

Simetría y Lógica

La notación de Peirce para los 16 conectivos binarios

Mireya García

Jhon Fredy Gómez

Arnold Oostra

Tabla de Contenido

1	Simetría en los conectivos proposicionales	1
1.1	Conectivos proposicionales	1
1.2	Simetría	6
1.3	El grupo de automorfismos	10
2	Charles S. Peirce	19
2.1	Acercamiento	19
2.2	Nota biográfica	20
2.3	La teoría de los signos	23
3	Notaciones para los conectivos binarios	26
3.1	La notación de Peirce	26
3.2	Carácter icónico de la notación de Peirce	28
3.3	La notación de Zellweger	32
	Bibliografía	33

Simetría y Lógica

La notación de Peirce para los 16 conectivos binarios*

Mireya García

Jhon Fredy Gómez

Arnold Oostra[†]

RESUMEN. Se estudian de manera sistemática los 16 conectivos proposicionales binarios y las diferentes *simetrías lógicas* discernibles en este conjunto. Luego se presenta la poco conocida notación de Charles S. Peirce que, además de reflejar las simetrías mencionadas, se enmarca en principios filosóficos muy generales propuestos por el pensador.

1 Simetría en los conectivos proposicionales

1.1 Conectivos proposicionales

Un *conectivo proposicional* de aridad n es una función que asigna un valor de verdad a n proposiciones dadas. Desde el punto de vista de la lógica proposicional, lo único relevante de una proposición es su valor de verdad — luego un conectivo es una función que asigna un valor de verdad a n valores

*Publicado en las Memorias del XII Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones, Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, junio 2001.

[†]Arnold Oostra es profesor del Departamento de Matemáticas y Estadística de la Universidad del Tolima y Becario 2003–2004 de la Fundación Mazda para el Arte y la Ciencia.

de verdad dados. En otras palabras, es una operación de aridad n en el conjunto de los valores de verdad.

En la lógica clásica bivalente se estudia el caso más sencillo (llamada *the simplest possible hypothesis* por Peirce, véase [14, §4.250]) considerando solo dos valores de verdad, V y F . En ese contexto, un conectivo de aridad n es una función del conjunto

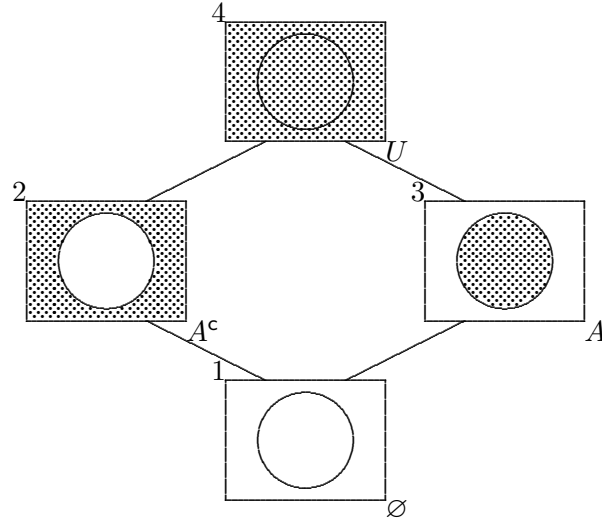
$$\{V, F\}^n = \{V, F\} \times \{V, F\} \times \cdots \times \{V, F\}$$

en el conjunto $\{V, F\}$. Es decir, una operación de aridad n en el conjunto $\{V, F\}$.

Si A es un conjunto finito con a elementos y B es otro con b elementos entonces existen b^a funciones diferentes de A en B . De acuerdo con esto, como $\{V, F\}^n$ tiene 2^n elementos y $\{V, F\}$ tiene 2, existen $2^{(2^n)}$ conectivos de aridad n .

Dado un subconjunto de un conjunto universal, puede asociarse un valor de verdad con el subconjunto y el otro con su complemento. Por ejemplo, si el subconjunto está descrito mediante una función proposicional, sus elementos son los que hacen verdadera la función y los elementos de su complemento son los que la hacen falsa. Esta idea permite establecer una correspondencia biyectiva entre los conectivos de aridad n y las operaciones de aridad n con subconjuntos. Por ejemplo, la conjunción corresponde a la intersección y la negación al complemento. Las operaciones con subconjuntos pueden representarse con facilidad mediante diagramas de Venn.

Las $2^{(2^1)} = 4$ posibles operaciones con un solo subconjunto se ilustran en el siguiente diagrama, donde A es un subconjunto de un universo U y $()^c$ denota el complemento.

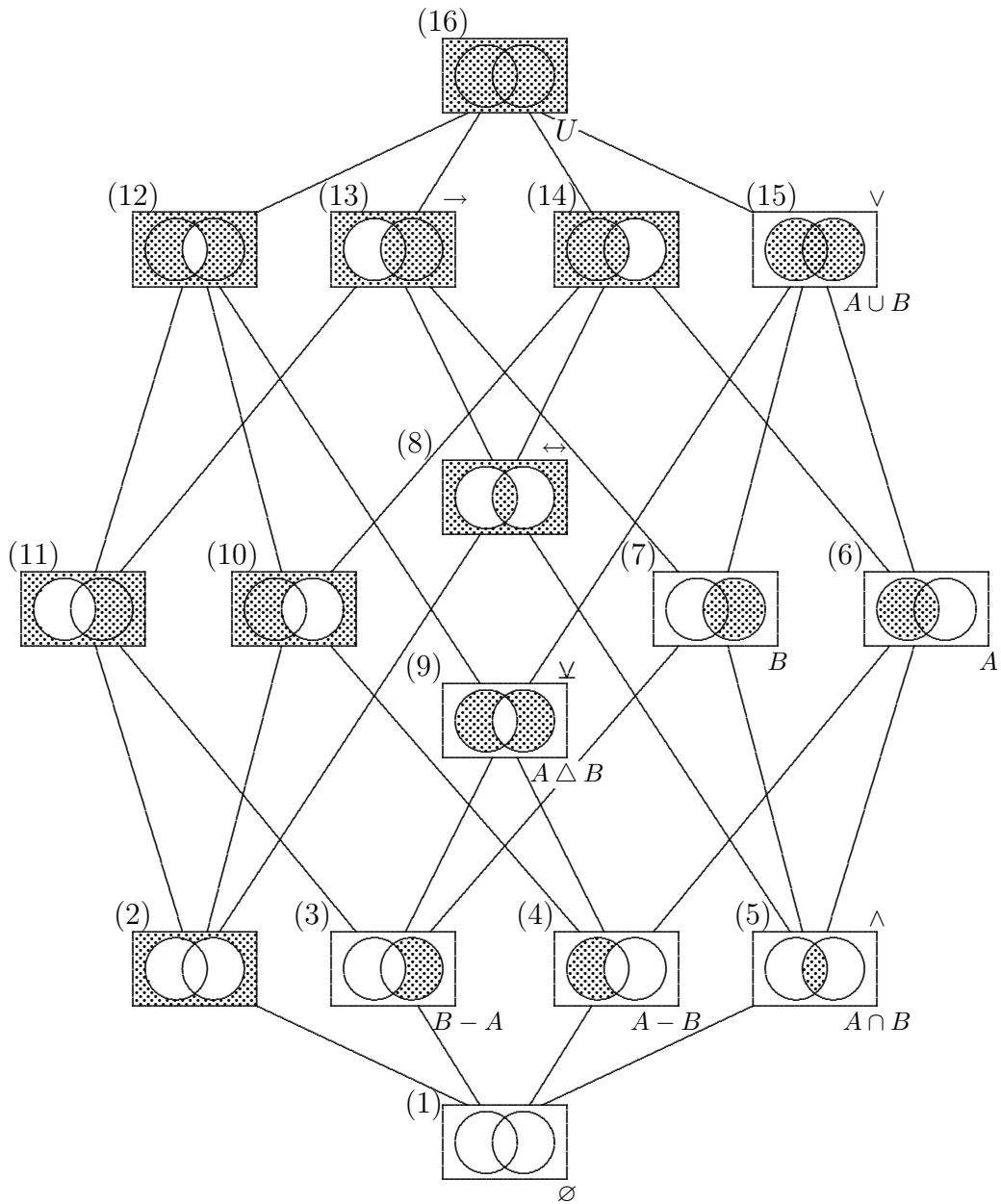


Un conectivo unario o de aridad 1 es una función de $\{V, F\}$ en $\{V, F\}$. Los conectivos unarios se obtienen del diagrama anterior identificando, en el dominio, V con el subconjunto A y F con su complemento. Así, los posibles conectivos unarios son las funciones siguientes.

	1	2	3	4
V	F	F	V	V
F	F	V	F	V

Aunque podrían diseñarse signos para todos los cuatro conectivos unarios, solo se designará de manera especial el segundo, conocido como *negación*. Las notaciones usuales incluyen $\sim x$, $\neg x$, Nx pero aquí, siguiendo las buenas razones de Peirce (explicadas en el parágrafo 4.259 de [14]), se adopta la notación con barra superior: \bar{x} .

Hay $2^{(2^2)}$ conectivos binarios o de aridad 2 y otras tantas operaciones con dos subconjuntos. El diagrama siguiente muestra estas 16 operaciones donde A, B son subconjuntos de un mismo universo U . Cabe anotar que este diagrama fue elaborado por los autores; una presentación diferente (aunque isomorfa como retículo) puede encontrarse en [16].



