo el contenido del gráfico abreviado*. De esta manera, para cualquier gráfico G los dos gráficos siguientes se consideran iguales.





Esta convención se extiende a bucles de tal manera que, aún en presencia de otros lazos, cualquier lazo cuyo único contenido es el corte vacío puede escribirse o borrarse a discreción. Como se indicará en seguida al detallar la interpretación del rizo, esta definición es la versión gráfica de la *negación intuicionista*. En el cálculo proposicional intuicionista se define la negación $\neg\alpha$ como $\alpha \rightarrow \perp$ donde $\perp$ representa el absurdo. Aunque esta convención se conoce como intuicionista, ella ya aparece en los trabajos de Peirce por lo menos desde 1880 (CP 3.191), más aun, ella reaparece de manera gráfica en 1903 cuando Peirce definió el *seudográfico* como "un estado de cosas imposible" [3] y convino que "un corte doble cuyo contenido tiene el seudográfico en el área interna es equivalente a la negación precisa del contenido del área externa" [4]. Luego Peirce indicó que un área que contiene el

[3] An impossible state of things. (CP 4.394)

[4] A scroll with its contents having the pseudograph in the inner close is equivalent to the precise denial of the contents of the outer close. (CP 4.395)

seudográfico puede dibujarse como una mancha negra, que a su vez puede hacerse “tan pequeña que no se ve” [5].

La correspondencia entre los gráficos elaborados y las fórmulas proposicionales se deriva de la siguiente interpretación de los gráficos.

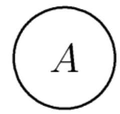
- La hoja de aserción es el universo de posibilidades de verdad.
- Escribir un gráfico sobre la hoja de aserción significa afirmarlo; escribir varios gráficos sobre la hoja de aserción significa afirmarlos todos.
- Escribir un corte vacío significa una contradicción, o el absurdo.
- Encerrar un gráfico en un corte significa negarlo.
- Escribir un rizo significa afirmar la implicación cuyo antecedente es el gráfico que está entre el corte y el lazo y cuyo consecuente es el gráfico que está en el lazo.
- Escribir un bucle significa afirmar la implicación cuyo antecedente es el gráfico que está entre el corte y los lazos y cuyo consecuente es la disyunción de los gráficos que están en los lazos.

Siguen los gráficos en este sistema de los conectivos fundamentales.

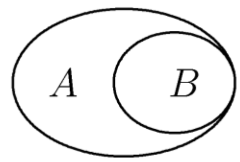
[5] Invisibly small. (CP 4.455)

A y B $\qquad$ $A \quad B$

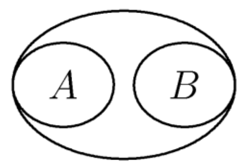
no A



A implica B



A o B



A partir de estos gráficos puede representarse con exactitud cualquier fórmula proposicional. Se conviene que un *área* es una región de la hoja limitada por curvas, sean estas cortes o lazos. Un área es *par* o *impar* según el número de curvas que la rodean, se cuentan por igual los cortes y los lazos.

3.2. Transformación

A continuación se describen las transformaciones permitidas en los gráficos.

(**E**) *Escritura*: En un área impar puede escribirse cualquier gráfico. En un área impar limitada hacia su exterior por un corte puede inscribirse un lazo con cualquier contenido.

(**B**) *Borramiento*: En un área par puede borrarse cualquier gráfico. Un lazo contenido en un área par puede borrarse con todo su contenido.

(**I**) *Iteración*: Cualquier gráfico puede repetirse en su misma área o en áreas encerradas por cortes o lazos adicionales contenidos en ella. Cualquier lazo puede iterarse adherido al mismo corte o a cortes adicionales contenidos en el área que rodea el lazo. En ambos casos, “adicionales” significa que las curvas dentro de las cuales se copia no hacen parte del gráfico o lazo a iterar.

(**D**) *Desiteración*: Puede borrarse cualquier gráfico o lazo que pudiera haber sido escrito por iteración.

(**R**) *Rizado*: Un rizo sin marca alguna entre el corte y el lazo puede escribirse o borrarse alrededor de cualquier gráfico, en cualquier área.

