II Jornada del Grupo de Estudios Peirceanos
La lógica de Peirce y el mundo hispánico
10 de octubre de 2003
Pamplona (ESPAÑA)

Peirce y los diagramas

Arnold Oostra

Departamento de Matemáticas y Estadística
Universidad del Tolima
Ibagué (COLOMBIA)
2003

Contenido

I am none the less a mathematical logician for that.

The Logic of Relatives (1897)

Then, *exact* logic will be that doctrine of the conditions of establishment of stable belief which rests upon perfectly undoubted observations and upon mathematical, that is, upon *diagrammatical*, or, *iconic*, thought.

The Regenerated Logic (1896)

Come on, my Reader, and let us construct a diagram to illustrate the general course of thought.

Prolegomena to an Apology for Pragmaticism (1906)

Introducción

Los diagramas ocupan un lugar muy importante, aunque poco reconocido, en toda actividad matemática. Por otra parte, el vocablo *diagrama* y sus derivados son palabras clave en los escritos de Charles S. Peirce. Las páginas que siguen, enmarcadas en un primer esfuerzo por estudiar la confluencia de estos dos lugares, contienen una revisión de las referencias a los diagramas en *Collected Papers of Charles Sanders Peirce* [13] y una síntesis de investigaciones recientes sobre un sistema de diagramas muy significativo propuesto por el mismo Peirce.

En el primer capítulo se desglosa la presencia de los diagramas en el legado peirceano: los diagramas particulares o concretos; las expresiones acerca del papel de los diagramas en general o en abstracto; la cristalización de esas ideas en los gráficos existenciales. El segundo capítulo es una revisión breve de lo que Peirce dice acerca del concepto de diagrama. En el tercer capítulo se presenta la notación introducida por Peirce hacia 1902 para los conectivos proposicionales binarios y se muestra, en tres niveles de representación, su carácter icónico o diagramático.

Capítulo 1

La ubicuidad de los diagramas en el legado de Peirce

1.1 Un espectro de diagramas

No es exagerado afirmar que los diagramas abundan en los escritos de Charles S. Peirce.

Las ediciones parciales más conocidas de la obra de Peirce —*Collected Papers* [13] y *Writings* [15]— exhiben numerosos gráficos y tablas en muchas de sus páginas — vale la pena destacar, como ejemplos notables, los diagramas en CP 4.113 y CP 4.143 (*The Logic of Quantity*, 1893) y en CP 4.258 y CP 4.321 (*The Simplest Mathematics*, 1902). Por otro lado, algunos de sus artículos más destacados como *How to Make Our Ideas Clear* (CP 5.388–410, 1878), *A Guess at the Riddle* (CP 1.354–416, 1890) y *What Is a Sign?* (1894) contienen figuras que aclaran —o forman parte de— el texto. Y varias de sus ideas brillantes como la preciosa proyección quincuncial (W 4.68–71) y los circuitos eléctricos lógicos (W 5.421–423) fueron expresadas por Peirce, en esencia, mediante diagramas.

En algunos pasajes, el diagrama propuesto por Peirce deja de ser una simple aclaración del texto para convertirse en la clave única para la comprensión del mismo. Es lo que sucede, por ejemplo, con la clasificación de los signos mediante tricotomías (CP 2.227–265, hacia 1897) en la que aparecen *diez* clases de signos. La justificación para ese número es inmediata al observar la tabla triangular adjunta (CP 2.264) — nótese que diez es el tercer número *triangular* no trivial.

Peirce estudió a fondo algunos diagramas y sistemas de diagramas. En CP 2.455–460 y en CP 2.792–807 hay un análisis detallado del *cuadrado de oposición* de la lógica aristotélica —Peirce lo llama *diagrama de Apuleyo*—, estudio que incluye versiones alternativas del cuadrado, tablas de las figuras y una nueva tabla algebraica con todos los modos del silogismo aristotélico. Por otra parte, en CP 4.347–371 se encuentra un impresionante estudio de los diagramas de Euler-Venn: para comenzar hay una descripción detallada y bien documentada del desarrollo histórico del sistema y de otros sistemas diagramáticos similares; luego Peirce presenta un conjunto de reglas de transformación para los diagramas de Euler; a continuación, muestra deducciones de los silogismos aristotélicos mediante estos diagramas. El tratado desemboca en una frase muy promisoria:

> El valor del sistema es, por lo tanto, considerable. Su defecto fatal parece ser que no tiene fuerza vital de crecimiento allende el punto al cual ha sido traído. Pero esta apariencia quizás es solo el reflejo de la estupidez propia de quien escribe esto.

De hecho, Peirce mismo también desarrolló sistemas de diagramas: varias notaciones para los conectivos proposicionales binarios (véase el capítulo 3 de esta monografía) y los gráficos existenciales, un sistema lógico gráfico sin parangón que Peirce llamó su *chef-d'œvre* y que con toda seguridad tiene mucha "fuerza vital de crecimiento" (véase la sección 1.3).

En ocasiones repetidas, Peirce atribuyó el pensamiento creativo y el pensamiento deductivo —incluso todo pensamiento— a la manipulación mental de diagramas (véase la sección 1.2). En su caso personal, afirmó que él mismo *pensaba* en diagramas visuales y no en palabras. Peirce sabía que diversas funciones mentales se localizan en hemisferios específicos del cerebro, pues llegó a relacionar su preferencia por los esquemas visuales con el hecho de ser zurdo [7].

Los diagramas no solo abundan dentro del legado de C. S. Peirce, también desde afuera se han elaborado esquemas y figuras con el fin de presentar y clarificar sus ideas fundamentales. Por ejemplo, en varias ocasiones la obra del pensador ha sido comparada con un edificio, en especial con una catedral. F. Zalamea en [22] va un poco más lejos en el detalle de esta comparación.

> El sistema arquitectónico peirceano se encuentra recorrido por cinco armazones fundamentales que se imbrican constantemente y sostienen el edificio: un deslinde fenomenológico de *tres categorías generales*, que recorren todo el ámbito de la experiencia y del conocimiento; una plena expresión modal de la *máxima pragmática*, que liga el conocimiento de lo dado con sus consecuencias prácticas observables en todos los contextos concebibles de interpretación; una construcción recursiva de una *lógica o semiótica universal*, que permite manejar signos arbitrarios, tanto en su generalidad como en sus diversas subdeterminaciones dinámicas; una *doble "adjunción"* entre indeterminación y determinación, y entre generalidad y vaguedad, que dinamiza coherentemente un realismo evolutivo; una *clasificación triádica de las ciencias*, que organiza en forma natural el saber, según las tres categorías generales peirceanas, y que otorga herramientas de control para el estudio de las fronteras entre disciplinas. Las tres categorías generales pueden verse como los pilares estructurales del sistema peirceano, la máxima pragmática como los arbotantes, la semiótica universal como los botareles, la doble adjunción como el diseño de extensión y altura, la clasificación triádica como la crucería.

En varios de sus trabajos el mismo Zalamea ha propuesto representaciones gráficas para tres de estas ideas fundamentales en el legado de Peirce. Sin entrar aquí en la discusión de las ideas mismas (para ello véase, por ejemplo, [7, 8, 16, 21, 22, 23, 27]), a continuación se presentan versiones de estos esquemas. El diagrama 1.1, tomado de [21], representa la máxima pragmática —pragmaticista— de C. S. Peirce.

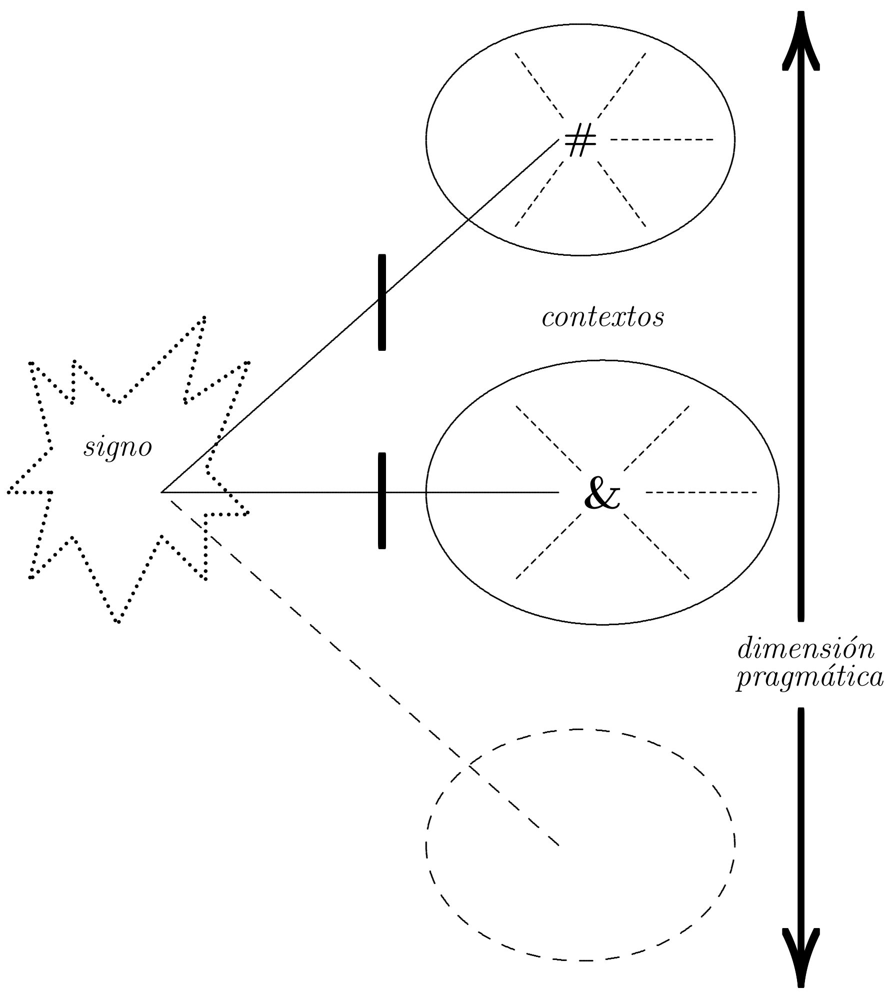


Diagrama 1.1: La máxima pragmática.

El signo en Peirce es una relación triádica, ilustrada en el diagrama 1.2 tomado de [22].

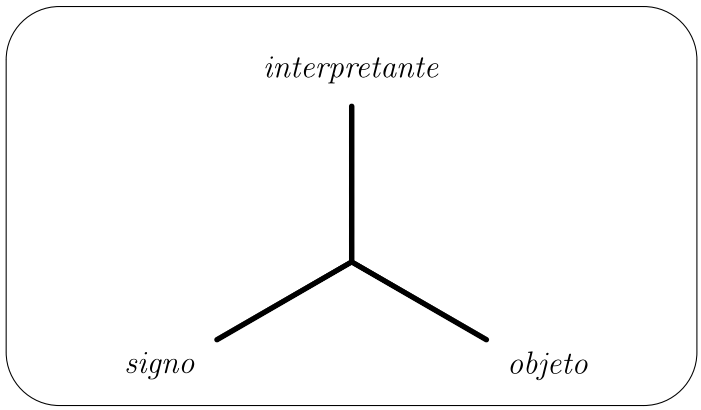


Diagrama 1.2: El signo

El diagrama 1.3, tomado de [21], representa "la división más fundamental de los signos" (CP 2.275).

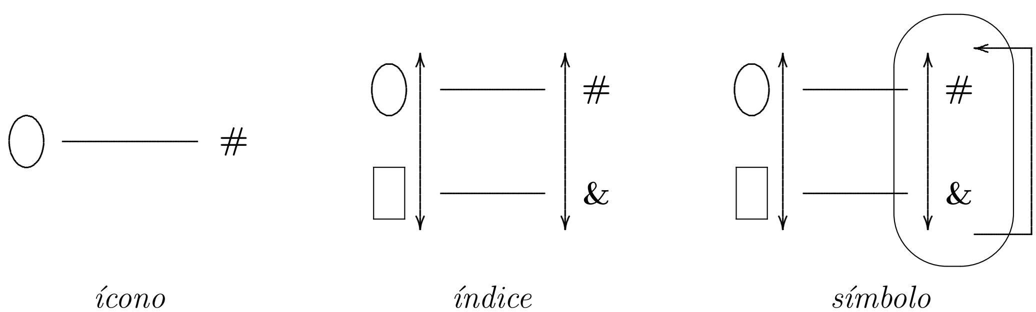


Diagrama 1.3: Primera clasificación de los signos por Peirce.