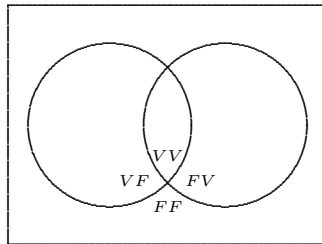
En este diagrama se observa que las operaciones “usuales” (intersección, unión, diferencia, diferencia simétrica, vacío, proyecciones) dan cuenta de

la *mitad* de las operaciones posibles; la otra mitad se obtiene por complementación.

Un conectivo binario es una función de

$$\{V, F\}^2 = \{VV, VF, FV, FF\}$$

en $\{V, F\}$. Los conectivos binarios se obtienen del diagrama anterior rotulando las cuatro regiones como sigue.



En cada una de las 16 operaciones representadas, se asigna V a las regiones sombreadas y F a las demás. La siguiente tabla muestra los 16 conectivos binarios con la numeración del diagrama anterior.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
VV	F	F	F	F	V	V	V	V	F	F	F	F	V	V	V	V
VF	F	F	F	V	F	V	F	F	V	V	F	V	F	V	V	V
FV	F	F	V	F	F	F	V	F	V	F	V	V	V	F	V	V
FF	F	V	F	F	F	F	F	V	F	V	V	V	V	V	F	V

Los conectivos “usuales” son la conjunción (5) cuyos símbolos corrientes son \wedge , $\&$; la disyunción (15), simbolizada \vee y la disyunción exclusiva (9), simbolizada $\underline{\vee}$; la condición (13) con símbolos \rightarrow , \Rightarrow , \supset y su conversa (14); la bicondición (8) simbolizada \leftrightarrow , \Leftrightarrow . El conectivo (6) es la primera proyección, $x(6)y = x$ y el conectivo (7) es la segunda, $x(7)y = y$. Aunque no son tan ubicuos en los tratados de lógica, el conectivo (12) se conoce como ‘barra de Sheffer’ y se simboliza $|$ mientras que (por ejemplo en [1]) el conectivo (2) se

denomina ‘functor de Peirce’ y se simboliza \downarrow . Cabe anotar que Peirce fue el primero en estudiar las propiedades de estos dos últimos conectivos, muchos años antes que Sheffer (véase [21]).

Se observa que los conectivos usuales no corresponden en su totalidad a las operaciones usuales con subconjuntos.

1.2 Simetría

En la tabla de los conectivos binarios saltan a la vista diferentes *simetrías*. Por ejemplo: intercambiar V y F en toda la tabla equivale a una reflexión en el eje vertical. Esta reflexión induce una correspondencia entre los bloques (2)–(5) y (12)–(15), en particular, entre los conectivos usuales \wedge , \vee y los conectivos de Peirce $|$, \downarrow . También se observa que (11) y (10) representan la negación de las proyecciones: $x(11)y = \bar{x}$, $x(10)y = \bar{y}$.

Otro ejemplo de simetría evidente es la invarianza bajo rotaciones de 180 grados de los bloques (2)–(5), (12)–(15) y (6)(7)(10)(11).

¿Cómo precisar estas simetrías? Para comprender la simetría de cualquier estructura, Hermann Weyl en [20] aconseja determinar y estudiar *grupos de automorfismos* de la estructura, entendiendo por automorfismo una función biyectiva del conjunto en él mismo que preserva la estructura.

Un conjunto con 16 elementos tiene $16! = 20'922.789'888.000$ funciones biyectivas en sí mismo (permutaciones), lo cual es un número considerable. No todas esas funciones tienen un significado para los conectivos proposicionales. Se buscan entonces funciones biyectivas de los conectivos construidas con sentido lógico.

En principio surgen dos automorfismos: la negación porque es el único conectivo unario interesante; la conversión porque los conectivos binarios tienen dos variables. Pero la negación puede aplicarse a los argumentos (al uno, o al otro, o a ambos, o a ninguno) y también a la proposición compuesta. Además estos diferentes automorfismos pueden combinarse entre sí.

Después de calcular todas las combinaciones posibles y de ensayar varias notaciones, se escogieron los siguientes automorfismos básicos.

Definición. Sea \circ un conectivo binario. Los conectivos $I\circ$, $N\circ$, $C\circ$, $R\circ$ se definen como sigue, siendo x, y variables proposicionales.

$$\begin{aligned}x(I\circ)y &= x \circ y \\x(N\circ)y &= \overline{x \circ y} \\x(C\circ)y &= y \circ x \\x(R\circ)y &= \bar{y} \circ x\end{aligned}$$

Es evidente que se trata de funciones en el conjunto de los conectivos binarios. I es la función Idéntica; N, C, R se denominan Negación, Conversión y Rotación respectivamente. El último nombre tiene distintas justificaciones, como se verá más adelante, aunque la más sencilla es la analogía con la rotación en el plano cartesiano: $(x, y) \mapsto (-y, x)$.

Si A, B son elementos de $\{I, N, C, R\}$ entonces AB denota la función compuesta: $AB\circ$ significa $A(B\circ)$. Por la manera en que se han definido estas funciones, en el cálculo de $AB\circ$ debe tenerse en cuenta primero la acción de A sobre las variables.

Afirmación. *La composición de las funciones definidas satisface las igualdades siguientes.*

$$\begin{array}{lll}IN = NI = N & N^2 = I & CN = NC \\IC = CI = C & C^2 = I & RN = NR \\IR = RI = R & R^4 = I & RC = CR^3\end{array}$$

Prueba. Las seis igualdades de la primera columna son evidentes porque la función idéntica es elemento neutro para la composición. Las demás se

calculan como sigue.

$$\begin{aligned}
x(N^2\circ)y &= x(N(N\circ))y = \overline{x(N\circ)y} = \overline{x\circ y} = x\circ y = x(I\circ)y \\
x(C^2\circ)y &= x(C(C\circ))y = y(C\circ)x = x\circ y = x(I\circ)y \\
x(R^4\circ)y &= x(R(R(R(R\circ))))y = \overline{y(R(R(R\circ)))}x = \overline{x(R(R\circ))}\overline{y} = \\
&= \overline{y(R\circ)}\overline{x} = \overline{x}\circ\overline{y} = x\circ y = x(I\circ)y
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x(CN\circ)y &= x(C(N\circ))y = y(N\circ)x = \overline{y\circ x} \\
x(NC\circ)y &= x(N(C\circ))y = \overline{x(C\circ)y} = \overline{y\circ x}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x(RN\circ)y &= x(R(N\circ))y = \overline{y(N\circ)x} = \overline{y\circ x} \\
x(NR\circ)y &= x(N(R\circ))y = \overline{x(R\circ)y} = \overline{y\circ x}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x(RC\circ)y &= x(R(C\circ))y = \overline{y(C\circ)x} = x\circ\overline{y} \\
x(CR^3\circ)y &= x(C(R(R(R\circ))))y = y(R(R(R\circ)))x = \overline{x(R(R\circ))}\overline{y} = \\
&= \overline{y(R\circ)}\overline{x} = \overline{x}\circ\overline{y} = x\circ\overline{y} \quad \square
\end{aligned}$$

Se observa de inmediato que I , N , C , R son funciones biyectivas: I , N , C son cada una su propia inversa y la inversa de R es R^3 . Como tales, pueden considerarse permutaciones (elementos del grupo simétrico S_{16}) y, como se construyeron con significado lógico, ellas y sus combinaciones merecen el nombre de *automorfismos lógicos*.

La totalidad de las combinaciones posibles se obtiene escogiendo un orden (N, C, R) y considerando todas las potencias posibles. En este caso, todas las combinaciones tienen la forma $N^i C^j R^k$ donde $0 \leq i < 2$, $0 \leq j < 2$, $0 \leq k < 4$ y se conviene que $N^0 C^0 R^0$ es I . Resultan, pues, $2 \times 2 \times 4 = 16$ combinaciones posibles. Los autores aún no tienen explicación para el hecho muy curioso de que el número de automorfismos lógicos coincida con el de

conectivos binarios.

A partir de la identidad $RC = CR^3$ se demuestra por inducción que para cada par de enteros no negativos m, p se cumple

$$R^m C^p = C^p R^{3^p m},$$

luego la composición de dos productos arbitrarios obedece a la ley

$$(N^i C^j R^k)(N^s C^t R^u) = N^{i+s} C^{j+t} R^{3^t k+u}.$$

La tabla siguiente muestra, por un lado, el cálculo de los 16 automorfismos; por otra parte, la definición de las 16 funciones por extensión.