La última es la única regla que difiere de manera sustancial de la propuesta por Peirce. Sin embargo, el creador de los gráficos existenciales, quien concebía que el rizo (*scroll*) equivale al corte doble, en al menos una ocasión enuncia esta regla de manera explícita para este gráfico: “Así que los dos muros del rizo, cuando no hay nada entre ellos, se derrumban, colapsan, desaparecen y dejan solo el contenido del área interna, afirmado, en el campo abierto” [6].

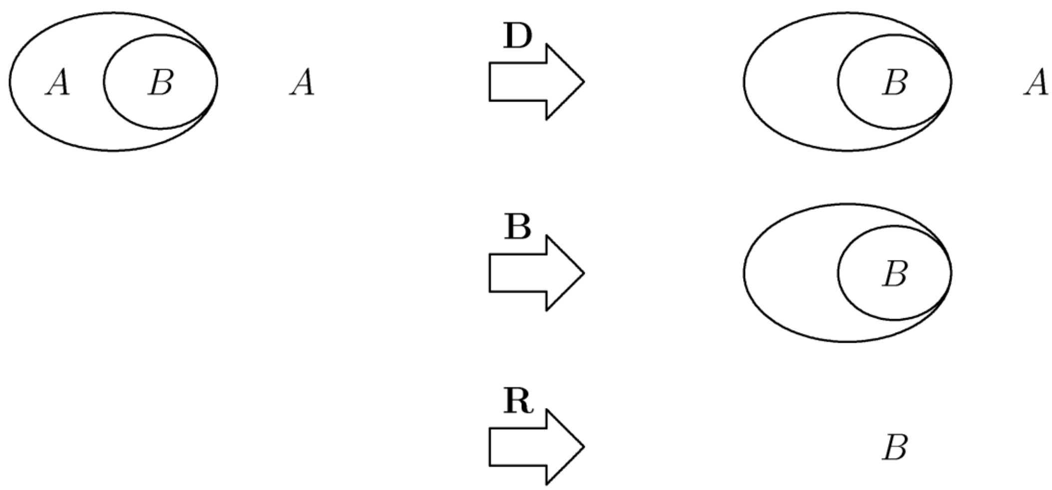
3.3. Deducción

Sigue una muestra de resultados lógicos obtenidos mediante el sistema gráfico definido en el apartado anterior. Como en todos los sistemas de gráficos existenciales, un mismo gráfico se va transformando paso a paso adquiriendo diferentes configuraciones. En las presentaciones escritas, sin embargo, resulta útil dibujar todos los estados intermedios como una sucesión de gráficos

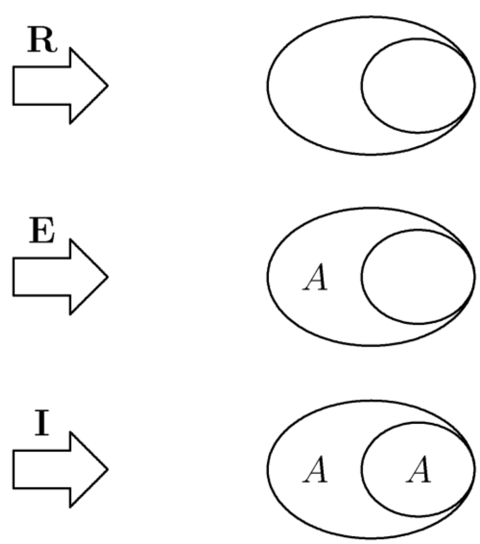
[6] So that the two walls of the scroll, when nothing is between them, fall together, collapse, disappear, and leave only the contents of the inner close standing, asserted, in the open field. (CP 4.564)

diferentes. En estas secuencias, para indicar cada paso se emplea el signo ⇨ acompañado de la letra correspondiente a la regla usada. Esta flecha no hace parte del sistema de los gráficos, solo se trata de una ayuda externa que facilita el análisis de las deducciones.