El diagrama 1.4 (página 6) es una adaptación de varias ilustraciones que aparecen en [23] e ilustra la adjunción entre lo indeterminado y lo determinado.

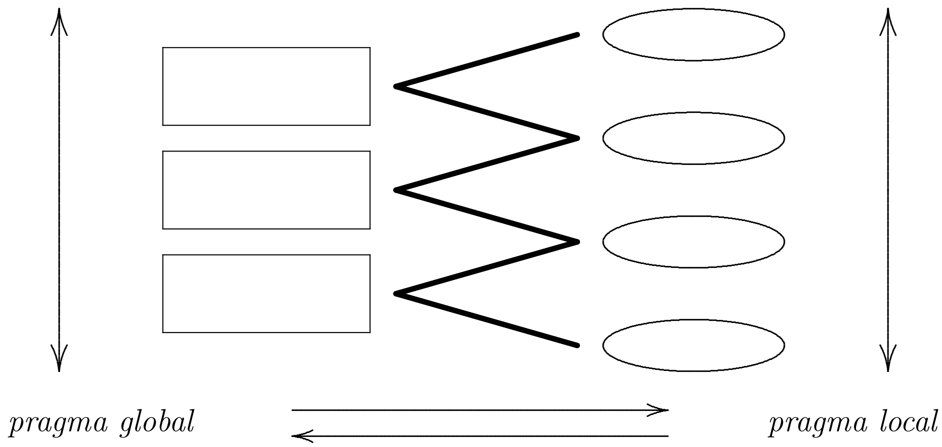


Diagrama 1.4: Doble adjunción.

El siguiente es un precioso pasaje —aún inédito— acerca de la clasificación de las ciencias (citado en [7]).

> La clasificación de las ciencias es un esquema similar a una escalera de mano en la cual cada peldaño es a su vez una escalera de peldaños, de manera que el todo se asemeja más bien a una sucesión de olas, cada una de las cuales lleva otras olas, y así sucesivamente, hasta que deberíamos llegar a investigaciones individuales.

B. Kent en [7] sugiere que Peirce pensaba en un diagrama tridimensional. Otra interpretación posible es el fractal presentado en el diagrama 1.5 (página 7), donde cada peldaño es una escalera 'igual' a la original. La matemática enseña que el límite, mostrado a la derecha en este diagrama, es una recta vertical compuesta de puntos —las "investigaciones individuales"— pero *continua* en el sentido que Peirce da a esa palabra en CP 3.256 (*On the Logic of Number*, 1881): cada punto mayor que otro también es mayor que algún punto intermedio, mayor que aquel otro.

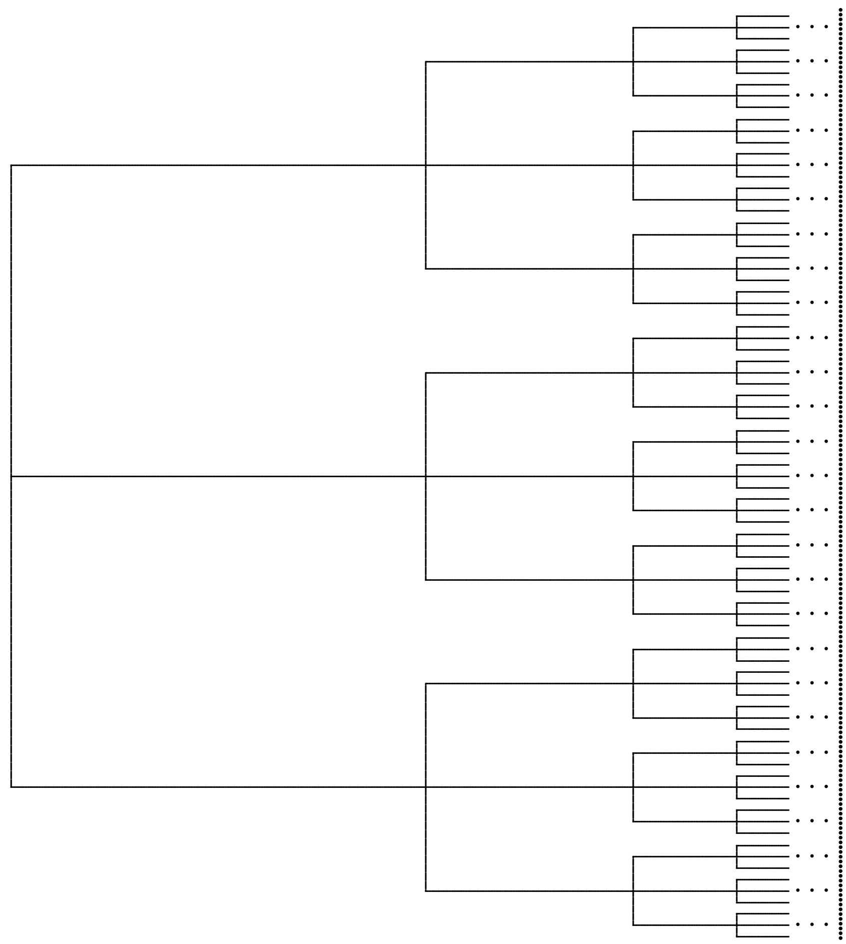


Diagrama 1.5: La clasificación de las ciencias.

1.2 Los diagramas en el razonamiento

Además de presentar una multitud de diagramas individuales y de estudiar sistemas diagramáticos, muchos pasajes en el legado de Peirce se refieren a los diagramas en general o a conceptos derivados. De lejos, la mayor cantidad de tales parágrafos en *Collected Papers* aluden al papel de los diagramas en el pensamiento o razonamiento.

En primer lugar, los diagramas juegan un papel importante en el razonamiento *matemático*. Según Peirce, en la actividad matemática intervienen diagramas mentales complejos, de hecho cada método de formación de diagramas lo denomina un *álgebra*, véase CP 3.406 y CP 3.418 (*The Critic of Arguments*, 1892). Más aún, el pensamiento matemático se *caracteriza* por ser diagramático (CP 3.515) al punto de que "la lógica exacta (...) se apoya en observaciones perfectamente indudables y en el pensamiento matemático, esto es, [pensamiento] diagramático o icónico" (CP 3.429). Peirce se declara acorde con Friedrich Albert Lange en que la verdad matemática se deriva de la observación de imágenes visuales, posiblemente colocadas en el papel como diagramas (CP 2.77, CP 2.782).

Peirce también cita a Kant sobre este tema (CP 3.556, CP 3.560), afirmando que el alemán desecha la defineción de matemática como la ciencia de la cantidad mientras asevera que lo distintivo de la matemática es su método, "que consiste en estudiar construcciones o diagramas". Estos diagramas incluyen, según Peirce, los caracteres algebraicos luego podrían abarcar toda la simbología matemática. Peirce describe el método de pensamiento matemático como sigue (CP 1.54, véase también CP 3.560 y CP 2.215).

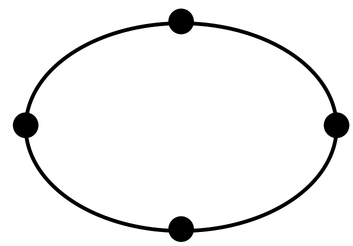
> Pues el razonamiento matemático consiste en construir un diagrama de acuerdo con un precepto general, en observar ciertas relaciones entre partes de ese diagrama —[relaciones] que no están requeridas de manera explícita por el precepto—, en mostrar que estas relaciones valdrán para todos los diagramas tales, y en formular esta conclusión en términos generales. Todo razonamiento necesario válido es entonces, de hecho, diagramático.

En CP 5.148 (*Lectures on Pragmatism*, 1903) Peirce muestra como ejemplo la prueba propuesta por Legendre de que los ángulos que forma una recta incidente sobre otra —a un mismo lado de esta última— suman dos rectos. Sin embargo tiene el cuidado de indicar que el carácter diagramático no es exclusivo de la geometría: "Ahora, el razonamiento matemático es diagramático. Esto es cierto tanto del álgebra como de la geometría".

Más adelante en las mismas *Lectures on Pragmatism* (CP 5.162) se encuentra una indicación de la dificultad más grande del pensamiento diagramático —según Peirce, del pensamiento matemático—: formar un "plan de investigación" de tal manera que las conclusiones correctas obtenidas sean también la respuesta al problema planteado en un principio. En la práctica matemática sucede con alguna frecuencia que se obtienen una cantidad de resultados válidos que no corresponden al objetivo esperado. Con la frase "...dar cuenta de esta operación de planear una demostración matemática, haría un gran estudio para toda una vida" y las frases que siguen a ésta, Peirce anticipa la esencia de la *teoría de la prueba* desarrollada por la lógica matemática del siglo XX.

En segundo lugar, los diagramas caracterizan el razonamiento *deductivo*, considerado por Peirce un poco más general que el matemático. El pensador clasifica los razonamientos o argumentos en tres tipos fundamentales, a saber: la deducción, la inducción y la abducción o retroducción (véase CP 1.65, CP 2.96, CP 2.266). En CP 1.66 se encuentra la siguiente descripción precisa del argumento deductivo.

> *Deducción* es aquel modo de razonamiento que examina el estado de cosas afirmadas en las premisas, forma un diagrama de ese estado de cosas, percibe en las partes de ese diagrama relaciones no mencionadas explícitamente en las premisas, se satisface a sí mismo mediante experimentos mentales sobre el diagrama de que estas relaciones siempre subsistirían —o al menos lo harían en cierta proporción de los casos— y concluye su verdad necesaria o probable. Por ejemplo, sea la premisa que hay cuatro puntos marcados sobre una línea que no tiene extremo ni ramificación. Entonces, por medio de un diagrama, podemos concluir que hay

> dos pares de puntos tales que al pasar a lo largo de la línea de
>
> 
>
> cualquier manera desde un punto al otro de un par arbitrario, se pasará un número impar de veces por un punto del segundo par mientras por el otro se pasará un número par (o nulo) de veces. Esto es *deducción*.

Véase también CP 2.96 —donde Peirce da a la deducción el nombre de *argumento obsistente* y dice que todas las demostraciones de Euclides son de esta clase—, la explicación más detallada en CP 2.778 y la referencia en CP 8.209 (*Letter to Signor Calderoni*, 1905). La descripción de una *prueba regular* en CP 2.601 también corresponde con exactitud a la de razonamiento deductivo.

En CP 2.267, después de haber indicado una clasificación de los signos y repetir la ya indicada clasificación triádica de los argumentos, Peirce clasifica las deducciones en *necesarias* y *probables* — las primeras son aquellas que "profesan que de premisas verdaderas ellas deben producir invariablemente conclusiones verdaderas. Una deducción necesaria es un método para producir símbolos dicentes por el estudio de un diagrama." A continuación el pensador clasifica las deducciones necesarias en *corolariales* y *teoremáticas*: en las primeras basta observar el diagrama elaboraado de las premisas para obtener la conclusión; en las segundas se realiza un experimento ingenioso sobre el diagrama —o, como se expresa en CP 4.233, es preciso *hacer* algo— para observar la veracidad de la conclusión en el diagrama modificado. Según CP 2.782 y el ya citado CP 4.233, las pruebas y el razonamiento matemáticos corresponden a deducciones necesarias, o más propiamente, a deducciones necesarias teoremáticas.