$x O y$		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
$x O y$	I	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
$\bar{y} O x$	R	1	3	5	2	4	10	6	9	8	11	7	13	15	12	14	16
$\bar{x} O \bar{y}$	R^2	1	5	4	3	2	11	10	8	9	7	6	15	14	13	12	16
$y O \bar{x}$	R^3	1	4	2	5	3	7	11	9	8	6	10	14	12	15	13	16
$y O x$	C	1	2	4	3	5	7	6	8	9	11	10	12	14	13	15	16
$\bar{x} O y$	CR	1	4	5	2	3	11	7	9	8	10	6	14	15	12	13	16
$\bar{y} O \bar{x}$	CR^2	1	5	3	4	2	10	11	8	9	6	7	15	13	14	12	16
$x O \bar{y}$	CR^3	1	3	2	5	4	6	10	9	8	7	11	13	12	15	14	16
$\bar{x} O \bar{y}$	N	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
$\bar{y} O x$	NR	16	14	12	15	13	7	11	8	9	6	10	4	2	5	3	1
$\bar{x} O \bar{y}$	NR^2	16	12	13	14	15	6	7	9	8	10	11	2	3	4	5	1
$\bar{y} O \bar{x}$	NR^3	16	13	15	12	14	10	6	8	9	11	7	3	5	2	4	1
$\bar{y} O x$	NC	16	15	13	14	12	10	11	9	8	6	7	5	3	4	2	1
$\bar{x} O y$	NCR	16	13	12	15	14	6	10	8	9	7	11	3	2	5	4	1
$\bar{y} O \bar{x}$	NCR^2	16	12	14	13	15	7	6	9	8	11	10	2	4	3	5	1
$\bar{x} O \bar{y}$	NCR^3	16	14	15	12	13	11	7	8	9	10	6	4	5	2	3	1

De nuevo, en esta tabla saltan a la vista varias simetrías. Por ejemplo, si cualquier cuadrante se refleja en el eje vertical de la tabla y se corre entonces

coincide con el cuadrante opuesto. También se observan agrupaciones: en la primera y últimas columnas solo aparecen los conectivos (1) y (16); en la octava y novena columnas solo aparecen (8) y (9). En las primeras 8 filas de las columnas (2)–(5) solo aparecen estos mismos conectivos y en las otras 8 filas solo aparecen los conectivos (12)–(15); lo mismo sucede con las columnas (12)–(15). En las columnas (6), (7), (10), (11) solo aparecen estos 4 conectivos.

1.3 El grupo de automorfismos

Definición. El *grupo de automorfismos lógicos* (de los conectivos binarios), denotado \mathcal{B} , es el subgrupo del grupo simétrico S_{16} generado por N, C, R .

Según las observaciones anteriores el grupo \mathcal{B} puede expresarse como sigue.

$$\mathcal{B} = \{N^i C^j R^k \mid 0 \leq i < 2, 0 \leq j < 2, 0 \leq k < 4\}$$

$$\mathcal{B} = \{I, R, R^2, R^3, C, CR, CR^2, CR^3, \\ N, NR, NR^2, NR^3, NC, NCR, NCR^2, NCR^3\}$$

La tabla de la página siguiente muestra de manera explícita la operación del grupo \mathcal{B} .

Una vez más, se observan de inmediato muchas simetrías. Por ejemplo, cada cuadrante coincide con su opuesto; los 8 cuadros de la primera y tercera columnas son isomorfos, lo mismo sucede con la segunda y cuarta columnas. Hay 4 bloques donde solo aparecen automorfismos de la forma R^k (están en la diagonal descendente de izquierda a derecha), dos son iguales entre sí y los otros dos también; hay 4 bloques donde solo aparecen automorfismos de la forma $C^j R^k$; hay 4 bloques donde solo aparecen automorfismos de la forma $N^i R^k$; hay 4 bloques donde solo aparecen automorfismos de la forma $N^i C^j R^k$ (están en la diagonal ascendente).

	I	R	R^2	R^3	C	CR	CR^2	CR^3	N	NR	NR^2	NR^3	NC	NCR	NCR^2	NCR^3
I	I	R	R^2	R^3	C	CR	CR^2	CR^3	N	NR	NR^2	NR^3	NC	NCR	NCR^2	NCR^3
R	R	R^2	R^3	I	CR^3	C	CR	CR^2	NR	NR^2	NR^3	N	NCR^3	NC	NCR	NCR^2
R^2	R^2	R^3	I	R	CR^2	CR^3	C	CR	NR^2	NR^3	N	NR	NCR^2	NCR^3	NC	NCR
R^3	R^3	I	R	R^2	CR	CR^2	CR^3	C	NR^3	N	NR	NR^2	NCR	NCR^2	NCR^3	NC
C	C	CR	CR^2	CR^3	I	R	R^2	R^3	NC	NCR	NCR^2	NCR^3	N	NR	NR^2	NR^3
CR	CR	CR^2	CR^3	C	R^3	I	R	R^2	NCR	NCR^2	NCR^3	NC	NR^3	N	NR	NR^2
CR^2	CR^2	CR^3	C	CR	R^2	R^3	I	R	NCR^2	NCR^3	NC	NCR	NR^2	NR^3	N	NR
CR^3	CR^3	C	CR	CR^2	R	R^2	R^3	I	NCR^3	NC	NCR	NCR^2	NR	NR^2	NR^3	N
N	N	NR	NR^2	NR^3	NC	NCR	NCR^2	NCR^3	I	R	R^2	R^3	C	CR	CR^2	CR^3
NR	NR	NR^2	NR^3	N	NCR^3	NC	NCR	NCR^2	R	R^2	R^3	I	CR^3	C	CR	CR^2
NR^2	NR^2	NR^3	N	NR	NCR^2	NCR^3	NC	NCR	R^2	R^3	I	R	CR^2	CR^3	C	CR
NR^3	NR^3	N	NR	NR^2	NCR	NCR^2	NCR^3	NC	R^3	I	R	R^2	CR	CR^2	CR^3	C
NC	NC	NCR	NCR^2	NCR^3	N	NR	NR^2	NR^3	C	CR	CR^2	CR^3	I	R	R^2	R^3
NCR	NCR	NCR^2	NCR^3	NC	NR^3	N	NR	NR^2	CR	CR^2	CR^3	C	R^3	I	R	R^2
NCR^2	NCR^2	NCR^3	NC	NCR	NR^2	NR^3	N	NR	CR^2	CR^3	C	CR	R^2	R^3	I	R
NCR^3	NCR^3	NC	NCR	NCR^2	NR	NR^2	NR^3	N	CR^3	C	CR	CR^2	R	R^2	R^3	I

En el estudio del grupo de automorfismos \mathcal{B} aparece de manera repetida el grupo diédrico D_4 . Por este motivo, en los próximos párrafos se le prestará atención especial.

En general, el grupo diédrico D_n es el grupo de los movimientos rígidos de un polígono regular de n lados. Puede presentarse como el grupo generado por dos elementos c y r , correspondientes a una reflexión y una rotación, que satisfacen las identidades

$$c^2 = r^n = e, \quad rc = cr^{n-1},$$

siendo e el elemento neutro. Estas identidades equivalen a

$$c^2 = r^n = (cr)^2 = e,$$

y de ellas también se deriva la regla de cálculo

$$r^m c^p = c^p r^{(n-1)^p m}.$$

Otra presentación se obtiene tomando como generadores dos elementos c y d , correspondientes a reflexiones en ejes sucesivos, que satisfacen las identidades siguientes:

$$c^2 = d^2 = (cd)^n = e.$$

El profesor Fernando Zalamea indicó a los autores que, en el caso $n = 4$, el grupo de los movimientos del cuadrado puede presentarse como un grupo de matrices. Más exactamente, es el subgrupo del grupo lineal $Gl_2(\mathbb{Z})$ generado por las matrices siguientes.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Se verifica de inmediato que $A^2 = B^4 = I$, $BA = AB^3$. El grupo generado por estas matrices es el siguiente.

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \right. \\ \left. \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$$

Volviendo al estudio del grupo de automorfismos, la lista de la página siguiente muestra los subgrupos de \mathcal{B} que los autores han podido encontrar; los que están marcados con un triángulo \triangleleft son normales en \mathcal{B} .

En \mathcal{B} no hay más subgrupos de orden 2 porque no hay más elementos de orden 2; no hay más subgrupos de orden 4 porque no hay más elementos de orden 4 ni más pares de elementos de orden 2 que conmuten entre sí. Hasta el momento los autores ignoran si \mathcal{B} posee más subgrupos de orden 8.

Excepto el primero, todos los isomorfismos indicados se verifican sin dificultad.

\mathcal{B}	$\cong \mathbb{Z}_2 \times D_4$	\triangleleft
$\{I, R, R^2, R^3, C, CR, CR^2, CR^3\}$	$\cong D_4$	\triangleleft
$\{I, R, R^2, R^3, N, NR, NR^2, NR^3\}$	$\cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$	\triangleleft
$\{I, R, R^2, R^3, NC, NCR, NCR^2, NCR^3\}$	$\cong D_4$	\triangleleft
$\{I, R^2, C, CR^2, NR, NR^3, NCR, NCR^3\}$	$\cong D_4$	\triangleleft
$\{I, R^2, C, CR^2, N, NR^2, NC, NCR^2\}$	$\cong \mathbb{Z}_2 \times V$	\triangleleft
$\{I, R^2, CR, CR^3, N, NR^2, NCR, NCR^3\}$	$\cong \mathbb{Z}_2 \times V$	\triangleleft
$\{I, R, R^2, R^3\}$	$\cong \mathbb{Z}_4$	\triangleleft
$\{I, C, N, NC\}$	$\cong V$	
$\{I, CR, NR^2, NCR^3\}$	$\cong V$	\triangleleft
$\{I, CR^2, N, NCR^2\}$	$\cong V$	
$\{I, CR^3, NR^2, NCR\}$	$\cong V$	\triangleleft
$\{I, CR^2, NR^2, NC\}$	$\cong V$	
$\{I, CR^3, N, NCR^3\}$	$\cong V$	
$\{I, C, NR^2, NCR^2\}$	$\cong V$	\triangleleft
$\{I, CR, N, NCR\}$	$\cong V$	
$\{I, R^2, NR, NR^3\}$	$\cong \mathbb{Z}_4$	\triangleleft
$\{I, R^2, NCR, NCR^3\}$	$\cong V$	
$\{I, R^2, C, CR^2\}$	$\cong V$	\triangleleft
$\{I, R^2, N, NR^2\}$	$\cong V$	\triangleleft
$\{I, R^2, NC, NCR^2\}$	$\cong V$	\triangleleft
$\{I, R^2\}$	$\cong \mathbb{Z}_2$	\triangleleft
$\{I, C\}$	$\cong \mathbb{Z}_2$	
$\{I, CR\}$	$\cong \mathbb{Z}_2$	
$\{I, CR^2\}$	$\cong \mathbb{Z}_2$	
$\{I, CR^3\}$	$\cong \mathbb{Z}_2$	
$\{I, N\}$	$\cong \mathbb{Z}_2$	\triangleleft
$\{I, NR^2\}$	$\cong \mathbb{Z}_2$	\triangleleft
$\{I, NC\}$	$\cong \mathbb{Z}_2$	
$\{I, NCR\}$	$\cong \mathbb{Z}_2$	
$\{I, NCR^2\}$	$\cong \mathbb{Z}_2$	
$\{I, NCR^3\}$	$\cong \mathbb{Z}_2$	\triangleleft
$\{I\}$		\triangleleft