Ejemplo: *A* implica *B*; *A*. *Por lo tanto*, *B*. (*Modus Ponens*)



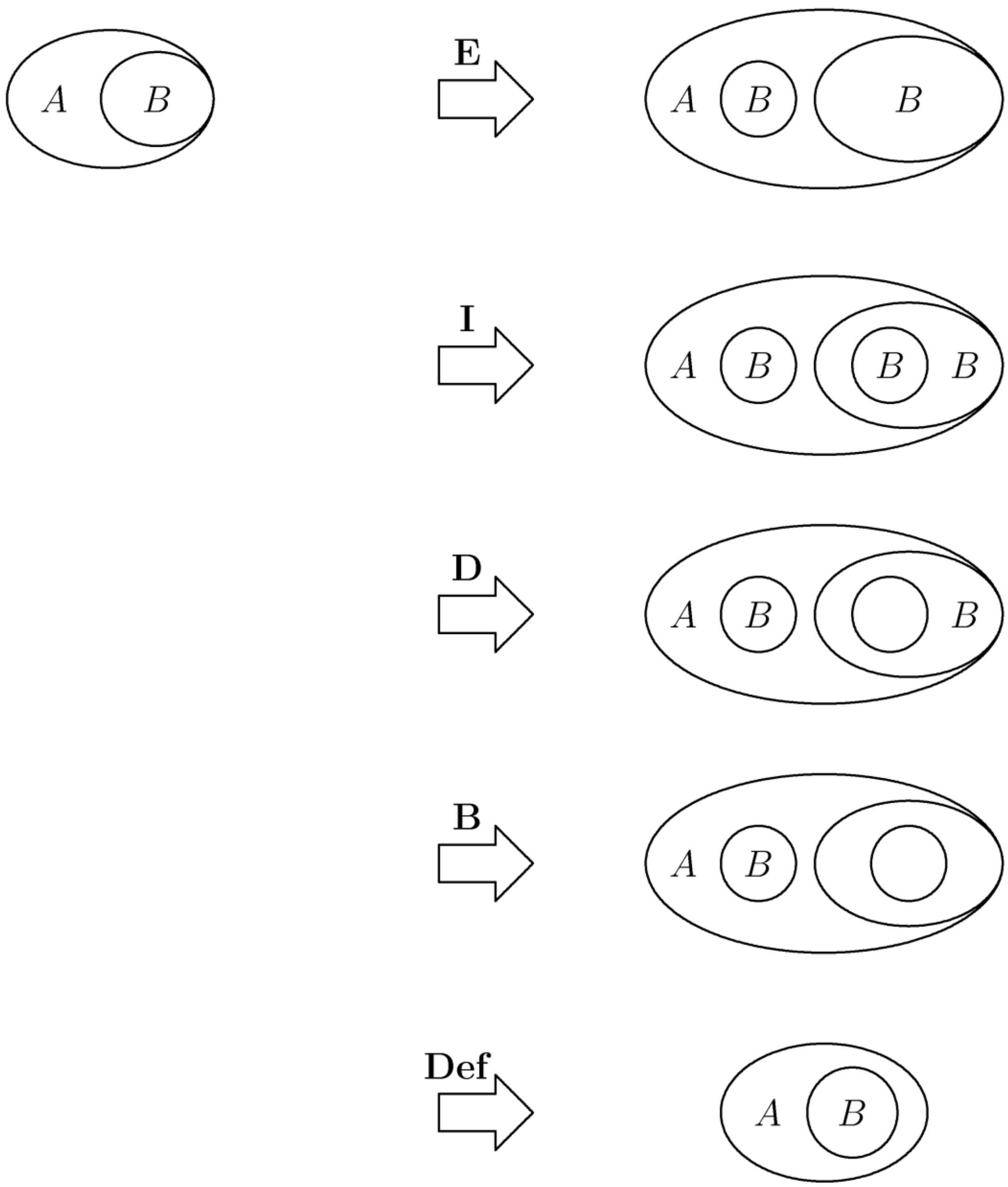
Ejemplo: *Sin premisas*, *A* implica *A*.



En este sistema de gráficos existenciales, una deducción sin premisas por necesidad comienza con la regla de rizado.

Ejemplo: *A* implica *B*. *Por lo tanto*, no (*A* y no *B*).

Desde un punto de vista gráfico, esto significa que si un rizo se encuentra en área par, entonces su lazo se puede "desprender" del corte.



La sigla “**Def**” en el último paso significa que, por definición, el lazo cuyo único contenido es el corte vacío puede quitarse.