En tercer lugar, Peirce destaca la importancia de los diagramas en el razonamiento *lógico*, claramente más general que los anteriores. En CP 4.544 (*Prolegomena of an Apology for Pragmaticism*, 1906) afirma que "...los diagramas son indispensables en toda la matemática, de la aritmética corriente en adelante, y en lógica casi lo son". En CP 2.599 se definen las *formas de la lógica* como "representaciones diagramáticas de la relación intelectual entre los hechos a partir de los cuales [se] razona y el hecho que [se] infiere. Este diagrama necesariamente emplea un sistema particular de símbolos — una clase perfectamente regular y muy limitada de lenguaje."

En cuarto y postrer lugar, las citas siguientes ponen de presente que Peirce reconoce el papel de los diagramas en *todo* razonamiento.

> Los principios directores son de dos clases: aquellos cuya pretensión es llevar siempre a la verdad a menos [que partan] de lo falso, y nunca extraviar; y aquellos que solo profesan llevar a la verdad a largo plazo. (...) Por lo pronto, podemos llamarlos razonamiento imaginativo y experiencial, o razonamiento por diagramas y razonamiento por experimentos.

CP 4.74 (1893)

> Recuérdese que es solo por íconos que realmente razonamos, y [las] afirmaciones abstractas carecen de valor a menos que nos ayuden a construir diagramas.

CP 4.127 (1893)

Un concepto es la influencia viviente sobre nosotros de un *diagrama*, o *ícono*, con cuyas múltiples partes están conectadas en el pensamiento un número igual de sentimientos o ideas.

CP 7.467 (1898)

Kant sostiene que todas las concepciones metafísicas generales aplicables a la experiencia pueden ser representadas como en un diagrama, por medio de la imagen del tiempo. A tales diagramas los llama “esquemas”.

CP 2.385 (1903)

Mi idea particular, sin duda deformada por la especialización, es la siguiente. Razonar es estrictamente experimentar. Euclides, habiendo construido un diagrama de acuerdo con el precepto, traza una línea adicional, luego de lo cual el ojo de su mente observa relaciones nuevas que no estaban entre las prescritas y que son por lo menos tan sorprendentes como metales nuevos o nuevas estrellas.

CP 6.568 (1905)

El razonamiento diagramático es el único razonamiento realmente fecundo.

CP 4.571 (*Prolegomena to an Apology for Pragmaticism*, 1906)

Todo pensamiento tiene forma dialógica. (...) En consecuencia, todo pensamiento se realiza en signos que principalmente tienen la misma estructura general que las palabras; los que no lo son, tienen la naturaleza de aquellos signos de los que necesitamos de vez en cuando para cubrir los defectos de las palabras

> o *símbolos.* Estos signos de pensamiento no simbólicos son de dos clases: primero, dibujos o diagramas u otras imágenes (yo las llamo *íconos*) tales como los que se deben usar para explicar los significados de palabras; y en segundo lugar, signos más o menos análogos a síntomas (yo los llamo *índices*) de los cuales son ejemplo las observaciones colaterales por las que sabemos de qué está hablando una persona. Los íconos ilustran principalmente los significados de pensamientos–predicado, los índices las denotaciones de los pensamientos–sujeto. La sustancia de los pensamientos consiste en estas tres especies de ingredientes.

CP 6.338 (1909)

De esta manera, para Peirce el pensamiento diagramático juega un papel esencial en el razonamiento matemático, el deductivo, el lógico y aun en el razonamiento en general. Lo que caracteriza el pensamiento diagramático es su método: de la situación problema se elabora un diagrama; se opera sobre el diagrama; se asegura la generalidad de la operación; la solución se lee del diagrama transformado.

1.3 Los gráficos existenciales como diagramas

Durante buena parte —o quizás la totalidad— de su carrera, Peirce fue un buscador incansable de sistemas de representación para la lógica. Primero, siguiendo la corriente iniciada por Boole, desarrolló una representación algebraica que arrojó magníficos frutos como la axiomatización del cálculo proposicional y la teoría de la cuantificación, que se emplean hasta hoy sin modificaciones de fondo. En varios pasajes reconoce que el álgebra “ha sido empleado con gran ventaja en el análisis de los razonamientos matemáticos”

(CP 3.619) y que ese camino es el más estudiado por los lógicos exactos. Sin embargo, Peirce es conciente de los peligros del uso del álgebra en la lógica (CP 3.619, CP 4.429) y desde la década de los 80 —del siglo XIX— inició la búsqueda de sistemas de representación gráficos o diagramáticos para su estudio. Ya en 1892 escribió que "estudios sin publicar me han mostrado que es posible un método de diagramatización mucho más poderoso que el álgebra, [método] que es extensión tanto del álgebra como del método de gráficos debido a Clifford..." (CP 3.418). En 1897 Peirce presenta su sistema de *Gráficos Entitativos* sustituido después por el de *Gráficos Existenciales*, publicado en 1903 —¡hace exactamente 100 años!—.

El objetivo de esta sección no es presentar con detalle el desarrollo histórico de los gráficos existenciales (véase por ejemplo [19]) ni entrar en detalles técnicos de los mismos (véase CP 4.394–529 y [6, 9, 17, 18, 19, 21, 24, 26]). Se trata solo de indicar su carácter diagramático y su relación con el papel de los diagramas en el pensamiento de Peirce.

Sin duda alguna, los gráficos existenciales son considerados diagramas por Peirce. En la "definición puramente matemática de los gráficos existenciales" (CP 4.414) enuncia que "el *sistema de gráficos existenciales* es una cierta clase de diagramas sobre los cuales está permitido operar ciertas transformaciones". En CP 4.564 el autor destaca un diagrama en el paso decisivo hacia los gráficos existenciales.

> El corte doble no fue tomado para este propósito [representar una proposición condicional] de manera caprichosa, sino como resultado de experimentos y razonamientos que me hicieron ver que proveía el diagrama más fiel de tal proposición. Una vez obtenida esta forma, el desarrollo lógico inevitable me trajo rápidamente al sistema de gráficos existenciales.

En CP 3.636 se representa —a manera de ejemplo— una frase mediante un diagrama, exactamente de la misma manera en que se representan relaciones triádicas en los gráficos existenciales beta.

Tanto el propósito como la utilidad de los gráficos existenciales concierne de manera directa a los diagramas y a su papel en el razonamiento. En una nota a CP 4.561 (*Prolegomena to an Apology for Pragmaticism*, 1906) Peirce indica que el propósito del sistema de gráficos existenciales es "proveer un método (1) lo más *simple* posible (es decir, con un número lo más pequeño posible de convenciones arbitrarias), para representar proposiciones (2) lo más *icónicamente* o diagramáticamente y (3) lo más *analíticamente* posible". Más adelante en *Prolegomena* (CP 4.571) el autor señala que la "verdadera utilidad" del sistema reside "en la asistencia que provee en la solución de los problemas más difíciles de la teoría lógica — el apoyo a la mente, al proporcionar diagramas concretos sobre los cuales experimentar".

En CP 4.428–430 Peirce justifica el propósito de estudiar el funcionamiento de la inferencia necesaria. Lo que desea para ello es "un método para representar de manera diagramática cualquier conjunto de premisas, siendo el diagrama tal que podamos observar la transformación de estas premisas en la conclusión mediante una serie de pasos cada uno de la máxima simplicidad posible. Lo que debemos hacer, por lo tanto, es formar un método perfectamente consistente para expresar de manera diagramática cualquier afirmación". En otras palabras, persigue un sistema de diagramas que permita efectuar el método asignado al razonamiento deductivo: que las premisas se viertan en un diagrama mediante convenciones sencillas; que sobre el diagrama se puedan operar ciertas transformaciones permitidas; que del diagrama transformado se lea la solución, siguiendo de nuevo las convenciones. Pues bien, eso es lo que logra de manera exacta con los gráficos existenciales, como puede observarse con claridad en cualquier deducción con premisas hecha en los sistemas alfa o beta. De esta manera los gráficos existenciales de Peirce proveen un diagrama —ícono— del método diagramático atribuido por el mismo Peirce al razonamiento deductivo.

En la soberbia frase inicial de *Prolegomena to an Apology for Pragmaticism* (CP 4.530) se ve que Peirce tenía plena conciencia de este papel y del alcance de sus gráficos existenciales.

> Ven, Lector mío, y construyamos un diagrama que ilustre el curso general del pensamiento; quiero decir, un Sistema de diagramatización mediante el cual se pueda representar con exactitud cualquier curso del pensamiento.

Luego el escritor describe el muy importante papel de los diagramas y las características deseables de un sistema diagramático para que pueda cumplir el propósito indicado y, a renglón seguido, introduce sus gráficos existenciales. En CP 7.103 Peirce también resalta la generalidad de este sistema el indicar que ellos "me permiten (...) acortar el trabajo e incrementar la exactitud de mi pensamiento colocando relaciones lógicas complicadas en las formas que me muestran precisamente lo que entrañan". Quizás ningún pasaje ponga de presente el papel que Peirce atribuye a sus gráficos existenciales como las frases siguientes de *An Improvement on the Gamma Graphs* de 1906 (CP 4.582).

> Así el sistema de gráficos existenciales es un diagrama burdo y generalizado de la mente, y da una idea mejor de lo que la mente es, desde el punto de vista de la lógica, que lo que pudiera expresarse mediante cualquier versión abstracta.

Capítulo 2

Sobre el concepto de diagrama según Peirce

A pesar del uso intensivo que se hace de los diagramas en la inmensa mayoría de las actividades humanas —en especial en todo tipo de comunicaciones— es muy escasa la reflexión que se hace sobre sus características esenciales, sobre su papel y sobre sus cualidades deseables — en pocas palabras, sobre la pregunta: ¿Qué es un diagrama? Con seguridad, esa negligencia se debe en buena parte al amplio espectro de objetos que se designan como diagramas, lo cual sugiere —más bien, impone— el empleo de la máxima pragmática de Peirce como metodología de trabajo si se emprendiera tal investigación. Pero ese no es el propósito de este breve capítulo, en el cual solo se pretende revisar algunas de los ideas de Peirce sobre el concepto de diagrama.

Antes de seguir sí vale la pena mencionar un esfuerzo en la dirección señalada, iniciado por E. Hammer. En su pequeño libro [6] se estudia la lógica de cinco sistemas diagramáticos —incluidos los gráficos existenciales alfa de Peirce— y "se enuncian preguntas conceptuales y filosóficas preliminares acerca de la comprensión lógica del razonar con diagramas". Entre los autores más citados por Hammer sobre estas preguntas están Barwise, Eco, Etchemendy y Shin.

Para empezar, aquí se considera la siguiente definición —matemáticamente sintética— tomada de [11].

> Un diagrama podría describirse, de manera muy amplia, como una representación plana no lingüística elaborada con el fin de aclarar un texto. Así, la presencia de un diagrama supone la existencia de algo que éste representa y de un contexto lingüístico en el cual está inserto. Esta caracterización es abierta y esencialmente vaga, pero por una parte incluye ejemplos paradigmáticos y por otra es susceptible de precisiones diversas en contextos diferentes.

Esta descripción de inmediato recuerda la conocida definición de signo que Peirce enunció en 1897: “algo que está por algo para alguien” (CP 2.228 — para una colección amplia de definiciones peirceanas del signo véase [8]). Nótese que aparecen explícitos los tres elementos básicos: signo, objeto, interpretante.

Hammer indica con acierto que “algo característico de los diagramas es que ellos de alguna manera se asemejan a lo que representan ” [6] y profundiza sobre esta característica. En consecuencia, en “la división más fundamental de los signos” (CP 2.275) en *íconos*, *índices* y *símbolos*, los diagramas deben considerarse como íconos pues se trata de signos que representan su objeto asemejándolo (CP 6.471) y que exhiben una similitud o analogía con el tema del discurso (CP 1.369). En repetidas ocasiones, Peirce cita los diagramas como ejemplos de íconos: véase, por ejemplo, CP 3.362 (*On the Algebra of Logic*, 1885), CP 4.447 (*On Existential Graphs, Euler's Diagrams, and Logical Algebra*, hacia 1903) y CP 4.531 (*Prolegomena to an Apology for Pragmaticism*, 1906). De hecho, Peirce va más lejos al emplear repetidamente como sinónimos las palabras “diagrama” e “ícono” —o bien las palabras “diagramático” e “icónico”—, véase por ejemplo CP 3.363 (*On the Algebra of Logic*, 1885), CP 1.369 (*A Guess at the Riddle*, 1890), CP 7.467 (1893), CP 7.635 (1895), CP 3.429 (1896) y CP 4.561 (Nota a *Prolegomena to an Apology for Pragmaticism*, 1906).