Teorema. *El grupo \mathcal{B} de los automorfismos lógicos es isomorfo al grupo producto $\mathbb{Z}_2 \times D_4$.*

Demostración. Escogiendo para D_4 la presentación como generado por c y r , la correspondencia es evidente pues al elemento $(i, c^j r^k)$ de $\mathbb{Z}_2 \times D_4$ se asigna el elemento $N^i C^j R^k$ del grupo \mathcal{B} . Esta función $\varphi : \mathbb{Z}_2 \times D_4 \longrightarrow \mathcal{B}$ es biyectiva y preserva las operaciones porque N conmuta con todos los elementos de \mathcal{B} mientras C, R en \mathcal{B} satisfacen las mismas relaciones que c, r en D_4 . De manera formal:

$$\begin{aligned}
 \varphi((i, c^j r^k)(s, c^t r^u)) &= \varphi(i + s, c^j r^k c^t r^u) \\
 &= \varphi(i + s, c^{j+t} r^{3^t k + u}) \\
 &= N^{i+s} C^{j+t} R^{3^t k + u} \\
 &= (N^i C^j R^k)(N^s C^t R^u) \\
 &= \varphi(i, c^j r^k) \varphi(s, c^t r^u). \quad \square
 \end{aligned}$$

Este isomorfismo expresa el siguiente hecho sorprendente: *los automorfismos de los conectivos binarios corresponden a los movimientos rígidos de un “cuadrado binario”, esto es, un cuadrado cuyos lados pueden alternar entre dos estados (por ejemplo, entre blanco y negro).*

Nota: El grupo \mathcal{B} no puede verse como subgrupo de $Gl_2(\mathbb{Z})$ extendiendo la presentación de D_4 indicada antes. Porque el automorfismo N correspondería a una matriz $M \in M_2(\mathbb{Z})$ que conmuta con todos los elementos de D_4 , en particular con A y B . Pero si M conmuta con $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ entonces es un múltiplo escalar de la idéntica, $M = aI$; si además $M^2 = I$ entonces $M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ o $M = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$. Estas dos matrices ya pertenecen a la representación matricial de D_4 .

La lista siguiente muestra algunos grupos cociente obtenidos de \mathcal{B} , con seguridad hay más. Todos los isomorfismos indicados se demuestran sin dificultad. Esto constituye un ejemplo interesante de los siguientes hechos: subgrupos no isomorfos pueden dar lugar a cocientes isomorfos; subgrupos isomorfos pueden dar lugar a cocientes no isomorfos.

$$\begin{array}{ll}
\mathcal{B}/\{I, R, R^2, R^3, C, CR, CR^2, CR^3\} & \cong \mathbb{Z}_2 \\
\mathcal{B}/\{I, R, R^2, R^3, N, NR, NR^2, NR^3\} & \cong \mathbb{Z}_2 \\
\mathcal{B}/\{I, R, R^2, R^3, NC, NCR, NCR^2, NCR^3\} & \cong \mathbb{Z}_2 \\
\mathcal{B}/\{I, R^2, C, CR^2, NR, NR^3, NCR, NCR^3\} & \cong \mathbb{Z}_2 \\
\mathcal{B}/\{I, R, R^2, R^3\} & \cong V \\
\mathcal{B}/\{I, CR^3, NR^2, NCR\} & \cong \mathbb{Z}_4 \\
\mathcal{B}/\{I, R^2\} & \cong \mathbb{Z}_2 \times V \\
\mathcal{B}/\{I, N\} & \cong D_4 \\
\mathcal{B}/\{I, NR^2\} & \cong D_4
\end{array}$$

Los únicos subgrupos normales de orden 2 son $\{I, R^2\}$, $\{I, N\}$ e $\{I, NR^2\}$, luego no hay más cocientes de orden 8 fuera de los indicados. En particular, $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$ aparece como un subgrupo de \mathcal{B} pero no como cociente del mismo.

Si el grupo \mathcal{B} de automorfismos lógicos se mira como un subgrupo del grupo simétrico S_{16} , entonces *actúa* de manera natural sobre el conjunto de los 16 conectivos binarios. Los elementos que aporta esta acción de grupo son los siguientes.

Los subgrupos de isotropía son:

$$\begin{array}{ll}
\{I, R, R^2, R^3, C, CR, CR^2, CR^3\} & (1) (16) \\
\{I, R^2, C, CR^2, NR, NR^3, NCR, NCR^3\} & (8) (9) \\
\{I, CR, NR^2, NCR^3\} & (7) (10) \\
\{I, CR^3, NR^2, NCR\} & (6) (11) \\
\{I, C\} & (2) (5) (12) (15) \\
\{I, CR^2\} & (3) (4) (13) (14)
\end{array}$$

Los elementos invariantes bajo los diferentes automorfismos son:

I	(1), (2), (3), (4), ..., (13), (14), (15), (16)
R	(1), (16)
R^2	(1), (8), (9), (16)
R^3	(1), (16)
C	(1), (2), (5), (8), (9), (12), (15), (16)
CR	(1), (6), (11), (16)
CR^2	(1), (3), (4), (8), (9), (13), (14), (16)
CR^3	(1), (7), (10), (11)
N	—
NR	(8), (9)
NR^2	(6), (7), (10), (11)
NR^3	(8), (9)
NC	—
NCR	(7), (8), (9), (10)
NCR^2	—
NCR^3	(6), (8), (9), (11)

Las órbitas de esta acción de grupo son:

$$\begin{aligned} & \{(1), (16)\} \\ & \{(2), (3), (4), (5), (12), (13), (14), (15)\} \\ & \{(6), (7), (10), (11)\} \\ & \{(8), (9)\} \end{aligned}$$

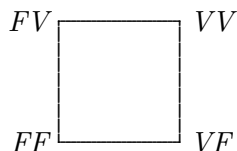
Estas órbitas corresponden a las agrupaciones observadas al final del apartado 1.2 en la tabla de las 16 funciones por extensión.

El profesor Fernando Zalamea indicó a los autores la siguiente construcción, más geométrica, del grupo de automorfismos, construcción que surge de distinguir los automorfismos que actúan sobre las variables (conversión, negación en las variables) de los que actúan sobre la proposición compuesta.

Actuando solo sobre las variables, las imágenes posibles de una pareja (x, y) son

$$(x, y), (\bar{x}, y), (x, \bar{y}), (\bar{x}, \bar{y}), (y, x), (\bar{y}, x), (y, \bar{x}), (\bar{y}, \bar{x}).$$

Ahora se ubican las parejas VV, VF, FV, FF en los vértices de un cuadrado:

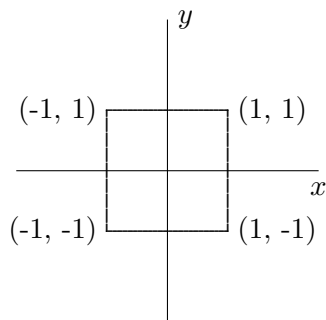


Los automorfismos se traducen como sigue.

Idéntica	(x, y)	Reposo
Negación 1ª	(\bar{x}, y)	Reflexión en eje vertical
Negación 2ª	(x, \bar{y})	Reflexión en eje horizontal
Negación 1ª y 2ª	(\bar{x}, \bar{y})	Rotación 180°
Conversión	(y, x)	Ref en diagonal ascendente
Conversión + Neg 1ª	(\bar{y}, x)	Rotación 90°
Conversión + Neg 2ª	(y, \bar{x})	Rotación 270°
Conversión + Neg 1ª y 2ª	(\bar{y}, \bar{x})	Ref en diagonal descendente

Pero estos corresponden con exactitud a los movimientos rígidos del cuadrado.

Si el cuadrado se ubica adecuadamente en el plano cartesiano, los movimientos corresponden a rotaciones y reflexiones del plano en los que la negación corresponde a cambiar el signo.



De esta manera, el grupo diédrico D_4 actúa sobre el conjunto

$$\{VV, VF, FV, FF\}.$$

Por otro lado, es claro que el grupo \mathbb{Z}_2 actúa sobre $\{V, F\}$. Y ahora basta recordar el siguiente teorema de Teoría de Grupos.