Mediante una deducción similar a la del último ejemplo puede probarse que el corte simple cuyo único contenido es B se puede “adherir” como lazo a cualquier corte en área par, si y solo si cualquier corte doble puede quitarse alrededor de B. Este hecho tiene consecuencias significativas. En primer lugar, se sigue que en la lógica representada por este sistema de gráficos no es válida la ley de la doble negación. Pues si lo fuera, todos los lazos se podrían adherir y desprender con plena libertad, luego no tendría sentido considerar los rizos y los bucles como signos especiales. En segundo lugar, se concluye que este sistema es una generalización de los gráficos Alfa de Peirce y que estos se recuperan de manera plena admitiendo la posibilidad de adherir y desprender los lazos a discreción, es decir, asumiendo la ley de la doble negación.

Mediante un complejo teorema matemático puede probarse que este sistema de gráficos corresponde al cálculo proposicional intuicionista, que es una generalización del cálculo clásico. Es muy conocido que este cálculo clásico se recupera al añadir al intuicionista la ley de la doble negación.

4. Conclusión

La aplicación exitosa de los gráficos Alfa de Peirce a una lógica no clásica abre todo un universo de posibilidades que está aún sin explorar. No solo es posible pensar en lógicas predicativas y modales intuicionistas, también pueden representarse lógicas intermedias entre la clásica y la intuicionista, segmentos de la lógica intuicionista y quizás otras familias de lógicas.

Sin embargo, el resultado obtenido puede tener consecuencias conceptuales mucho más profundas aún. Pues el sistema nuevo generaliza de manera natural el sistema original de Peirce y corresponde a la lógica intuicionista. Junto con otros muchos argumentos (Zalamea 2010) esto permite pensar que la naturaleza de los gráficos existenciales de Peirce es intuicionista, o en otras palabras, que la lógica natural de los gráficos existenciales de Peirce no es la lógica clásica sino la intuicionista.

Agradecimientos. El autor agradece de manera permanente a Fernando Zalamea su invitación a estudiar la lógica de Peirce y, respecto a este trabajo particular, le agradece al Maestro el problema de los gráficos intuicionistas y el entusiasmo infinito con el que saludó todas las propuestas de solución. Esta nota es una versión resumida y, quizás, mejorada de (Oostra 2009), y en la revisión de aquel trabajo participaron de manera activa los miembros del *Centro de Sistemática Peirceana*. A todos ellos, muchas gracias. Finalmente va un saludo de gratitud a los asistentes al *Seminario Permanente Peirce* de la Universidad del Tolima quienes vieron, y soportaron, el surgimiento del sistema de los gráficos existenciales intuicionistas.

Bibliografía

Caicedo 1990

Xavier Caicedo, *Elementos de Lógica y Calculabilidad*. Bogotá: Una Empresa Docente.

Oostra 2008

Arnold Oostra, “La matemática intuicionista y sus conexiones con el pensamiento de Peirce”. En: *Cuadernos de Sistemática Peirceana* 1, por aparecer.

Oostra 2009

Arnold Oostra, “Los gráficos Alfa de Peirce aplicados a la lógica intuicionista”. En: *Cuadernos de Sistemática Peirceana* 2, por aparecer.

CP

Charles S. Peirce, *Collected Papers of Charles Sanders Peirce*. Charles Hartshorne, Paul Weiss and Arthur W. Burks (Eds.). Cambridge (Massachusetts): Harvard University Press (1931–1958).

Roberts 1973

Don D. Roberts, *The Existential Graphs of Charles S. Peirce*. Den Haag: Mouton.

Thibaud 1982

Pierre Thibaud, *La Lógica de Charles S. Peirce: Del álgebra a los gráficos*. Madrid: Paraninfo.

Zalamea 2001

Fernando Zalamea, *El Continuo Peirceano*. Bogotá: Universidad Nacional de Colombia.

Zalamea 2003

Fernando Zalamea, “Peirce's logic of continuity: existential graphs and non-cantorian continuum”. In: *The Review of Modern Logic* **9**, 115–162.

Zalamea 2007

Fernando Zalamea, “Ostruzioni e passaggi nella dialettica continuo / discreto. Il caso dei grafi essistenziali e della logica dei fasci”. En: *Dedalus* **2-3**, 20–25.

Zalamea 2010

Fernando Zalamea, *Los gráficos existenciales peirceanos*. Bogotá: Universidad Nacional.

Zeman 1964

J. Jay Zeman, *The Graphical Logic of C. S. Peirce*. Ph.D. dissertation, University of Chicago.

Arnold Oostra

Departamento de Matemáticas y Estadística
Universidad del Tolima
Ibagué
Colombia

aaoostra@gmail.com