En un nivel siguiente de esta división inicial de los signos, Peirce llama diagramas a cierta clase de íconos. En CP 2.276 da a los signos icónicos el nombre de *hipoíconos* y en seguida (CP 2.277) los clasifica.

> De manera aproximada, los hipoíconos pueden dividirse según el modo de Primeridad del cual participan. Aquellos que participan de cualidades simples, o Primeras Primeridades, son *imágenes*; aquellos que representan las relaciones —mayormente diádicas, o consideradas diádicas— de las partes de una cosa por relaciones análogas en sus propias partes, son *diagramas*; aquellas que representan el carácter representativo de un signo (representamen) representando un paralelismo en algo diferente, son *metáforas*.

A lo largo de los años, Peirce distinguió muchas clases de signos. En su división de los signos en diez clases mediante tres tricotomías, elaborada hacia 1897 (CP 2.227–265 — véase también [16, 27]), Peirce emplea los diagramas como ejemplo en dos casos. Un diagrama individual es ejemplo de un *Sinsigno Icónico Remático* mientras un diagrama "aparte de su individualidad fáctica" —puede pensarse en *lo diagramático*— es ejemplo de un *Legisigno Icónico Remático*. En ambos casos se trata de una *rema*, un signo que para su interpretante es (signo de) posibilidad cualitativa. En efecto, de un diagrama siempre se entiende que representa un objeto posible, con tales características como las mostradas por el diagrama. Un diagrama particular es *sinsigno* en tanto tiene existencia real, actual e individual mientras lo diagramático es *legisigno* pues es un tipo general que significa en virtud de una convención.

El ya citado artículo *On Existential Graphs, Euler's Diagrams, and Logical Algebra* —redactado hacia 1903, aparece en *Collected Papers* como el capítulo 4 del libro *Existential Graphs* que a su vez lleva como subtítulo *My chef-d'œvre*— comienza con este párrafo precioso (CP 4.418).

> Un diagrama es un signo (representamen) que de manera predominante es un ícono de relaciones y al que [ciertas] convenciones ayudan a serlo. [En esto] también se usan índices, en mayor o menor medida. [El diagrama] debería realizarse sobre un sistema de representación perfectamente consistente, fundado en una idea básica simple y fácilmente inteligible.

Como caso particular, en seguida Peirce precisa un *grafo* como sigue (CP 4.419).

> Un grafo es un diagrama superficial compuesto de la hoja sobre el cual está escrito o dibujado, de manchas o sus equivalentes, de líneas de conexión y —si es necesario— de curvas cerradas.

En cambio un *diagrama lógico* lo describe Peirce así (CP 4.347).

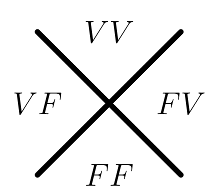
> Un diagrama compuesto de puntos, líneas, etcétera, en el cual [algunas] relaciones lógicas son significadas por relaciones espaciales, de tal manera que las consecuencias necesarias de estas relaciones lógicas son al mismo tiempo significadas o, al menos, pueden ser evidenciadas transformando el diagrama de ciertas formas permitidas por 'reglas' convencionales.

Junto con varios otros autores —Leibniz entre ellos—, Peirce no se ocupó mucho del concepto mismo de diagrama, de describir lo que un diagrama es o no es. En cambio —al igual que otros pensadores, Leibniz entre ellos— sí se tomó el trabajo de destacar con claridad meridiana la cualidad esencial del diagrama, lo que podría tomarse como la medida de su calidad: un sistema de diagramas es mejor que otro en tanto los signos reflejen mejor las características y relaciones entre los objetos representados. Peirce además acuñó un término para este rasgo, denominándolo *iconicidad*. Tan fundamental es esta característica que en muchos contextos las nociones de diagrama e ícono se confunden.

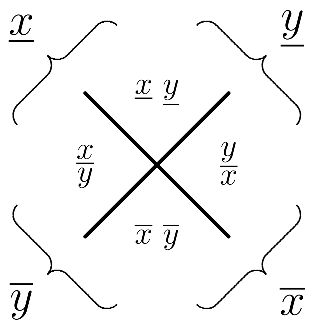
Capítulo 3

La notación icónica de Peirce para los conectivos binarios

En manuscritos de 1902 Peirce elaboró una notación para el sistema de los conectivos proposicionales binarios. La idea de Peirce es sencilla en extremo: la tabla de verdad que define un conectivo binario tiene cuatro renglones, cada uno de los cuales puede ser V o F; el símbolo $\times$ tiene cuatro cuadrantes, cada uno de los cuales puede dejarse abierto o bien cerrarse uniendo los extremos correspondientes. Se conviene cerrar los cuadrantes correspondientes a F y se adoptan los siguientes rótulos para los cuadrantes.



La idea de encerrar un espacio para indicar negación también se manifiesta en los Gráficos Existenciales de Peirce, donde un corte —una curva cerrada simple— se interpreta como la negación de su contenido (CP 4.402, véase también [21, 26]). Por otra parte, un primer argumento para justificar su elección de los cuadrantes lo presenta Peirce en el diagrama siguiente, incluido en CP 4.260. En este dibujo $\overline{x}$ denota la negación de x y $\underline{x}$ su afirmación — Peirce sustenta de manera detallada la notación $\overline{x}$ en CP 4.259 y ella se adopta en lo sucesivo en este documento.



La tabla 3.1 contiene la lista de los conectivos con sus signos respectivos. Peirce también propuso y empleó variantes cursivas de estos símbolos, justificando con solidez los cambios introducidos en un pasaje precioso excluido de *Collected Papers* pero editado en una nota al pie en NEM 3.272: en unos casos, se trata de signos más fáciles de escribir; en otros, algún antecesor respetable había introducido un símbolo más apropiado; en el caso del conectivo =, "a causa del sistema a veces daremos al signo la forma $x \infty y$".

VV	F	F	F	F	V	V	V	V	F	F	F	F	V	V	V	V
VF	F	F	F	V	F	V	F	F	V	V	F	V	F	V	V	V
FV	F	F	V	F	F	F	V	F	V	F	V	V	V	F	V	V
FF	F	V	F	F	F	F	F	V	F	V	V	V	V	V	F	V
	⊠	⊠	⊠	⊠	⊠	⊠	⊠	⋈	⧖	⊠	⊠	⊠	⋉	⋊	⊠	×
	⟐	⋏	<	>	∨	◿	◺	∞	8	◹	◸	ᛟ	∝	ꝏ	♈	×
								=	‖							

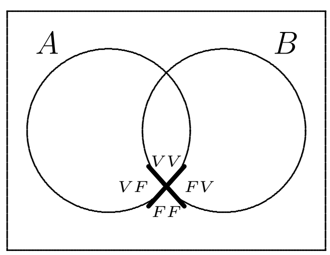
Tabla 3.1: Notación de Peirce para los conectivos binarios (1902).

En las secciones que siguen se muestra cómo la notación de Peirce refleja con fidelidad muchas propiedades de los conectivos, características que pueden clasificarse en tres *niveles de iconicidad*.

3.1 Iconicidad primera: Traducción

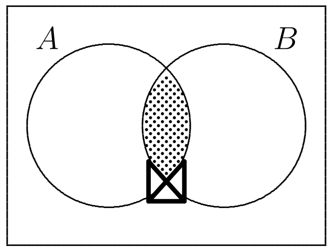
En la notación de Peirce, el signo del conectivo *es* la tabla de verdad del mismo. Para la traducción solo se requiere una convención sencilla: rotular los cuadrantes y cerrar los F. Esta traducción de signos a tablas de verdad se emplea fuertemente en el estudio de las propiedades de los conectivos (sección 3.2).

Pero en la notación de Peirce el signo del conectivo también es el diagrama de Euler-Venn de la operación conjuntista correspondiente. Si las proposiciones A y B se representan mediante circunferencias secantes, las cuatro regiones resultantes se rotulan —de manera natural— como sigue: la interior a ambas circunferencias es VV; la interior a A y exterior a B es VF; la exterior a A e interior a B es FV; la exterior a ambas es FF. Si los centros de las circunferencias están a la misma altura con el de A a la izquierda y el de B a la derecha, entonces en el punto de corte *inferior* aparece la convención para los signos propuestos por Peirce.



Cabe anotar que Peirce mismo presentó este diagrama como un segundo argumento para justificar su elección de los cuadrantes, en el documento aún inédito *A Proposed Logical Notation* escrito alrededor de 1904.

Con esta convención, la traducción al diagrama de Venn es inmediata: el signo del conectivo se coloca en la intersección *inferior* y entonces las regiones sombreadas corresponden a los cuadrantes *abiertos* del signo. Por ejemplo, el siguiente es el paso del conectivo conjunción a la operación de intersección.



Todo parece indicar que Peirce empleó esta representación diagramática para calcular la tabla de soluciones de la quinta forma tautológica (apartado 3.2.5).

Las convenciones empleadas en la construcción de los dieciséis signos y en su traducción —a las tablas de verdad y a los diagramas de Venn—, además de muy sencillas, son *universales* en el sentido de que se emplea la misma clave de manera homogénea para representar la totalidad de los conectivos.

3.2 Iconicidad segunda: Propiedades y relaciones de los conectivos

En un artículo publicado en 1880, Christine Ladd-Franklin indicó que "hay una gran ventaja en que cada símbolo tenga una forma tal que su opuesto pueda indicarse volteándolo efectivamente, como el símbolo del Sr. Peirce para la implicación" (citado en [25]). A su vez, en el pasaje editado como nota en NEM 3.272 Peirce escribe: "Debe mencionarse (...) que parte de la propuesta [de la Sra. Franklin] era que cuando la relación significada era simétrica, el signo debería tener una simetría derecha e izquierda". De esta manera, se busca que algunas propiedades del objeto —por ejemplo, el carácter conmutativo del conectivo— se reflejen en propiedades del signo —la simetría en el eje vertical—. De hecho, en la notación de Peirce muchas propiedades de los conectivos se manifiestan en los signos y muchas relaciones entre los conectivos se traducen en relaciones entre los signos.

Recuérdese que dos fórmulas proposicionales α, β son *equivalentes* si la fórmula $(\alpha \infty \beta)$ es una tautología, esto es, resulta V para cualesquier valores de verdad asignados a las proposiciones atómicas que componen a α y a β.

Siendo O un conectivo cualquiera, ¿cuál es su "opuesto"? En otras palabras, ¿cuándo la fórmula x O y es equivalente a $y \Diamond x$, siendo O y $\Diamond$ conectivos? Al intercambiar las proposiciones x e y, los valores asignados a VV y FF no cambian, mientras los asignados a VF y FV se intercambian. Así, una respuesta a la segunda pregunta es: cuando el valor asignado por O a VF es el mismo asignado por $\Diamond$ a FV, y el valor asignado por O a FV es el mismo asignado por $\Diamond$ a VF. En la notación de Peirce esto se expresa como sigue: el cuadrante izquierdo de O coincide con el derecho de $\Diamond$ y el derecho de O con el izquierdo de $\Diamond$.

Teorema. *Las expresiones x* O *y, $y \Diamond x$ son equivalentes si y solo si $\Diamond$ se obtiene de* O *por reflexión en el eje vertical.*

En particular, un conectivo O es conmutativo —esto es, x *O* y, y O x son equivalentes— si y solo si O es invariante bajo la reflexión en el eje vertical, o lo que es lo mismo, si O "tiene simetría derecha e izquierda".