Teorema. *Supóngase que el grupo G actúa a la derecha sobre el conjunto X y que el grupo H actúa a la izquierda sobre el conjunto Y .*

- (i) *G actúa (a la izquierda) sobre el conjunto $\text{Fun}(X, Y)$ de las funciones de X en Y .*
- (ii) *H actúa (a la izquierda) sobre $\text{Fun}(X, Y)$.*
- (iii) *El grupo producto $H \times G$ actúa (a la izquierda) sobre $\text{Fun}(X, Y)$.*

Nota: La acción “a la izquierda” significa que $(h_1 * h_2) \cdot y = h_1 \cdot (h_2 \cdot y)$; la acción “a la derecha” significa que $(g_1 * g_2) \cdot x = g_2 \cdot (g_1 \cdot x)$.

Esquema de la prueba.

- (i) Haciendo $g(x) = g \cdot x$, los elementos de G se identifican con funciones de X en X . Como la acción es a la derecha, al elemento $g_1 * g_2$ corresponde la función compuesta $g_2 g_1$. A la pareja (g, f) de $G \times \text{Fun}(X, Y)$ se asigna la función compuesta fg .
- (ii) Los elementos de H se identifican con funciones de Y en Y ; en este caso, $h_1 * h_2$ corresponde a $h_1 h_2$. A la pareja (h, f) de $H \times \text{Fun}(X, Y)$ se asigna hf .
- (iii) A la pareja $((h, g), f)$ de $(H \times G) \times \text{Fun}(X, Y)$ se asigna la función compuesta hfg . □

En particular, el grupo producto $\mathbb{Z}_2 \times D_4$ actúa sobre el conjunto de todas las funciones de $\{VV, VF, FV, FF\}$ en $\{V, F\}$, es decir, sobre el conjunto de los conectivos binarios.

2 Charles S. Peirce

2.1 Acercamiento

Los autores no conocen hasta ahora ningún texto de lógica que haga un tratamiento del conjunto completo de los conectivos binarios. Tan solo para unos cuantos se presenta una notación “usual”, entre ellos la conjunción, la disyunción, la disyunción exclusiva, la condición y la bicondición; en algunos casos se incluyen otros dos más, la barra de Sheffer y el funtor de Peirce, terminando ahí. La pregunta que surge entonces es: ¿Existe alguna notación adecuada y completa para los 16 conectivos binarios? ¿Qué criterios deben asumirse para la palabra “adecuada”?

Desde luego existen muchas notaciones, pero son poco conocidas y menos conocidos aún son los criterios adoptados por sus autores. Dado el estudio, presentado en la sección anterior, de los conectivos binarios bajo una perspectiva lógica y algebraica, aquí se buscaría una notación que de alguna manera refleje las propiedades estudiadas en los conectivos. Pero hay más por precisar y, puesto que se trata de buscar símbolos o signos, vale la pena acudir a la ciencia de los signos o *semiótica*. El problema de la notación adecuada para los conectivos binarios se ubica en el cruce entre álgebra, lógica y semiótica.

Ubicado ya el problema en la intersección de la lógica y la semiótica, resulta obligatorio mirar la obra del gran lógico y padre de la semiótica moderna *Charles Sanders Peirce* (1839–1914). Además de principios filosóficos generales para los signos adecuados, Peirce propuso una notación que cumple a cabalidad esos requerimientos generales. La notación es completa, es decir, tiene un signo para cada uno de los 16 conectivos binarios; además es de carácter plenamente *icónico*, pues el signo refleja para el interpretante características del objeto representado, precisa variaciones mostrando propiedades de los conectivos y refleja simetrías globales.

2.2 Nota biográfica

Fue en Cambridge (Massachusetts) donde Sarah Mills y Benjamin Peirce recibieron el 10 de septiembre de 1839 en el seno de su hogar a Charles Sanders Peirce. Su padre, quien ejerció la enseñanza de la matemática por cerca de medio siglo en la Universidad de Harvard en Boston, se encargó personalmente de la formación matemática de su hijo Charles. Desde temprana edad a Charles se le notó gran curiosidad por las ciencias y el conocimiento en general, fue así como a la edad de 12 años construyó su propio laboratorio de química, a los 13 leyó *Elements of Logic* de Whately, años más tarde dedicó 2 horas diarias durante 3 años a la lectura de *Crítica de la Razón Pura*, de Kant, obra que influyó notablemente en la construcción de su filosofía. Pero aquí no terminan las muestras de su precocidad ya que a sus 20 años obtuvo la Licenciatura en Matemáticas en la Universidad de Harvard, al igual que su Maestría a los 23, también obtuvo en 1863 una Licenciatura en Química otorgada por primera vez *Summa Cum Laude* por esta Universidad.

Pero indudablemente todo en la vida de Charles no fue solo estudio, también hubo lugar para otros espacios como su vida sentimental o amorosa, encontrándose a la edad de 23 años casado con una señorita de la alta sociedad de Cambridge con la que permaneció alrededor de 14 años. Luego de su separación rehizo su hogar junto a la actriz francesa Juliette Annette Pourtalais, quien le acompañó hasta el día de su muerte el 19 de abril de 1914 en su casa de campo, Arisbe, cerca de la ciudad de Milford (Pennsylvania), donde vivió sus últimos 27 años con la cuantiosa herencia recibida en 1883, la que solo le duró 10 años quedando luego en la ruina y viviendo de la caridad pública.

Hay que resaltar la brillantez de Peirce quien es considerado como uno de los genios universales que produjo el siglo XIX, pues se destacó como: químico, físico, geodesta, matemático, lógico, filósofo y semiótico, aportando numerosos trabajos a cada uno de estos campos, es más, renovando completamente algunos de ellos como la filosofía, la lógica y la semiótica. Además

escribió sobre epistemología, el método científico, metafísica, ontología, ética, estética y religión. Peirce trabajó por más de 30 años en el Servicio Geodésico de los Estados Unidos (*United States Coast and Geodetic Survey*), dejando varias contribuciones tales como: la medición de la tierra; la medición del metro a partir de la longitud de onda de la luz (1877–1879); un mapa plano del globo terráqueo usando funciones elípticas (proyección *quincuncial*); el desarrollo de métodos para el cálculo del valor de la gravedad con el uso del péndulo; la observación del eclipse de sol el 22 de diciembre de 1870, para lo cual recorrió Europa en busca de las mejores condiciones. Otros trabajos fueron expuestos en *Photometric Researches* (1878), el único libro publicado por Peirce, donde se incluyeron resultados de investigaciones en astronomía y geofísica, artículos técnicos de lógica y matemática y metodología científica.

Respecto a la lógica en particular, Peirce leyó bajo la influencia de su padre los trabajos de Aristóteles, Whately, Kant y Boole. Contribuyó al refinamiento del sistema de Boole y de De Morgan; inventó la lógica de relaciones (1870), la lógica de cuantificadores (1882) y la lógica trivalente (1909); estudió la axiomatización del cálculo proposicional (1885), el cálculo implicativo débil, la negación intuicionista (1880), las tablas de verdad (1885), los conectivos completos (1880, 1902), las definiciones reticulares (1880), la notación de los conectivos proposicionales (1902), la enumeración de los números racionales, una axiomatización de los números naturales, entre otros. Un aporte original nunca igualado son sus *gráficos existenciales* (1903), sistema que provee una axiomatización uniforme tanto para el cálculo proposicional clásico como para la lógica clásica de primer orden, aporte que aún hoy queda por recuperarse y desarrollarse a fondo; estos gráficos están dados bajo importantes contextos filosóficos como las tres categorías peirceanas y la máxima pragmática. Además Peirce amplió la lógica a las dimensiones de la semiótica o teoría general de los signos, trabajando sobre la distinción entre dos tipos de acción: acción del signo o semiosis y acción dinámica o mecánica, no siendo posible esto sin la fundamentación de una filosofía fenomenológica

o, con los términos empleados por Peirce, faneroscópica y pragmática. Cabe anotar que debe distinguirse el pragmatismo peirceano del pragmatismo vulgar de sus sucesores William James, John Dewey y Richard Rorty, quienes redujeron la multiplicidad peirceana de contextos a contextos utilitarios o psicológicos, y de ámbitos no deterministas peirceanos a ámbitos deterministas. William James y Josiah Royce repetidamente reconocieron las contribuciones de Peirce durante el tiempo de su vida y John Dewey después de su muerte. Se puede decir entonces que esta fue la única forma en que algunos de los pensamientos de Peirce fueron transmitidos a la comunidad académica.

Un interrogante acerca de la vida de Peirce es: ¿Por qué no ejerció la docencia al igual que su padre? Pues bien, entre los años 1865 y 1895 intentó gran número de veces obtener un cargo docente, consiguiendo la cátedra de lógica en la Universidad Johns Hopkins en Baltimore (Maryland) en 1879. Pero el cargo le fue retirado en 1884, siendo esta la época de su divorcio y su segundo matrimonio. Después de esto, su actividad académica se limitó a dictar ciclos de conferencias sobre el pragmatismo ayudado por James en el Instituto Lowell de Harvard (1903).

Peirce fue marginado de la academia, tal vez debido a su personalidad excéntrica, su aparente carácter difícil, su estilo de vida desordenada, su divorcio y al hecho de haberse casado con una mujer de origen desconocido. Las publicaciones realizadas por Peirce durante su vida, pronto se legaron al olvido; la viuda quien heredó sus manuscritos (más de 100.000 páginas), no tuvo más remedio que venderlos a Harvard donde literalmente fueron enterrados. Fue hacia 1923 que Morris R. Cohen publicó la primera antología de textos de Peirce: *Chance, Love and Logic*, que incluye un artículo de Dewey sobre el pensamiento de Peirce y una bibliografía. En ese mismo año también se publicó el escrito *The Meaning of Meaning*, de Ogden y Richards, que llamó la atención pública sobre la semiótica de Peirce.

Entre 1931 y 1935, se publicaron los 6 primeros volúmenes de *Collected Papers* [14] bajo la dirección de Charles Hartshorne y Paul Weiss quienes

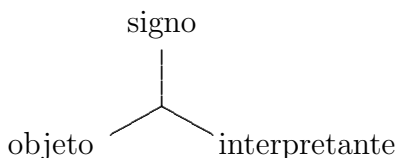
menospreciaron los trabajos de Peirce desmembrando y mutilando su obra. Otros 2 volúmenes aparecieron en 1958 bajo la dirección de Arthur Burks. Posteriormente se han publicado numerosas e importantes obras sobre el legado de Peirce. Actualmente se encuentra en curso una edición cronológica y meticulosa de sus escritos, proyectada para 30 volúmenes, hasta ahora se han publicado 6 [15].

Peirce no solo fue uno de los más originales y versátiles filósofos de América, aunque es demasiado pronto para decir cuál es o será su lugar en la historia del pensamiento. En todo caso, desborda los límites geográficos de América, siendo catalogado, junto con Saussure, como el padre de la semiótica moderna; también es considerado el padre del pragmatismo. Aunque su influencia en la lógica no ha sido del todo explorada, actualmente se le está prestando la atención que merece para sacar a flote sus pensamientos y trabajos, que seguramente repercutirán en buena medida en el desarrollo de este campo.

2.3 La teoría de los signos

La base que Peirce estableció para su teoría de signos o semiótica, de hecho para todo su edificio filosófico, está constituida por las tres categorías fenomenológicas llamadas por él simplemente “primeridad”, “segundidad” y “terceridad”. La primeridad es la categoría del sentimiento puro y prereflexivo; la segundidad abarca la existencia actual, la confrontación y la reacción; la terceridad es la categoría de la relación, el hábito y la continuidad. De manera muy especial, las tres categorías se reflejan en la noción de signo como semiosis, como relación signica (véanse [17, 28]).

En alguna ocasión Peirce definió el signo como “algo que está por algo para alguien”. Saltan a la vista tres elementos integrantes del signo, o mejor, relacionados en el signo, llamados por Peirce “el signo en sí” (algo), “el objeto” (que está por algo) y “el interpretante” (para alguien).



Estos elementos inducen de manera inmediata tres ramas de la semiótica como ciencia: en la terminología de Peirce, ellas son la “gramática especulativa”, la “lógica” y la “retórica pura” o “metodéutica”. Además la semiótica adquiere tres dimensiones correspondientes: la “sintaxis”, la “semántica” y la “pragmática”. Lo que justifica esta clasificación es la consideración de la semiótica como una relación, necesariamente triádica, en la que el signo, el objeto y el interpretante, son, respectivamente, manifestaciones de las categorías faneroscópicas. Inicialmente Peirce distinguió tres tricotomías para clasificar los signos, cada una con tres divisiones.

El signo...	Primeridad	Segundidad	Terceridad
...en sí mismo	<i>cualisigno</i>	<i>sinsigno</i>	<i>legisigno</i>
...en relación con el objeto	<i>ícono</i>	<i>índice</i>	<i>símbolo</i>
...representado por el interpretante	<i>rema</i>	<i>dicisigno</i>	<i>argumento</i>

Las combinaciones transversales (por ejemplo, rema–índice–legisigno) dan lugar a 10 clases de signos; posteriormente Peirce añadió más tricotomías llegando a distinguir más de 60 clases.

La tricotomía más usada por Peirce y tal vez la más conocida es la terna ícono–índice–símbolo. En ella el signo está determinado por el objeto: primero, participando de las características del objeto (ícono); segundo, conectado con el objeto (índice); tercero, interpretado habitualmente como la denotación del objeto (símbolo).

Un ícono representa en tanto guarda semejanza con el objeto, semejanza exacta como en una fotografía o semejanza convencional como en las fórmulas

algebraicas. Un ícono participa de la vida del objeto de tal manera que por la observación del signo pueden describirse aspectos y hechos antes desconocidos del objeto, al punto de que inferencias del ícono son inferencias acerca del objeto. De otra manera, un índice representa en tanto tiene alguna conexión existencial directa con el objeto, como el aviso sobre la puerta de una tienda o como el dedo índice que señala alguna cosa. Finalmente, un símbolo representa en tanto es una convención o un hábito (en el amplio sentido peirceano) que determinará al interpretante, como las palabras y los libros: el símbolo no indica cosas en particular, denota clases de cosas.

Volviendo ahora al problema de la notación para los conectivos binarios, la semiótica de Peirce permite precisar lo que significa “una notación adecuada”. En realidad, lo que se busca es que el signo para cada conectivo guarde semejanza con el objeto denotado, de tal manera que, observando el signo, puedan descubrirse propiedades del conectivo o aún inferir conclusiones sobre el mismo. Empleando la terminología de Peirce, lo que se busca es una notación *icónica* para los conectivos binarios.

El carácter icónico puede precisarse a su vez en tres niveles, que corresponden a las tres categorías peirceanas o bien a la tríada ícono–índice–símbolo. De esta manera podrían enumerarse las siguientes propiedades deseables en una notación para los conectivos binarios.

0. **Notación completa.** Se espera que todos los 16 conectivos binarios tengan un signo. Esto quizás incluye la condición de que los signos se construyan de manera global u homogénea para todos los conectivos.
1. **El signo asemeja.** Es deseable que el signo escogido guarde una semejanza exacta o convencional con el conectivo, visto como función de valores de verdad o como operación de subconjuntos. De esta manera, se espera que el signo de alguna forma *sea* la tabla de verdad del conectivo o (y) *sea* el diagrama de Venn de la operación correspondiente.
2. **El signo contrasta.** También se espera que el signo permita leer

propiedades del conectivo, clasificando y distinguiendo así los conectivos. Por ejemplo, podría reflejarse en el signo si el conectivo es conmutativo o no.

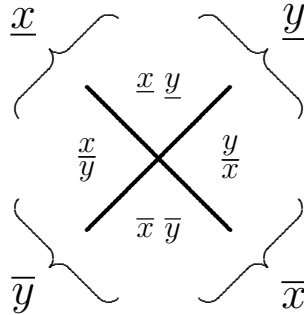
3. **El signo relaciona.** Aunque quizás sea pedir mucho, es deseable que los signos elegidos para los conectivos binarios reflejen las propiedades de todo el sistema, que en ellos puedan verse todas las simetrías estudiadas en la sección 1 de este artículo.

3 Notaciones para los conectivos binarios

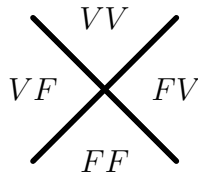
3.1 La notación de Peirce

Es lamentable la poca atención que se ha prestado a los escritos de Peirce referentes a la notación de los conectivos binarios, pues siendo todo un pionero en el campo del símbolo lógico y considerado como el padre de la semiótica moderna, su notación es un ejemplo importante en el cual pone en acción sus principios generales. Sus manuscritos que se vendieron a Harvard no recibieron los cuidados necesarios: algunas de las hojas con tablas de conectivos se perdieron y, no menos grave, las páginas donde se incluían sus signos para los conectivos binarios fueron omitidas por los editores de *Collected Papers* y los símbolos cambiados por otros que indudablemente carecían de los principios que Peirce aplicó para la construcción de ellos.

La notación de Peirce se basa en asignar a los cuadrantes de un marco \times las cuatro posibles combinaciones de valores de verdad de dos proposiciones o cantidades (x, y) , donde su valor de verdad es indicado por una barra inferior cuando es verdadera (\underline{x}) y una barra superior cuando es falsa (\overline{x}). El diagrama siguiente (debido a Peirce, véase [14, §4.260]) muestra las combinaciones sobre el marco \times .



En términos de valores de verdad (V, F), la combinación VV es asignada al cuadrante superior, la combinación FF al cuadrante inferior y las combinaciones VF y FV a los cuadrantes izquierdo y derecho respectivamente, como lo muestra el diagrama siguiente.



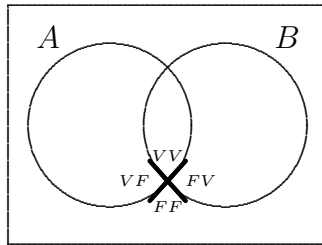
Cuando en cierto conectivo alguna de las combinaciones de valores de verdad es *falsa*, el cuadrante correspondiente *se cierra* con un segmento entre los extremos del marco. Es claro que hay 16 formas de cerrar cuadrantes del marco \times ; también es claro cómo pasar de la tabla de verdad del conectivo al símbolo y viceversa.

Conciente de la dificultad para escribir con rapidez cada símbolo, Peirce introdujo una forma cursiva que posteriormente él mismo modificó por razones históricas. En la siguiente tabla se presenta en la parte inferior la notación del marco \times , su forma cursiva y la forma cursiva modificada.