De manera similar puede derivarse la siguiente generalización de las conocidas identidades de De Morgan. Aquí *complementación* indica abrir los cuadrantes cerrados y cerrar los abiertos.

Teorema. *Las expresiones $\overline{x \text{ O } y}$, $\overline{x} \Diamond \overline{y}$ son equivalentes si y solo si $\Diamond$ se obtiene de* O *por rotación de 180 grados y complementación.*

Aunque el argumento es un poco más elaborado, también puede probarse de esta manera —diagramática— que ⅄ y ☊ son los únicos conectivos binarios *completos* en el sentido de que todo conectivo puede expresarse como combinación de cualquiera de ellos (véase [5]).

La búsqueda de tautologías

El objetivo primordial perseguido por Peirce al introducir los signos para los conectivos fue la búsqueda sistemática de tautologías, indagación en la cual las características de los signos juegan un papel decisivo. El procedimiento empleado por Peirce al buscar tautologías es el siguiente. Inicialmente escogía una *forma*, una expresión de lógica proposicional en la cual no solo las proposiciones sino también los conectivos son incógnitas; luego, empleando propiedades de su notación, establecía todas —o muchas de— las *sustituciones* de los conectivos que hicieran una tautología de la forma.

Además de sus variantes, las formas estudiadas por Peirce son las siguientes [2].

$$x \mathrm{~O~} x$$

$$x \mathbin{\Diamond} (x \mathrm{~O~} x)$$

$$(x \mathbin{\Diamond} x) \mathrm{~O~} (x \mathbin{\heartsuit} x)$$

$$(x \mathbin{\Diamond} y) \mathrm{~O~} (x \mathbin{\heartsuit} y)$$

$$(x \mathbin{\spadesuit} y) \mathbin{\heartsuit} [(y \mathbin{\clubsuit} z) \mathbin{\Diamond} (x \mathrm{~O~} z)]$$

Aquí O, $\Diamond$, $\heartsuit$, $\spadesuit$ y $\clubsuit$ son *variables* y en cada forma se buscan los conectivos tales que la expresión es verdadera para *cualesquier* proposiciones x, y, z. Nótese que cada forma establece una relación —binaria, ternaria, . . . — entre los conectivos.

En el análisis de estas formas Peirce consignó sus soluciones en tres tablas que —aun bajo una mirada muy superficial— presentan una simetría muy notable, simetría debida a los signos empleados. A continuación se presenta de manera sucinta el estudio de las cinco formas.

3.2.1 Primera Forma

La expresión x O x corresponde a un conectivo de aridad 1 luego tiene solo cuatro opciones: constante V (tautología), constante F, x, $\overline{x}$. Para obtener el primero se requiere que el conectivo O asigne V a las parejas VV, FF —las únicas que pueden intervenir—, lo cual en la notación de Peirce equivale a que los cuadrantes superior e inferior estén abiertos. Así, los conectivos O que hacen de esta expresión una tautología son ∞, $\propto$, $\backpropto$, $\times$. De igual manera se analizan los otros tres valores posibles de x O x, forma que induce una *clasificación* de los conectivos binarios mostrada por Peirce en la tabla 3.2 (tomada de [2]).

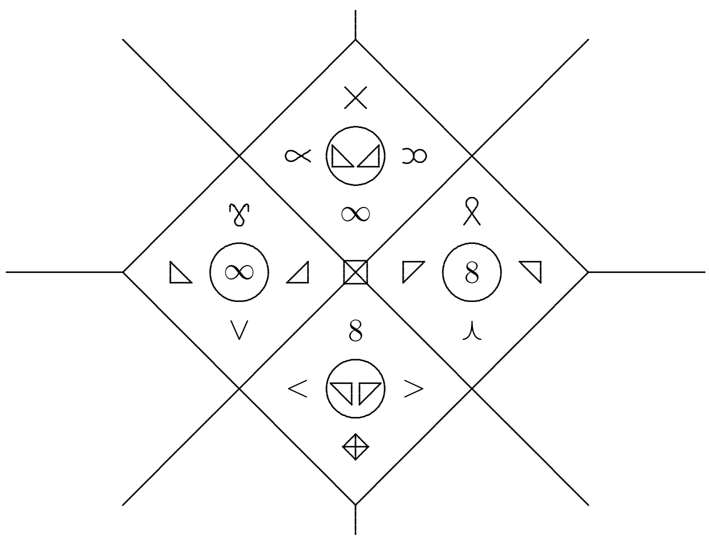


Tabla 3.2: Estudio por Peirce de la forma x O x

Una versión de la tabla 3.2 aparece en CP 4.268, pero por desgracia los editores en vez de reproducir los signos introducidos por Peirce los sustituyeron por "un simbolismo más convencional". En CP 4.270 Peirce rotula las cuatro clases con las letras $\mathcal{N}$, $\mathcal{E}$, $\mathcal{W}$, $\mathcal{S}$. Si O $\in \mathcal{N}$ entonces x O x es una tautología; si O $\in \mathcal{E}$, la forma equivale a $\overline{x}$; si O $\in \mathcal{W}$ entonces x O x es x; y si O $\in \mathcal{S}$, es siempre F. La ubicación de las cuatro clases en una gran

$\times$ es coherente con la convención para cada signo: en el cuadrante superior siempre V, en el inferior siempre F, etcétera. A su vez, la asignación de letras a las clases es coherente con la orientación usual de los mapas terrestres. Los signos colocados por Peirce en el centro de los cuadrantes de la tabla 3.2 corresponden a las soluciones de la segunda forma (véase el apartado 3.2.2).

3.2.2 Segunda Forma

El análisis de la expresión $x \Diamond (x \mathrm{~O~} x)$ es sencilla en la medida en que contiene la forma $x \mathrm{~O~} x$, estudiada de manera completa en el apartado 3.2.1. Por ejemplo si $\mathrm{O} \in \mathcal{N}$ entonces $x \mathrm{~O~} x$ es una tautología, de manera que la segunda forma se reduce a $x \Diamond V$; para que esta forma sea tautología, basta que $\Diamond$ asigne V a los valores VV y FV —los únicos posibles—; en la notación de Peirce, esto equivale a que los cuadrantes superior y derecho estén abiertos. De esta manera, las parejas $(\Diamond, \mathrm{O})$ que arrojan una tautología de la segunda forma con $\mathrm{O} \in \mathcal{N}$ son (◺, O), ($\propto$, O), (ɤ, O) y ($\times$, O).

De la misma manera se analizan las otras tres elecciones posibles de O. Es sencillo consignar los resultados en una tabla pequeña si se adopta la técnica empleada por Peirce: en cada caso, se escoge el conectivo con más cuadrantes cerrados que haga tautología la expresión estudiada. Por ejemplo, para $\mathrm{O} \in \mathcal{N}$ se escoge ◺. Todas las demás soluciones se obtienen abriendo uno por uno los cuadrantes cerrados del conectivo elegido, en todas las formas posibles. En el ejemplo, se consigna ◺ y las soluciones posibles son ◺, $\propto$, ɤ, $\times$.

O	$\mathcal{N}$	$\mathcal{E}$	$\mathcal{W}$	$\mathcal{S}$
$\Diamond$	◺	8	∞	◹

Tabla 3.3: Tautologías de la forma $x \Diamond (x \mathrm{~O~} x)$.

Peirce integró esta información en la tabla de la primera forma (tabla 3.2, página 27). En efecto, el signo colocado *a la izquierda* en la circunferencia central de cada cuadrante es el conectivo $\Diamond$ 'máximo' que arroja una tautología de la forma $x \Diamond (x \ \mathrm{O} \ x)$, tomando el conectivo O de ese cuadrante; el signo colocado *a la derecha* es el conectivo $\heartsuit$ máximo que arroja una tautología de la forma dual $(x \ \mathrm{O} \ x) \heartsuit x$, tomando O de ese cuadrante.

3.2.3 Tercera Forma

Como antes, el estudio de la expresión $(x \Diamond x) \ \mathrm{O} \ (x \heartsuit x)$ se basa en la clasificación inducida por la forma $x \ \mathrm{O} \ x$. Si $\Diamond \in \mathcal{N}$ y $\heartsuit \in \mathcal{N}$, la forma se reduce a $V \ \mathrm{O} \ V$ que es tautología si O asigna V a la pareja VV, es decir, si su cuadrante superior está abierto. De esta manera, las ternas $(\Diamond, \mathrm{O}, \heartsuit)$ con $\Diamond \in \mathcal{N}$, $\heartsuit \in \mathcal{N}$ que arrojan una tautología de esta forma son $(\Diamond, \vee, \heartsuit)$, $(\Diamond, ⊿, \heartsuit)$, $(\Diamond, ◺, \heartsuit)$, $(\Diamond, \infty, \heartsuit)$, $(\Diamond, \reflectbox{$\propto$}, \heartsuit)$, $(\Diamond, \propto, \heartsuit)$, $(\Diamond, \Taurus, \heartsuit)$ y $(\Diamond, \times, \heartsuit)$. Como otro ejemplo, si $\Diamond \in \mathcal{N}$ y $\heartsuit \in \mathcal{W}$ entonces la forma se reduce a $V \ \mathrm{O} \ x$ que es tautología si O asigna V a las parejas VV y VF, es decir, si están abiertos sus cuadrantes superior e izquierdo. Las ternas $(\Diamond, \mathrm{O}, \heartsuit)$ con $\Diamond \in \mathcal{N}$, $\heartsuit \in \mathcal{W}$ que arrojan una tautología de esta forma son $(\Diamond, ⊿, \heartsuit)$, $(\Diamond, \reflectbox{$\propto$}, \heartsuit)$, $(\Diamond, \Taurus, \heartsuit)$ y $(\Diamond, \times, \heartsuit)$.

De esta manera pueden estudiarse los dieciséis casos posibles. Hasta donde se sabe, ni Peirce ni otros investigadores han consignado los resultados para esta forma en una tabla, pero es sencillo hacerlo con la técnica de Peirce indicada en el apartado 3.2.2: en el primer ejemplo se consigna $\vee$ y las soluciones posibles son $\vee$, $⊿$, $◺$, ∞, $\reflectbox{$\propto$}$, $\propto$, $\Taurus$, $\times$; en el segundo ejemplo se registra $⊿$ y las soluciones posibles son $⊿$, $\reflectbox{$\propto$}$, $\Taurus$, $\times$.

La tabla 3.4 (página 30) contiene todos los conectivos máximos. Si a la izquierda (conectivo $\Diamond$) se escoge $\mathcal{N}$ y a la derecha (conectivo $\heartsuit$) se toma $\mathcal{N}$, en la intersección de las filas correspondientes está $\vee$; en la intersección de las filas $\Diamond = \mathcal{N}$ y $\heartsuit = \mathcal{W}$ está $⊿$. Obsérvese la singular simetría especular que tiene esta tabla en los ejes vertical y horizontal, la misma simetría visible en el *Espejo Mágico* de M. C. Escher [3].

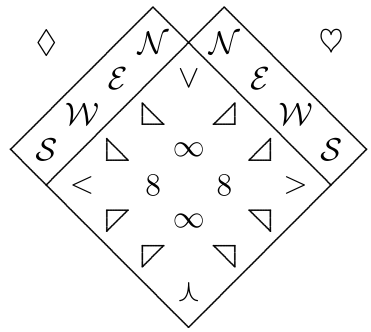


Tabla 3.4: Tautologías de la forma ($x \Diamond x$) O ($x \heartsuit x$).