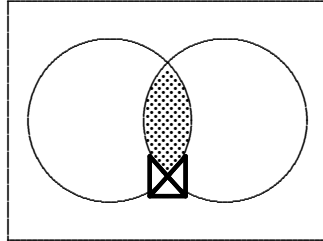
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
VV	F	F	F	F	V	V	V	V	F	F	F	F	V	V	V	V
VF	F	F	F	V	F	V	F	F	V	V	F	V	F	V	V	V
FV	F	F	V	F	F	F	V	F	V	F	V	V	V	F	V	V
FF	F	V	F	F	F	F	F	V	F	V	V	V	V	V	F	V
	⊠	⊠	⊠	⊠	⊠	⊠	⊠	⊠	⊠	⊠	⊠	⊠	⊠	⊠	⊠	⊠
	⊗	∧	<	>	∨	⊗	⊗	∞	8	⊗	⊗	⊗	∞	∞	∞	⊗
	⊕	∧	<	>	∨	△	△	=		▽	▽	⊗	∞	∞	∞	⊗

3.2 Carácter icónico de la notación de Peirce

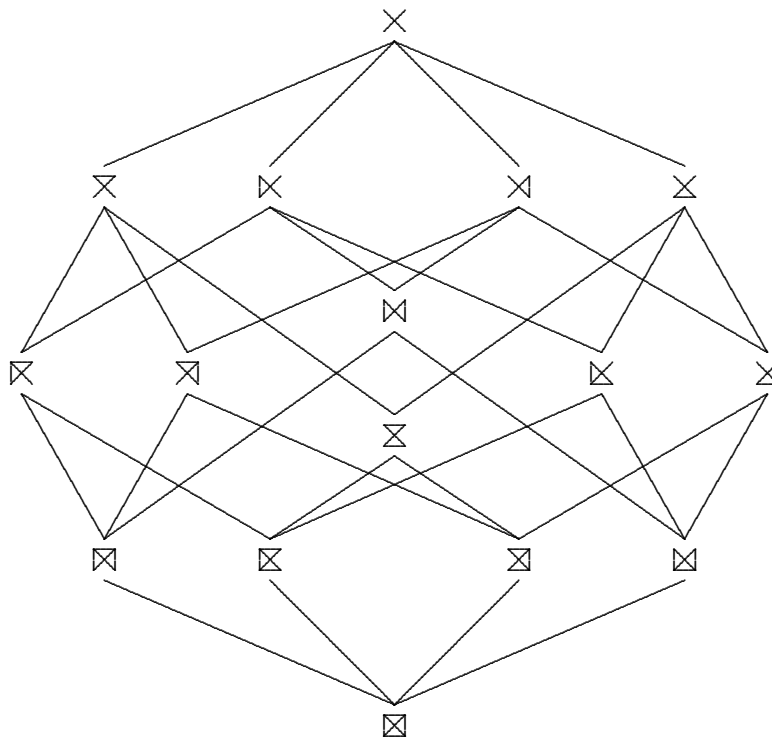
Es notable la estrecha relación que hay entre el signo y el conectivo, ya que a partir del signo se puede construir la tabla de verdad del conectivo y viceversa. De la notación de marco \times también puede pasarse con facilidad a los diagramas de Venn y viceversa. Las cuatro regiones del diagrama de Venn se rotulan como sigue: VV corresponde a la región contenida en ambos conjuntos, VF a la región contenida en A y no en B , FV a la contenida en B y no en A , FF a la región exterior a ambos (véase el apartado 1.1). De esta manera el marco \times corresponde al cruce *inferior* de los círculos de Venn, como se muestra en el diagrama siguiente indicado también por Peirce mismo.



Una vez rotuladas las regiones, un cuadrante del marco \times se cierra si y solo si la región que abarca no está sombreada. Por ejemplo, la operación intersección corresponde al conectivo \boxtimes .



El diagrama siguiente corresponde al retículo presentado en el apartado 1.1 pero es mucho más sintético: cada nodo representa a la vez el conectivo como tabla de verdad y como diagrama de Venn. Además el diagrama completo corresponde al retículo de subconjuntos de un conjunto con cuatro elementos, si se toman los cuadrantes abiertos como elementos.



Un conectivo \circ es *conmutativo* cuando $x \circ y$ equivale a $y \circ x$ o, lo que es lo mismo, cuando $(x \circ y) \bowtie (y \circ x)$ es una tautología. Puesto que $y \circ x = x(C\circ)y$, el conectivo \circ es conmutativo si y solo si es invariante bajo C . Según la lista de invariantes del apartado 1.3 los conectivos conmutativos son (1), (2), (5), (8), (9), (12), (15) y (16); con la notación de Peirce son:

$$\boxtimes, \boxtimes, \boxtimes, \boxtimes, \boxtimes, \boxtimes, \boxtimes, \boxtimes.$$

Estos son precisamente los símbolos con simetría derecha-izquierda, esto es, invariantes bajo una reflexión en el eje vertical. Lo cual puede justificarse con facilidad: el conectivo es conmutativo si y solo si sus valores en VF y FV coinciden, y esto sucede si y solo si, en la notación de Peirce, los cuadrantes derecho e izquierdo son iguales.

La tabla siguiente muestra la acción de los automorfismos (como en 1.2) pero los conectivos se han simbolizado con la notación de Peirce.

	$\boxtimes \boxtimes \boxtimes \boxtimes \boxtimes \boxtimes \boxtimes \boxtimes \boxtimes \boxtimes \boxtimes \boxtimes \boxtimes \boxtimes \boxtimes \boxtimes$	
I	$\boxtimes \boxtimes \boxtimes \boxtimes \boxtimes \boxtimes \boxtimes \boxtimes \boxtimes \boxtimes \boxtimes \boxtimes \boxtimes \boxtimes \boxtimes \boxtimes$	Reposo
R	$\boxtimes \boxtimes \boxtimes \boxtimes \boxtimes \boxtimes \boxtimes \boxtimes \boxtimes \boxtimes \boxtimes \boxtimes \boxtimes \boxtimes \boxtimes \boxtimes$	Rotación 90°
R^2	$\boxtimes \boxtimes \boxtimes \boxtimes \boxtimes \boxtimes \boxtimes \boxtimes \boxtimes \boxtimes \boxtimes \boxtimes \boxtimes \boxtimes \boxtimes \boxtimes$	Rotación 180°
R^3	$\boxtimes \boxtimes \boxtimes \boxtimes \boxtimes \boxtimes \boxtimes \boxtimes \boxtimes \boxtimes \boxtimes \boxtimes \boxtimes \boxtimes \boxtimes \boxtimes$	Rotación 270°
C	$\boxtimes \boxtimes \boxtimes \boxtimes \boxtimes \boxtimes \boxtimes \boxtimes \boxtimes \boxtimes \boxtimes \boxtimes \boxtimes \boxtimes \boxtimes \boxtimes$	Reflexión EV
CR	$\boxtimes \boxtimes \boxtimes \boxtimes \boxtimes \boxtimes \boxtimes \boxtimes \boxtimes \boxtimes \boxtimes \boxtimes \boxtimes \boxtimes \boxtimes \boxtimes$	Reflexión DA
CR^2	$\boxtimes \boxtimes \boxtimes \boxtimes \boxtimes \boxtimes \boxtimes \boxtimes \boxtimes \boxtimes \boxtimes \boxtimes \boxtimes \boxtimes \boxtimes \boxtimes$	Reflexión EH
CR^3	$\boxtimes \boxtimes \boxtimes \boxtimes \boxtimes \boxtimes \boxtimes \boxtimes \boxtimes \boxtimes \boxtimes \boxtimes \boxtimes \boxtimes \boxtimes \boxtimes$	Reflexión DD
N	$\times \times \times \times \times \times \times \times \times \times \times \times \times \times \times \times$	Complemento
NR	$\times \times \times \times \times \times \times \times \times \times \times \times \times \times \times \times$	Rot 90°+Co
NR^2	$\times \times \times \times \times \times \times \times \times \times \times \times \times \times \times \times$	Rot 180°+Co
NR^3	$\times \times \times \times \times \times \times \times \times \times \times \times \times \times \times \times$	Rot 270°+Co
NC	$\times \times \times \times \times \times \times \times \times \times \times \times \times \times \times \times$	Ref EV+Co
NCR	$\times \times \times \times \times \times \times \times \times \times \times \times \times \times \times \times$	Ref DA+Co
NCR^2	$\times \times \times \times \times \times \times \times \times \times \times \times \times \times \times \times$	Ref EH+Co
NCR^3	$\times \times \times \times \times \times \times \times \times \times \times \times \times \times \times \times$	Ref DD+Co

En esta tabla se observa con facilidad y claridad que los automorfismos corresponden a movimientos del marco \times : la rotación R se obtiene rotando el signo 90 grados; la conversión C consiste en reflejar el signo en el eje vertical; la negación N resulta de complementar el signo, abriendo los cuadrantes cerrados y cerrando los abiertos. El marco \times puede verse como un “cuadrado binario”, pues sus lados pueden alternar entre abiertos y cerrados. De esta manera se refleja el hecho, indicado en el apartado 1.3, de que los automorfismos corresponden a los movimientos rígidos de un cuadrado binario.