3.2.4 Cuarta Forma

La expresión ($x \Diamond y$) O ($x \heartsuit y$) se diferencia de manera sutil de la forma estudiada en el apartado 3.2.3. En vez de una variable proposicional ahora aparecen dos —lo cual hace disminuir el número de tautologías posibles— pero aparecen de manera ordenada —lo cual permite considerar de manera simultánea las expresiones $x \Diamond y$ y $x \heartsuit y$—. La técnica empleada por Peirce para encontrar todas las tautologías de esta forma consiste en escoger de manera libre los conectivos $\Diamond$ y $\heartsuit$ y, a partir de ellos, encontrar los conectivos O que hagan siempre verdadera la expresión analizada. Por ejemplo, si $\Diamond$ es ⯐ y $\heartsuit$ es ꝏ entonces $x \Diamond y$ siempre es F y $x \heartsuit y$ puede tomar los valores V y F, luego se requiere que O asigne V a las combinaciones FV y FF o, lo que es lo mismo, que sus cuadrantes derecho e inferior estén abiertos: en este caso, las soluciones posibles para O son ◸, ♀, $\propto$, $\times$. Si $\Diamond$ es ⅄ y $\heartsuit$ es ∞ entonces $x \Diamond y$ toma los valores F, F, F, V —en ese orden— mientras $x \heartsuit y$ toma los valores V, F, F, V; la forma ($x \Diamond y$) O ($x \heartsuit y$) se reduce a las cuatro posibilidades F O V, F O F, F O F, V O V; para obtener una tautología se requiere que O asigne V a las parejas FV, FF, VV, es decir, que sus cuadrantes superior, derecho e inferior estén abiertos; las soluciones posibles para O son $\propto$ y $\times$.

Como en el apartado anterior, la tabla 3.5 contiene en cada casilla el conectivo O máximo que arroja una tautología de esta forma. En la intersección de las filas $\Diamond$ = ⟠ y $\heartsuit$ = ꝏ está ◸; en la intersección de las filas $\Diamond$ = ⅄ y $\heartsuit = \infty$ está $\propto$.

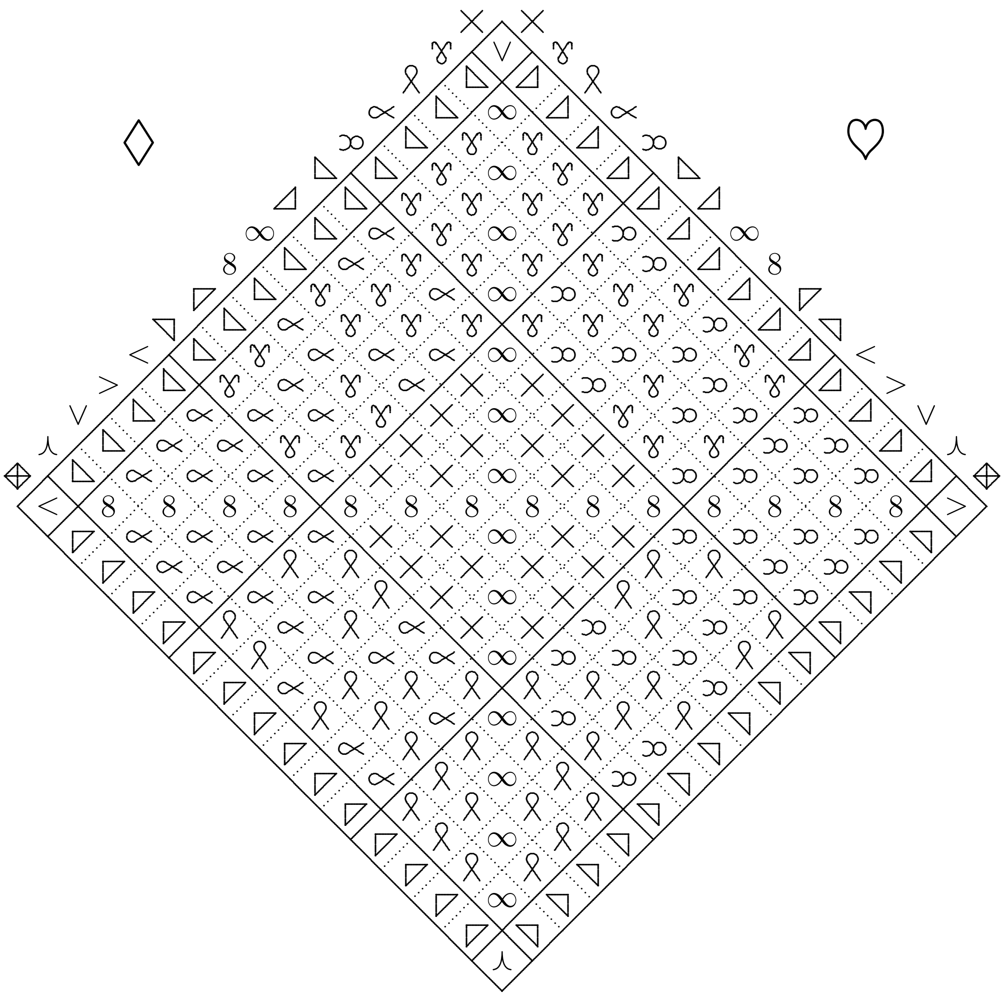


Tabla 3.5: Tautologías de la forma ($x \Diamond y$) O ($x \heartsuit y$).

Una versión horizontal (□) de esta tabla 3.5 aparece en CP 4.273, con la notación usada por los editores. De la tabla presentada allí, los editores dicen que "es una representación más clara (y precisa) de la tabla dada por Peirce, en razón de una reducción en el número de signos usados". En el documento [12] se analiza la simetría de estas tres tablas de Peirce con la ayuda de la teoría matemática de grupos y, a partir de ese estudio, se refuta de manera técnica la afirmación anterior: la razón esencial es que el grupo de los movimientos rígidos del cuadrado (D_4) no actúa de manera *natural* sobre los signos empleados por los editores de *Collected Papers*. Allí también se muestra que las tablas 3.4 y 3.5 tienen la misma simetría y que ésta se pierde al colocarlas de manera horizontal ($\square$), de manera que fue un gran acierto de Peirce el colocar sus tres tablas inclinadas ($\diamondsuit$).

3.2.5 Quinta Forma

Es evidente que el estudio de la forma $(x \spadesuit y) \heartsuit [(y \clubsuit z) \Diamond (x \mathrm{O} z)]$ es más complejo que el de las formas anteriores, pues aumenta el número de variables proposicionales y el de conectivos. Para esta forma Peirce renuncia a encontrar *todas* las tautologías, como lo ha logrado en las formas anteriores, y se conforma con *algunas*. Por ejemplo, no considera las tautologías 'triviales' que se obtienen cuando el conectivo principal $\heartsuit$ es $\times$.

La estrategia empleada por Peirce puede describirse como sigue. En primer lugar, se escogen los conectivos $\heartsuit$, $\Diamond$ de tal manera que la forma auxiliar $P \heartsuit (Q \Diamond R)$ sea verdadera excepto para una sola combinación preestablecida de valores para P, Q, R. Luego se determinan los conectivos $\spadesuit$, $\clubsuit$, O de tal manera que las tres proposiciones $(x \spadesuit y)$, $(y \clubsuit z)$, $x \mathrm{O} z$ no tomen los valores establecidos, con lo cual se garantiza que la expresión completa es una tautología.

Peirce escogió cuatro combinaciones y las rotuló con los conectivos $\curlywedge$, $<$, $>$, $\vee$. La razón para elegir estos signos es sencilla: en el primer caso los valores excluidos para P–Q–R son F–F–F, que es con exactitud el único caso en el cual la implicación $(P \curlywedge Q) \propto R$ es falsa. Con otras palabras, en el primer caso se están buscando aquellos conectivos $\heartsuit$, $\Diamond$ tales que la fórmula

$P \heartsuit (Q \Diamond R)$ es equivalente a $(P \curlywedge Q) \propto R$. Los demás casos se obtienen al cambiar en la última expresión el conectivo $\curlywedge$ por los otros tres indicados.

Si la combinación escogida es $\curlywedge$, los conectivos $\heartsuit$, $\Diamond$ pueden determinarse como sigue. Si $F \Diamond F$ es F, se requiere que $\heartsuit$ asigne F a la pareja FF y V a todas las demás, luego su único cuadrante cerrado es el inferior y $\heartsuit = \Taurus$, mientras $\Diamond$ tiene cerrado su cuadrante inferior y para garantizar la unicidad se requiere que todos los demás estén abiertos de suerte que también $\Diamond = \Taurus$; en el otro caso, si $F \Diamond F$ es V, el conectivo $\heartsuit$ debe asignar F a la pareja FV y V a todas las demás, luego $\heartsuit = \text{ꝏ}$, mientras $\Diamond$ tiene abierto su cuadrante inferior y cerrados los demás, $\Diamond = \curlywedge$. Las parejas de soluciones posibles para los cuatro casos están consignados en la tabla 3.6.

pivote	$\curlywedge$	$<$	$>$	$\vee$
$\heartsuit$ $\Diamond$	$\Taurus$ $\Taurus$	$\Taurus$ $\propto$	$\propto$ $\Taurus$	$\propto$ $\propto$
	ꝏ $\curlywedge$	ꝏ $>$	ᛟ $\curlywedge$	ᛟ $>$

Tabla 3.6: Conectivos $\heartsuit$, $\Diamond$ para la forma $(x \spadesuit y) \heartsuit [(y \clubsuit z) \Diamond (x \text{ O } z)]$.

El cálculo de los conectivos $\spadesuit$, $\clubsuit$, O es más complejo aunque el procedimiento propuesto es el mismo seguido en las formas anteriores: se toman de manera libre dos conectivos $\spadesuit$, $\clubsuit$; se buscan todos los conectivos O que satisfagan la condición exigida; se consigna el que tiene más cuadrantes cerrados; los demás se obtienen del máximo abriendo sus cuadrantes en todas las maneras posibles. En [2] y en [5] se indican métodos de cálculo del tercer conectivo en términos de los otros dos. Glenn Clark en [2] sostiene que Peirce no dejó indicación alguna sobre este cálculo, pero todo parece indicar que el pasaje CP 4.274 se refiere al mismo —en [5] se desarrollan algunos ejemplos que sostienen esta conjetura—. Los resultados de los 64 cálculos están consignados en la tabla 3.7 (página 34). Obsérvese de nuevo la simetría especular en el eje vertical, presente porque Peirce *escogió órdenes distintos* para las filas exteriores de la izquierda ($\spadesuit$) y de la derecha ($\clubsuit$). En [12] se demuestra que, con esta notación, solo hay *dos* presentaciones simétricas posibles, ambas con la tabla inclinada ($\Diamond$). Por otra parte, aunque es un hecho de justificación fácil (véase [5]) no deja de ser asombroso que la misma tabla arroja las soluciones para *todos los cuatro* casos $\Yup$, $<$, $>$, $\vee$.

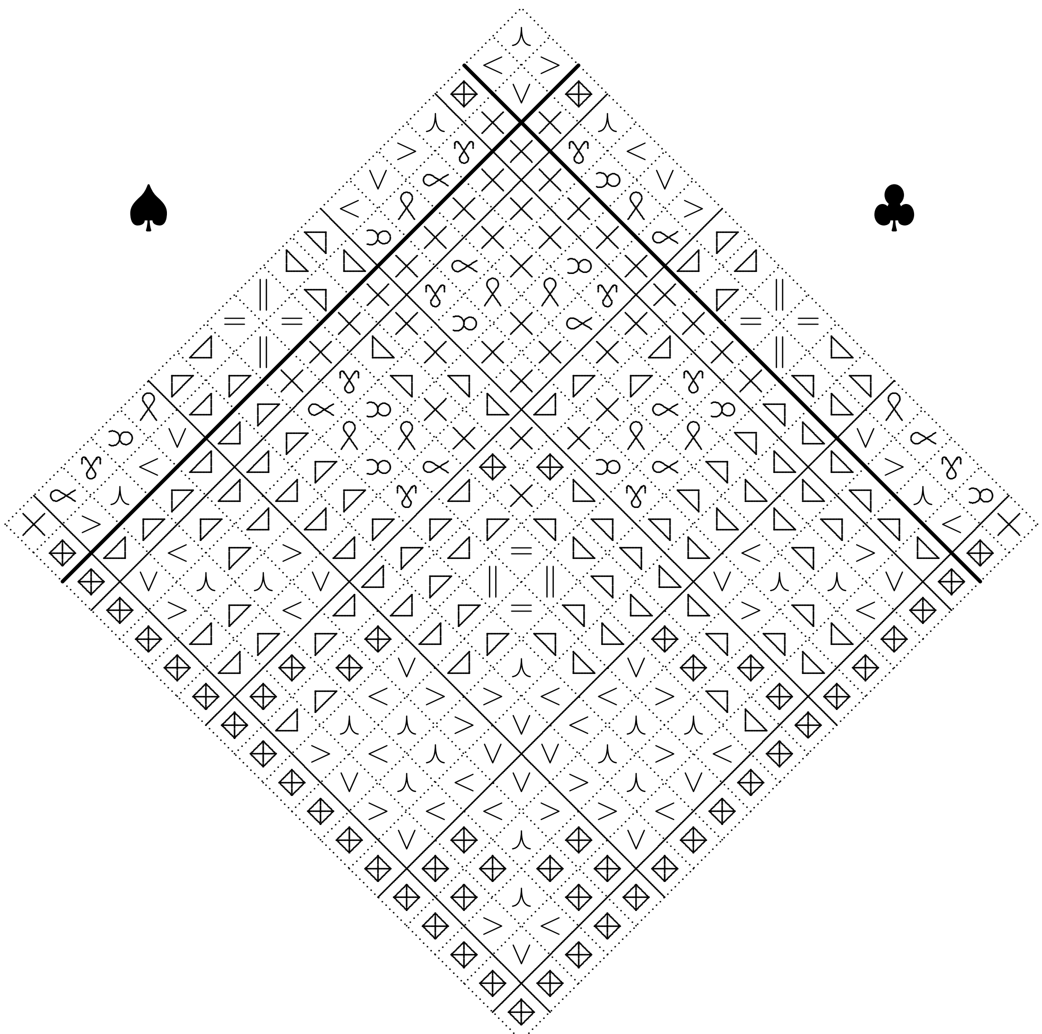


Tabla 3.7: Conectivos $\spadesuit$, $\clubsuit$, O para la forma $(x \spadesuit y) \heartsuit [(y \clubsuit z) \diamondsuit (x \,\mathrm{O}\, z)]$.

Así, el procedimiento para encontrar tautologías de la quinta forma es el siguiente. En primer lugar se escoge un *pivote* del conjunto $\{\Yup, <, >, \vee\}$.

En segunda instancia y con la tabla 3.6, se toma cualquier pareja de conectivos $(\heartsuit, \diamondsuit)$ entre las dos asignadas al pivote elegido. Para los conectivos restantes se toman de manera libre dos conectivos $\spadesuit$, $\clubsuit$; en la esquina superior de la tabla 3.7 se busca el pivote escogido; en las filas que se cortan en el pivote se toma $\spadesuit$ a la izquierda y $\clubsuit$ a la derecha; al interior de la tabla, en el cruce de las filas correspondientes, se encuentra el conectivo máximo O que completa la tautología.

Por ejemplo, se escoge el pivote $>$. De la tabla 3.6 se elige $(\heartsuit, \diamondsuit) = (\text{ᛟ}, \curlywedge)$. Se escogen $(\spadesuit, \clubsuit) = (◺, \propto)$ y la tabla 3.7 indica —buscando $\spadesuit = ◺$ y $\clubsuit = \propto$ en las filas que se encuentran en $>$ arriba— que puede tomarse O $=$ ◹ o cualquier conectivo obtenido de él abriendo sus cuadrantes cerrados. Luego

$$(x \mathbin{◺} y) \mathbin{\text{ᛟ}} [(y \propto z) \curlywedge (x \mathbin{◹} z)]$$

es una tautología.

Peirce consideró las siguientes doce variantes de esta forma, que pueden atacarse con el mismo método. La tabla 3.7 sirve para todas las variantes pero la 3.6 debe volverse a calcular para cada forma (véase [5]).

$$
\begin{array}{ll}
(x \spadesuit y) \heartsuit [(y \clubsuit z) \diamondsuit (x \mathrm{O} z)] & [(x \spadesuit y) \diamondsuit (y \clubsuit z)] \heartsuit (x \mathrm{O} z) \\
(x \spadesuit y) \heartsuit [(x \mathrm{O} z) \diamondsuit (y \clubsuit z)] & [(x \spadesuit y) \diamondsuit (x \mathrm{O} z)] \heartsuit (y \clubsuit z) \\
(y \clubsuit z) \heartsuit [(x \spadesuit y) \diamondsuit (x \mathrm{O} z)] & [(y \clubsuit z) \diamondsuit (x \spadesuit y)] \heartsuit (x \mathrm{O} z) \\
(y \clubsuit z) \heartsuit [(x \mathrm{O} z) \diamondsuit (x \spadesuit y)] & [(y \clubsuit z) \diamondsuit (x \mathrm{O} z)] \heartsuit (x \spadesuit y) \\
(x \mathrm{O} z) \heartsuit [(x \spadesuit y) \diamondsuit (y \clubsuit z)] & [(x \mathrm{O} z) \diamondsuit (x \spadesuit y)] \heartsuit (y \clubsuit z) \\
(x \mathrm{O} z) \heartsuit [(y \clubsuit z) \diamondsuit (x \spadesuit y)] & [(x \mathrm{O} z) \diamondsuit (y \clubsuit z)] \heartsuit (x \spadesuit y)
\end{array}
$$

A la asombrosa tabla 3.7 está ligada una historia típica —icónica, diagramática— de los documentos de Peirce: en *Collected Papers* no aparece, pues se la confunde con la tabla 3.5 (página 31); estuvo perdida durante muchos años en el inmenso legado manuscrito de Peirce; fue reubicada y comprendida apenas en las últimas décadas del siglo XX [2].

Conteo

A partir de las tablas presentadas no es difícil *contar* las tautologías encontradas por Peirce en las diferentes formas. De la tabla 3.2 es claro que la primera forma aporta 4 tautologías. En la tabla 3.3, cada uno de los conectivos consignados representa una familia de 4 soluciones; cada solución da lugar a 4 tautologías —pues O puede escogerse en un conjunto de tantos conectivos—; el total se duplica porque cada tautología de la forma $x \Diamond (x \text{ O } x)$ aporta una de la forma variante $(x \text{ O } x) \heartsuit x$ (¡reflejando el signo $\Diamond$ en su eje vertical!). Así, hay $4 \times 4 \times 4 \times 2 = 128$ tautologías de la segunda forma.

Como en la 3.3, en las tablas 3.4, 3.5 y 3.7 el conectivo que aparece en cierta casilla es el máximo del conjunto de soluciones: si tiene n cuadrantes cerrados, representa una familia de 2^n conectivos. En consecuencia, el número de tautologías aportadas por cada una de estas tablas es la suma $\sum 2^{n_i}$ donde i recorre todas las casillas de la tabla. Para la tercera forma la suma $\sum 2^{n_i}$ es 80, cantidad que debe multiplicarse por 16 —el número de posibles elecciones de la pareja $(\Diamond, \heartsuit)$— lo cual arroja 1280 tautologías. En la tabla 3.5 se tiene $\sum 2^{n_i} = 680$; aunque Peirce no lo indicó, con esta misma tabla pueden encontrarse otras tantas tautologías de la forma alternativa $(x \Diamond y) \text{ O } (y \heartsuit x)$, aumentando la cuenta a 1360. La suma $\sum 2^{n_i}$ de la tabla 3.7 es 1699, cantidad que debe multiplicarse por la cantidad de pivotes, por la de opciones que da la tabla 3.6 y finalmente por el número de formas alternativas consideradas. Así, la cantidad de tautologías encontradas de la quinta forma asciende a $1699 \times 4 \times 2 \times 12 = 163104$. En CP 4.271 se indica un total de 24376, que debe ser $24576 = 256 \times 4 \times 2 \times 12$, producto obtenido al considerar solo una tautología por cada casilla de esta tabla en vez de 2^{n_i}.

El gran total de tautologías halladas en las diversas formas estudiadas por Peirce es $4 + 128 + 1280 + 1360 + 163104 = 165876$.

3.3 Iconicidad tercera: Propiedades del sistema

En la sección 3.2 se mostró cómo muchas propiedades de los conectivos se reflejan en el signo que les corresponde en la notación de Peirce. Además de las propiedades individuales de los conectivos y de las relaciones entre ellos —conmutatividad, tautología de una forma determinada— pueden distinguirse propiedades del sistema completo de los conectivos binarios.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
VV	F	F	F	F	V	V	V	V	F	F	F	F	V	V	V	V
VF	F	F	F	V	F	V	F	F	V	V	F	V	F	V	V	V
FV	F	F	V	F	F	F	V	F	V	F	V	V	V	F	V	V
FF	F	V	F	F	F	F	F	V	F	V	V	V	V	V	F	V

Tabla 3.8: El sistema de los conectivos binarios.

En la tabla 3.8 —donde los conectivos están rotulados con los números de 1 a 16— se reconocen varias simetrías, por ejemplo: la reflexión de la tabla en su eje vertical corresponde a cambiar todas las letras V por F y viceversa. Conforme lo explicitó H. Weyl [20], la simetría de una estructura se estudia mediante el grupo de los automorfismos de la misma —de hecho, la teoría de grupos es la herramienta precisa que la matemática desarrolló para estudiar la simetría—.

En el caso de los conectivos binarios, no es difícil encontrar *automorfismos lógicos*: la negación —asignar al conectivo O el conectivo $\Diamond$ tal que $x \Diamond y$ y $\overline{x \mathrm{O} y}$ son equivalentes—, la negación en los argumentos, la conversión. Todas las combinaciones de estas funciones básicas arrojan un total de 16 automorfismos. Puede justificarse que no hay más (véase [4, 5]), pero no parece nada fácil explicar por qué el número de automorfismos coincide con el de conectivos. La tabla 3.9 (página 38) muestra de manera explícita las 16 funciones biyectivas, a la izquierda se indica —de manera diagramática—

su forma de cálculo.

$x \,\mathrm{O}\, y$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	
$x \,\mathrm{O}\, y$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	Reposo
$\overline{y} \,\mathrm{O}\, x$	1	3	5	2	4	10	6	9	8	11	7	13	15	12	14	16	Rotación 90°
$\overline{x} \,\mathrm{O}\, \overline{y}$	1	5	4	3	2	11	10	8	9	7	6	15	14	13	12	16	Rotación 180°
$y \,\mathrm{O}\, \overline{x}$	1	4	2	5	3	7	11	9	8	6	10	14	12	15	13	16	Rotación 270°
$y \,\mathrm{O}\, x$	1	2	4	3	5	7	6	8	9	11	10	12	14	13	15	16	Reflexión EV
$\overline{x} \,\mathrm{O}\, y$	1	4	5	2	3	11	7	9	8	10	6	14	15	12	13	16	Reflexión DA
$\overline{y} \,\mathrm{O}\, \overline{x}$	1	5	3	4	2	10	11	8	9	6	7	15	13	14	12	16	Reflexión EH
$x \,\mathrm{O}\, \overline{y}$	1	3	2	5	4	6	10	9	8	7	11	13	12	15	14	16	Reflexión DD
$\overline{x \,\mathrm{O}\, y}$	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	Complemento
$\overline{\overline{y} \,\mathrm{O}\, x}$	16	14	12	15	13	7	11	8	9	6	10	4	2	5	3	1	Rot 90°+Co
$\overline{\overline{x} \,\mathrm{O}\, \overline{y}}$	16	12	13	14	15	6	7	9	8	10	11	2	3	4	5	1	Rot 180°+Co
$\overline{y \,\mathrm{O}\, \overline{x}}$	16	13	15	12	14	10	6	8	9	11	7	3	5	2	4	1	Rot 270°+Co
$\overline{y \,\mathrm{O}\, x}$	16	15	13	14	12	10	11	9	8	6	7	5	3	4	2	1	Ref EV+Co
$\overline{\overline{x} \,\mathrm{O}\, y}$	16	13	12	15	14	6	10	8	9	7	11	3	2	5	4	1	Ref DA+Co
$\overline{\overline{y} \,\mathrm{O}\, \overline{x}}$	16	12	14	13	15	7	6	9	8	11	10	2	4	3	5	1	Ref EH+Co
$\overline{x \,\mathrm{O}\, \overline{y}}$	16	14	15	12	13	11	7	8	9	10	6	4	5	2	3	1	Ref DD+Co

Tabla 3.9: Efecto de los automorfismos lógicos.