Esta notación, diseñada e introducida por Peirce, tiene todas las características que pueden derivarse de la teoría general del mismo Peirce para poder llamarse una notación icónica. Es una notación completa, los signos para los 16 conectivos se construyen de manera homogénea. Respecto a las propiedades, en primer lugar puede decirse que cada signo es la tabla de verdad del conectivo y que, a la vez, es el diagrama de Venn de la operación correspondiente. En segundo lugar, la notación refleja propiedades individuales de los conectivos permitiendo contrastar unos con otros: por ejemplo, un conectivo es conmutativo si y solo si su signo tiene simetría derecha–izquierda. En tercer lugar, la notación de Peirce refleja las propiedades globales del sistema de conectivos pues las simetrías observadas en un principio en la tabla de conectivos (por ejemplo: intercambiar V y F en toda la tabla equivale a una reflexión en el eje vertical; los bloques

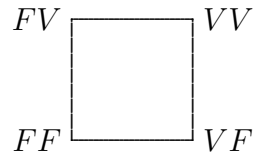
$$\begin{array}{c} \boxtimes, \boxtimes, \boxtimes, \boxtimes \\ \boxtimes, \boxtimes, \boxtimes, \boxtimes \\ \boxtimes, \boxtimes, \boxtimes, \boxtimes \end{array}$$

son todos invariantes bajo rotaciones de 180 grados) vuelven a observarse, inalteradas, en la lista de los 16 signos, lo cual se debe a que los automorfismos lógicos de los conectivos corresponden a movimientos rígidos de los signos.

3.3 La notación de Zellweger

Una notación similar a la de Peirce fue propuesta por Shea Zellweger quien desde 1953 la desarrolló de manera intuitiva y la formalizó en 1961–1962; después (1977) se unió a este proyecto Glenn Clark. La notación fue patentada en Estados Unidos, Canadá y Japón, el resultado final de dicho proyecto fue publicado en 1993 en el importante artículo [2] (véase también [26]).

Este sistema de notación se fundamenta en un cuadrado binario, donde a cada vértice se asigna una combinación de valores de verdad así: VV al vértice superior derecho, VF al vértice inferior derecho, FV al vértice superior izquierdo y FF al vértice inferior izquierdo (compárese con el apartado 1.3). El diagrama siguiente muestra estas asignaciones de manera explícita.



Cuando en un conectivo alguna de las combinaciones de valores de verdad es *verdadera*, el vértice correspondiente es demarcado con un punto grueso dando lugar a 16 posibles casos. Esta notación se redujo a una forma cursiva denominada *alfabeto lógico*, dado que 12 de los símbolos corresponden a letras del abecedario, los restantes son variaciones de las letras **c**, **h**, **y**. Las terminaciones o soportes de cada uno de estas letras están dadas por la demarcación de los vértices en el cuadrado y por ende la veracidad en la combinación de valores de verdad. Por ejemplo la letra **o** no tiene soportes luego representa el conectivo (1) con valores de verdad ($FFFF$); la letra **y** tiene tres soportes (arriba izquierda, arriba derecha y abajo derecha) y corresponde al conectivo (15) con valores de verdad ($VVVV$). La tabla siguiente muestra los 16 conectivos binarios seguidos de la nueva notación en el cuadrado y por último el alfabeto lógico.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
VV	F	F	F	F	V	V	V	V	F	F	F	F	V	V	V	V
VF	F	F	F	V	F	V	F	F	V	V	F	V	F	V	V	V
FV	F	F	V	F	F	F	V	F	V	F	V	V	V	F	V	V
FF	F	V	F	F	F	F	F	V	F	V	V	V	V	V	F	V
	\square	\square	\square	\square	\square	\square	\square	\square	\square	\square	\square	\square	\square	\square	\square	\square
	\circ	ρ	β	q	d	c	u	s	z	n	\circ	h	μ	d	y	x

Al estudiar la notación de Shea Zellweger presentada en esta tabla, se puede decir que comparte con la notación de Peirce los distintivos de simetría e iconicidad. Una ventaja evidente de esta notación sobre la que se ha presentado en este artículo consiste en que aquí los signos tienen *nombres*. Al igual que la de Peirce, la notación de Zellweger no es muy conocida y su potencial pleno aún no ha sido explotado.

Bibliografía

- [1] Xavier Caicedo, *Elementos de Lógica y Calculabilidad*. Una Empresa Docente, Bogotá, 1990.
- [2] Glenn Clark and Shea Zellweger, *Let the mirrors do the thinking*. Mount Union Magazine **93** (1993) 2–5.
- [3] Glenn Clark, *New light on Peirce’s iconic notation for the sixteen binary connectives*. In: Nathan Houser, Don D. Roberts and James Van Evra (Eds.), *Studies in the Logic of Charles Sanders Peirce*, 304–333. Indiana University Press, Bloomington and Indianapolis, 1997.
- [4] Irving Copi y Carl Cohen, *Introducción a la Lógica*. Limusa, México, 1997.
- [5] Gérard Deledalle, *Leer a Peirce Hoy*. Gedisa, Barcelona, 1996.

- [6] Max Fisch, *Peirce, Semeiotic, and Pragmatism*. Kenneth L. Ketner and Christian J. W. Kloesel (Eds.). Indiana University Press, Bloomington, 1986.
- [7] John B. Fraleigh, *A First Course in Abstract Algebra*. Addison-Wesley, Reading (Massachusetts), 1982.
- [8] Mireya García y Jhon Fredy Gómez, *Notación de Peirce para los Conectivos Binarios*. Tesis (Matemáticas). Universidad del Tolima, Ibagué, 2002.
- [9] James J. Liszka, *El significado y las tres condiciones esenciales del signo*. Analogía Filosófica **XII** (1998) 145–157.
- [10] John Maxfield and Margaret Maxfield. *Abstract Algebra and Solution by Radicals*. Dover, New York, 1971.
- [11] Arnold Oostra, *Acercamiento lógico a Peirce*. Boletín de Matemáticas - Nueva Serie **VII** (2000) 60–77.
- [12] Arnold Oostra, *Los diagramas de la matemática y la matemática de los diagramas*. Boletín de Matemáticas - Nueva Serie **VIII** (2001) 1–7.
- [13] Charles S. Peirce, *On the algebra of logic: a contribution to the philosophy of notation*. American Journal of Mathematics **7** (1885) 180–202. Reimpreso en *Collected Papers of Charles Sanders Peirce* **3** §359–403 y en *Writings of Charles S. Peirce: A Chronological Edition* **5** 162–190.
- [14] Charles S. Peirce, *Collected Papers of Charles Sanders Peirce*. Charles Hartshorne and Paul Weiss (Eds.), vols. 1–6. Harvard University Press, 1931–1934.
- [15] Charles S. Peirce, *Writings of Charles S. Peirce: A Chronological Edition*. Max H. Fisch, Edward C. Moore, *et al.* (Eds.). Indiana University Press, Bloomington, 1982–.

- [16] Alvaro Pinzón, *Conjuntos y Estructuras*. Harla, México, 1980.
- [17] Mariluz Restrepo, *La semiótica de Charles S. Peirce*. Signo y Pensamiento **16** (1990) 27–46.
- [18] Pierre Thibaud, *La Lógica de Charles Sanders Peirce: del álgebra a los gráficos*. Paraninfo, Madrid, 1982.
- [19] Guido Vallejos, *Peirce: pragmatismo, semiótica y realismo*. Cinta de Moebio **5** (1999).
- [20] Hermann Weyl, *Simetría*. McGraw-Hill, Madrid, 1991.
- [21] Fernando Zalamea, *Una jabalina lanzada hacia el futuro: anticipos y aportes de C. S. Peirce a la lógica matemática del siglo XX*. Mathesis **9** (1993) 391–404.
- [22] Fernando Zalamea, *Lógica Topológica: una introducción a los Gráficos Existenciales de Peirce*. XIV Coloquio Distrital de Matemáticas y Estadística. Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, 1997.
- [23] Shea Zellweger, *Peirce, iconicity, and the geometry of logic*. In: Myrdene Anderson and Floyd Merrell (Eds.), *On Semiotic Modeling*, 483–507. Mouton de Gruyter, New York, 1991.
- [24] Shea Zellweger, *Cognitive frames, cognitive overload, and mind-held diagrams in logic*. In: John Deeley and Terry Prewitt (Eds.), *Semiotics 1991*, 35–45. University Press of America, New York, 1993.
- [25] Shea Zellweger, *On a deep correspondence between sign-creation in logic and symmetry in crystallography*. In: Irmengard Rauch and Gerald F. Carr (Eds.), *Semiotics around the World: Synthesis in Diversity*, 821–824. Mouton de Gruyter, New York, 1997.

- [26] Shea Zellweger, *Untapped potential in Peirce's iconic notation for the sixteen binary connectives*. In: Nathan Houser, Don D. Roberts and James Van Evra (Eds.), *Studies in the Logic of Charles Sanders Peirce*, 334–386. Indiana University Press, Bloomington and Indianapolis, 1997.
- [27] J. Jay Zeman, *The Graphical Logic of C. S. Peirce*. Ph. D. dissertation. University of Chicago, Chicago, 1964.
- [28] J. Jay Zeman, *Peirce's theory of signs*. In: Thomas A. Sebeok, *A Perfusion of Signs*, 22–39. Indiana University Press, Bloomington, 1977.

Algunos sitios recomendados en Internet

Además de información adicional sobre los conectivos binarios y los estudios peirceanos en general, en los sitios siguientes están disponibles los documentos de la bibliografía indicados en cada caso.

http://www.Logic-Alphabet.net/	[2]
http://www.unav.es/gep/	[9, 11, 12, 19]
http://www.cspeirce.com/	[27, 28]
http://www.iupui.edu/_peirce/	

Arnold Oostra
 Departamento de Matemáticas y Estadística
 Universidad del Tolima
 AA 546
 Ibagué, COLOMBIA
oostra@bunde.tolinet.com.co