Estos automorfismos con la composición constituyen un grupo. En el lenguaje técnico de la teoría de grupos, se trata de un subgrupo no abeliano de S_{16} isomorfo a $\mathbb{Z}_2 \times D_4$: la última columna de la tabla 3.9 indica el isomorfismo. Aquí EV indica la reflexión en el eje vertical y EH en el horizontal, mientras DA indica la reflexión en la diagonal que asciende de izquierda a derecha y DD en la que desciende de izquierda a derecha —llamada *diagonal principal* en teoría de matrices—. En lenguaje más sintético, los automorfismos corresponden a los movimientos rígidos de un cuadrado que puede cambiar entre dos estados —o dos colores—, cambio que en la tabla se ha descrito como "complemento".

Todo (sub)grupo de automorfismos de una estructura *actúa* de manera natural sobre la estructura. En este caso, resulta instructivo e interesante calcular las órbitas, los elementos invariantes y los subgrupos de isotropía de esta acción directamente de la tabla, como se hace con detalle en [4] y [5]. Allí también se calculan subgrupos y cocientes de este grupo.

Cuando se escribe la tabla 3.9 con la notación de Peirce, el resultado es sorprendente.

$x\,\mathrm{O}\,y$	⊕	⋏	<	>	∨	◿	◺	∞	8	◹	◸	ᛟ	∝	ɞ	ɤ	×	
$x\,\mathrm{O}\,y$	⊕	⋏	<	>	∨	◿	◺	∞	8	◹	◸	ᛟ	∝	ɞ	ɤ	×	Reposo
$\overline{y}\,\mathrm{O}\,x$	⊕	<	∨	⋏	>	◹	◿	8	∞	◸	◺	∝	ɤ	ᛟ	ɞ	×	Rotación 90°
$\overline{x}\,\mathrm{O}\,\overline{y}$	⊕	∨	>	<	⋏	◸	◹	∞	8	◺	◿	ɤ	ɞ	∝	ᛟ	×	Rotación 180°
$y\,\mathrm{O}\,\overline{x}$	⊕	>	⋏	∨	<	◺	◸	8	∞	◿	◹	ɞ	ᛟ	ɤ	∝	×	Rotación 270°
$y\,\mathrm{O}\,x$	⊕	⋏	>	<	∨	◺	◿	∞	8	◸	◹	ᛟ	ɞ	∝	ɤ	×	Reflexión EV
$\overline{x}\,\mathrm{O}\,y$	⊕	>	∨	⋏	<	◸	◺	8	∞	◹	◿	ɞ	ɤ	ᛟ	∝	×	Reflexión DA
$\overline{y}\,\mathrm{O}\,\overline{x}$	⊕	∨	<	>	⋏	◹	◸	∞	8	◿	◺	ɤ	∝	ɞ	ᛟ	×	Reflexión EH
$x\,\mathrm{O}\,\overline{y}$	⊕	<	⋏	∨	>	◿	◹	8	∞	◺	◸	∝	ᛟ	ɤ	ɞ	×	Reflexión DD
$\overline{x\,\mathrm{O}\,y}$	×	ɤ	ɞ	∝	ᛟ	◸	◹	8	∞	◺	◿	∨	>	<	⋏	⊕	Complemento
$\overline{\overline{y}\,\mathrm{O}\,x}$	×	ɞ	ᛟ	ɤ	∝	◺	◸	∞	8	◿	◹	>	⋏	∨	<	⊕	Rot 90°+Co
$\overline{\overline{x}\,\mathrm{O}\,\overline{y}}$	×	ᛟ	∝	ɞ	ɤ	◿	◺	8	∞	◹	◸	⋏	<	>	∨	⊕	Rot 180°+Co
$\overline{y\,\mathrm{O}\,\overline{x}}$	×	∝	ɤ	ᛟ	ɞ	◹	◿	∞	8	◸	◺	<	∨	⋏	>	⊕	Rot 270°+Co
$\overline{y\,\mathrm{O}\,x}$	×	ɤ	∝	ɞ	ᛟ	◹	◸	8	∞	◿	◺	∨	<	>	⋏	⊕	Ref EV+Co
$\overline{\overline{x}\,\mathrm{O}\,y}$	×	∝	ᛟ	ɤ	ɞ	◿	◹	∞	8	◺	◸	<	⋏	∨	>	⊕	Ref DA+Co
$\overline{\overline{y}\,\mathrm{O}\,\overline{x}}$	×	ᛟ	ɞ	∝	ɤ	◺	◿	8	∞	◸	◹	⋏	>	<	∨	⊕	Ref EH+Co
$\overline{x\,\mathrm{O}\,\overline{y}}$	×	ɞ	ɤ	ᛟ	∝	◸	◺	∞	8	◹	◿	>	∨	⋏	<	⊕	Ref DD+Co

Tabla 3.10: Efecto de los automorfismos con la notación de Peirce.

En la tabla 3.10 se observa de inmediato que los automorfismos lógicos corresponden *con toda exactitud* a los movimientos rígidos de los signos: el automorfismo identificado con la rotación corresponde a rotar cada signo 90 grados; cualquier automorfismo caracterizado como una reflexión corresponde a reflejar cada signo en el eje o diagonal del caso; el automorfismo de negación, identificado con el complemento, corresponde a abrir los cuadrantes cerrados y cerrar los abiertos en cada signo. El marco $\times$ con el que se dibujan los signos originales es, sin duda, un cuadrado cuyos lados pueden alternar entre dos estados —cuadrante abierto y cuadrante cerrado— y sus movimientos rígidos corresponden, via un isomorfismo, a los automorfismos del sistema de los conectivos binarios. De esta manera, toda la simetría del sistema de conectivos se refleja en el sistema de signos propuesto por Peirce.

La notación propuesta por Peirce en 1902 para los conectivos proposicionales binarios es —valga la redundancia— *un ícono de un sistema de signos icónico* o diagramático. Cada signo *es*, en cierto modo, el objeto representado; las *propiedades* individuales de cada objeto y las *relaciones* entre los objetos se reflejan fielmente en los signos correspondientes; las propiedades colectivas del *universo* de los objetos se manifiestan en el sistema de signos.

Bibliografía

[1] Glenn Clark and Shea Zellweger, *Let the mirrors do the thinking*. Mount Union Magazine **93** (1993), 2–5.

[2] Glenn Clark, *New light on Peirce's iconic notation for the sixteen binary connectives*. In: Nathan Houser, Don D. Roberts and James Van Evra (Eds.), *Studies in the Logic of Charles Sanders Peirce*, 304–333. Indiana University Press, Bloomington and Indianapolis (1997).

[3] M. C. Escher, *Estampas y Dibujos*. Taschen, Köln, 1992.

[4] Mireya García, Jhon Fredy Gómez y Arnold Oostra, *Simetría y Lógica: La notación de Peirce para los 16 conectivos binarios*. Memorias del XII Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones, Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá (2001) 1–26.

[5] Mireya García y Jhon Fredy Gómez, *Notación de Peirce para los Conectivos Binarios*. Tesis (Matemáticas), Universidad del Tolima, Ibagué, 2002.

[6] Eric M. Hammer, *Logic and Visual Information*. Center for the Study of Language and Information, Leland Stanford Junior University, Stanford, 1995.

[7] Beverley Kent, *The interconnectedness of Peirce's diagrammatic thought*. In: Nathan Houser, Don D. Roberts and James Van Evra

(Eds.), *Studies in the Logic of Charles Sanders Peirce,* 445–459. Indiana University Press, Bloomington and Indianapolis (1997).

[8] Robert Marty, *76 definitions of the sign by C. S. Peirce* [en línea]. Disponible: http://www.cspeirce.com/menu/library/rsources/76defs/76defs.htm

[9] Fabián Augusto Molina, *Correspondencia entre algunos Sistemas de Lógica Modal y los Gráficos Existenciales Gama de Peirce*. Tesis (Matemáticas), Universidad del Tolima, Ibagué, 2003.

[10] Arnold Oostra, *Acercamiento lógico a Peirce*. *Boletín de Matemáticas - Nueva Serie* VII (2000), 60–77.

[11] Arnold Oostra, *Los diagramas de la matemática y la matemática de los diagramas*. *Boletín de Matemáticas - Nueva Serie* VIII (2001), 1–7.

[12] Arnold Oostra, Simetría en algunas tablas de C. S. Peirce. Memorias del XIV Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones, Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá (2003), por aparecer.

[13] Charles S. Peirce, *Collected Papers of Charles Sanders Peirce*. Vols. 1–6, Charles Hartshorne and Paul Weiss (Eds.); vols 7–8, Arthur W. Burks (Ed.). Harvard University Press, 1931–1958.

[14] Charles S. Peirce, *The New Elements of Mathematics*. Vols. 1–4, Carolyn Eisele (Ed.). Mouton, The Hague, 1976.

[15] Charles S. Peirce, *Writings of Charles S. Peirce: A Chronological Edition*. Max H. Fisch, Edward C. Moore, et al (Eds.). Indiana University Press, Bloomington, 1982–.

[16] Mariluz Restrepo, *La semiótica de Charles S. Peirce*. *Signo y Pensamiento* 16 (1990), 27–46.

[17] Don D. Roberts, *The Existential Graphs of Charles S. Peirce*. Mouton, The Hague, 1973.

[18] Don D. Roberts, *A decision method for existential graphs*. In: Nathan Houser, Don D. Roberts and James Van Evra (Eds.), *Studies in the Logic of Charles Sanders Peirce*, 387–401. Indiana University Press, Bloomington and Indianapolis (1997).

[19] Pierre Thibaud, *La Lógica de Charles Sanders Peirce: Del álgebra a los gráficos*. Paraninfo, Madrid, 1982.

[20] Hermann Weyl, *Simetría*. McGraw-Hill, Madrid, 1991.

[21] Fernando Zalamea, *Lógica Topológica: Una introducción a los gráficos existenciales de Peirce*. XIV Coloquio Distrital de Matemáticas y Estadística, Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, 1997.

[22] Fernando Zalamea, *Signos Triádicos. Nueve estudios de caso latinoamericanos en el cruce matemáticas - estética - lógica*. Premio de Ensayo Literario Hispanoamericano 'Lya Kostakowsky' (México). Bogotá, 2000.

[23] Fernando Zalamea, *El Continuo Peirceano. Aspectos globales y locales de genericidad, reflexividad y modalidad: Una visión del continuo y la arquitectónica pragmática peirceana desde la lógica matemática del siglo XX*. Universidad Nacional de Colombia, Facultad de Ciencias, Bogotá, 2001.

[24] Fernando Zalamea, *Peirce's Logic of Continuity: Existential graphs and non-cantorian continuum*. Inédito, 2002.

[25] Shea Zellweger, *Untapped potential in Peirce's iconic notation for the sixteen binary connectives*. In: Nathan Houser, Don D. Roberts and James Van Evra (Eds.), *Studies in the Logic of Charles Sanders*

Peirce, 334–386. Indiana University Press, Bloomington and Indianapolis (1997).

[26] J. Jay Zeman, *The Graphical Logic of C. S. Peirce*. Ph. D. dissertation, University of Chicago, 1964.

[27] J. Jay Zeman, *Peirce's theory of signs*. In: T. Sebeok (Ed.), *A Perfusion of Signs*, 22–39. Indiana University Press, Bloomington, 1977.

Arnold Oostra
Departamento de Matemáticas y Estadística
Universidad del Tolima
AA 546
Ibagué, COLOMBIA
oostra@bunde.tolinet.com.co